

درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها

به مجموعه تمام افراد یا اشیا که می‌خواهیم درباره یک یا چند ویژگی از آن‌ها تحقیق انجام دهیم **جامعه** گوئیم. بعد از انجام تحقیق، واقعیت‌هایی (اطلاعاتی) درباره افراد جامعه کسب می‌کنیم که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند و به آنها **داده** گوئیم.

هر ویژگی از اشیا یا اشخاص، که در اعضای جامعه یسار نباشد و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را **متغیر** نامیده و عددی که به آن ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود را **مقدار متغیر** یا **مشاهده** گوئیم. به طور مثال فرض کنید یک کارخانه تولید کفش برای امور تبلیغاتی می‌خواهد به هر کدام از دانش‌آموزان کلاس ۳۰ نفره یازدهم ریاضی، یک جفت کفش هدیه کند، برای این منظور یک مدل را در اختیار دانش‌آموزان قرار داده تا آنها مدل موردپسند خود را انتخاب کنند.

*** جامعه آماری دانش‌آموزان بوده و یک مدل کفش، داده محسوب می‌شوند (داده توصیفی) ***

حال ساینز پای آن‌ها را اندازه می‌گیریم و مشاهده می‌کنیم ساینز پای آن‌ها در محدوده ۳۶ تا ۴۱ می‌باشد، به طور مثال ۳۶ نفر ساینز ۳۷، ۵ نفر ساینز ۳۹، و ۱ نفر ساینز ۴۱ هستند.

*** ساینز پای آن‌ها به عنوان متغیر و اندازه مشاهده شده به عنوان مقدار متغیر (مشاهده) محسوب می‌شوند ***

اما اگر برای سهولت کار مدل‌ها را با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ...، ۷ شماره گذاری کرده و از هر دانش‌آموز بخواهیم شماره مدل مورد نظر خود را اعلام کند، داده از نوع عددی شده و به آن مقدار متغیر گوئیم.

مثال: می‌خواهیم گروه خونی افرادی با شاه را ثبت کنیم. این گروه‌های خونی عبارتند از:

O منفی، O مثبت، A منفی و ... و AB مثبت. در این مثال جامعه آماری افراد با شاه، متغیر گروه

خونی افراد و داده همان گروه‌های خونی مختلف بدست آمده است.

حال گروه‌های خونی را با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... و AB مثبت شماره ۱،

داده‌ها از نوع عددی شده و به آنها مقدار متغیر گوئیم.

فراوانی یک داده: تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می شود را فراوانی آن داده می گویند.

فراوانی نسبی یک داده: با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کل داده ها، فراوانی نسبی آن داده به دست می آید.

اگر فراوانی نسبی داده ها در $\frac{1}{n}$ ضرب شوند، آنگاه درصد فراوانی نسبی داده ها به دست می آید.

مسئله: یک مؤسسه ۶ کارمند دارد که ۱۵ نفر دارای مدرک دکتری، ۳۰ نفر کارشناسی ارشد، ۶ نفر کارشناسی و ۹ نفر

دیپلم هستند. اطلاعات مربوط به فراوانی، فراوانی نسبی و درصد فراوانی نسبی را در جدول فراوانی به شکل زیر بنویسید.

سطح تحصیلات کارمندان	شماره کارمندان	فراوانی کارمندان	فراوانی نسبی کارمندان	درصد فراوانی نسبی کارمندان
دکتری	۱	۱۵	$\frac{۱۵}{۶۰}$	$\frac{۱۵}{۶۰} \times ۱۰۰ = ۲۵$
کارشناسی ارشد	۲	۳۰	$\frac{۳۰}{۶۰}$	$\frac{۳۰}{۶۰} \times ۱۰۰ = ۵۰$
کارشناسی	۳	۶	$\frac{۶}{۶۰}$	$\frac{۶}{۶۰} \times ۱۰۰ = ۱۰$
دیپلم	۴	۹	$\frac{۹}{۶۰}$	$\frac{۹}{۶۰} \times ۱۰۰ = ۱۵$
مجموع کل		۶۰	۱	۱۰۰

مسئله: جدول فراوانی نسبی گروه خونی ۸۰ دانش آموز به صورت

گروه خونی	A	B	AB	O
فراوانی نسبی	x	۰.۳	۰.۱۵	۰.۴۵

روبروست، گروه خونی چند دانش آموز از نوع A است؟

مجموع فراوانی های نسبی در جدول فراوانی نسبی برابر یک است بنابراین:

$$x + ۰.۳ + ۰.۱۵ + ۰.۴۵ = ۱ \Rightarrow x = ۰.۱۰$$

$$\text{فراوانی نسبی گروه خونی A} = \frac{\text{تعداد کل داده ها}}{\text{فراوانی نسبی گروه خونی A}} \Rightarrow ۰.۱۰ = \frac{f_A}{۸۰} \Rightarrow f_A = ۸۰ \times ۰.۱۰ = ۸$$

مسئله: فرض کنید دو دستگاه A و B به طور مستقل تمام کالاهای کارخانه ای را تولید می کنند. در پایان ماه فروردین،

واحد شل اعلام کرده است که دستگاه A، ۲۸ و دستگاه B، ۱۰ کالای معیوب تولید کرده اند. در صورتی که

کل کالاهای تولید شده دستگاه های A و B در این ماه به ترتیب ۳۲۰ و ۱۰۰ باشند، کالاهای نام دستگاه شرایب

بختی دارد؟

برای مقایسه این دو دستگاه از درصد فراوانی استفاده می‌کنیم:

$$17,5 = \text{درصد فراوانی نسبی کالاها معیوب دستگاه A} = \frac{28}{160} \times 100$$

$$10 = \text{درصد فراوانی نسبی کالاها معیوب دستگاه B} = \frac{40}{400} \times 100$$

بنابراین دستگاه B شرایط بهتری دارد زیرا درصد فراوانی کالاها معیوب آن کمتر است.

* نمودارها و تحلیل داده‌ها *

برای نمایش بهتر داده‌ها، آن‌ها را روی نمودار رسم می‌کنیم. در این قسمت سه نمودار معرفی می‌کنیم:

1) نمودار میله‌ای :

این نمودار بیشتر برای متغیرهای کمی گسسته و کیفی مناسب است. در این نمودار محور افقی داده‌ها

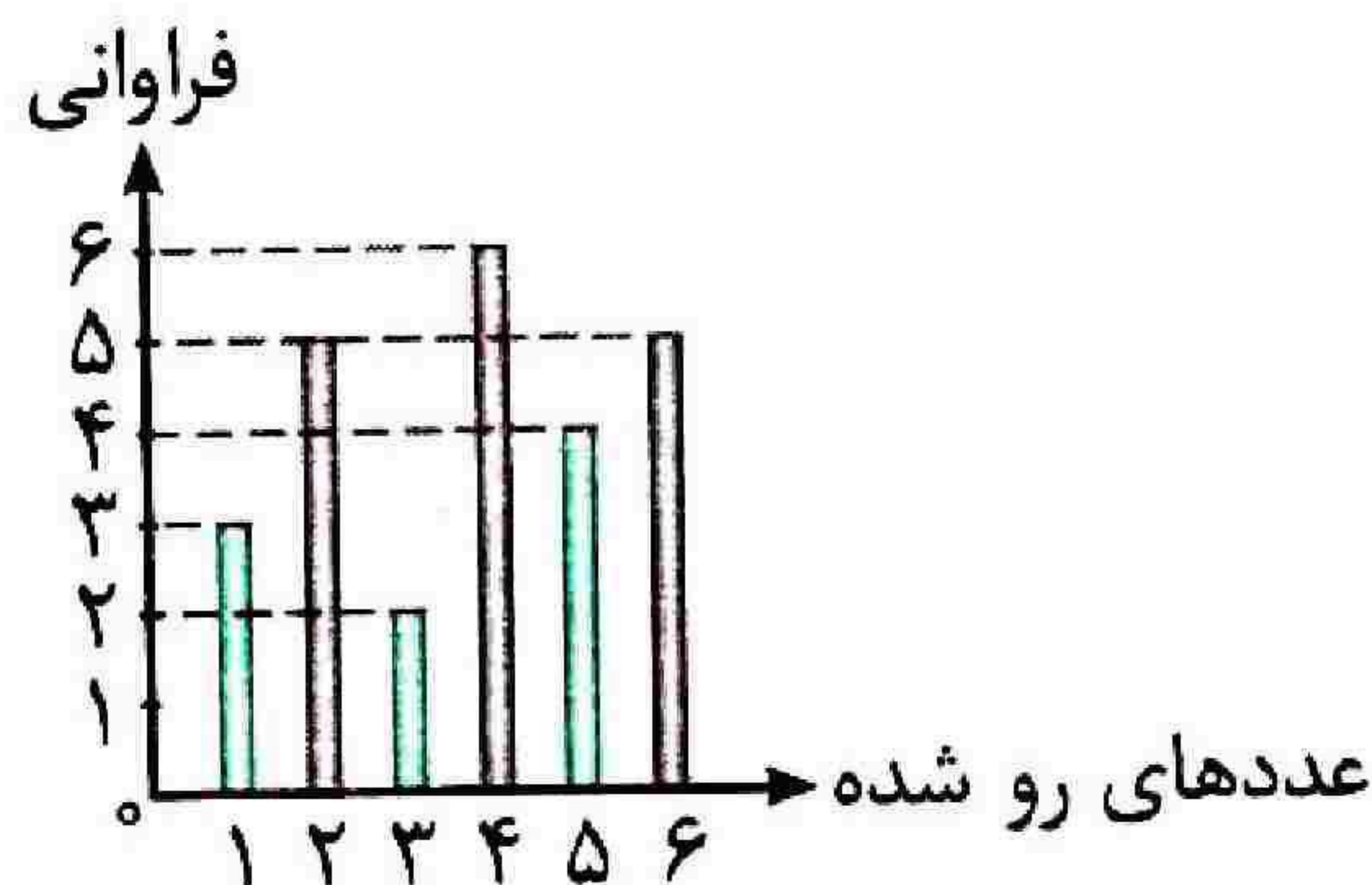
(یا شماره داده‌ها) و محور عمودی بر حسب فراوانی یا فراوانی نسبی داده‌ها است.

مثال: جدول روبه‌رو مربوط به داده‌های ۲۵ بار پرتاب

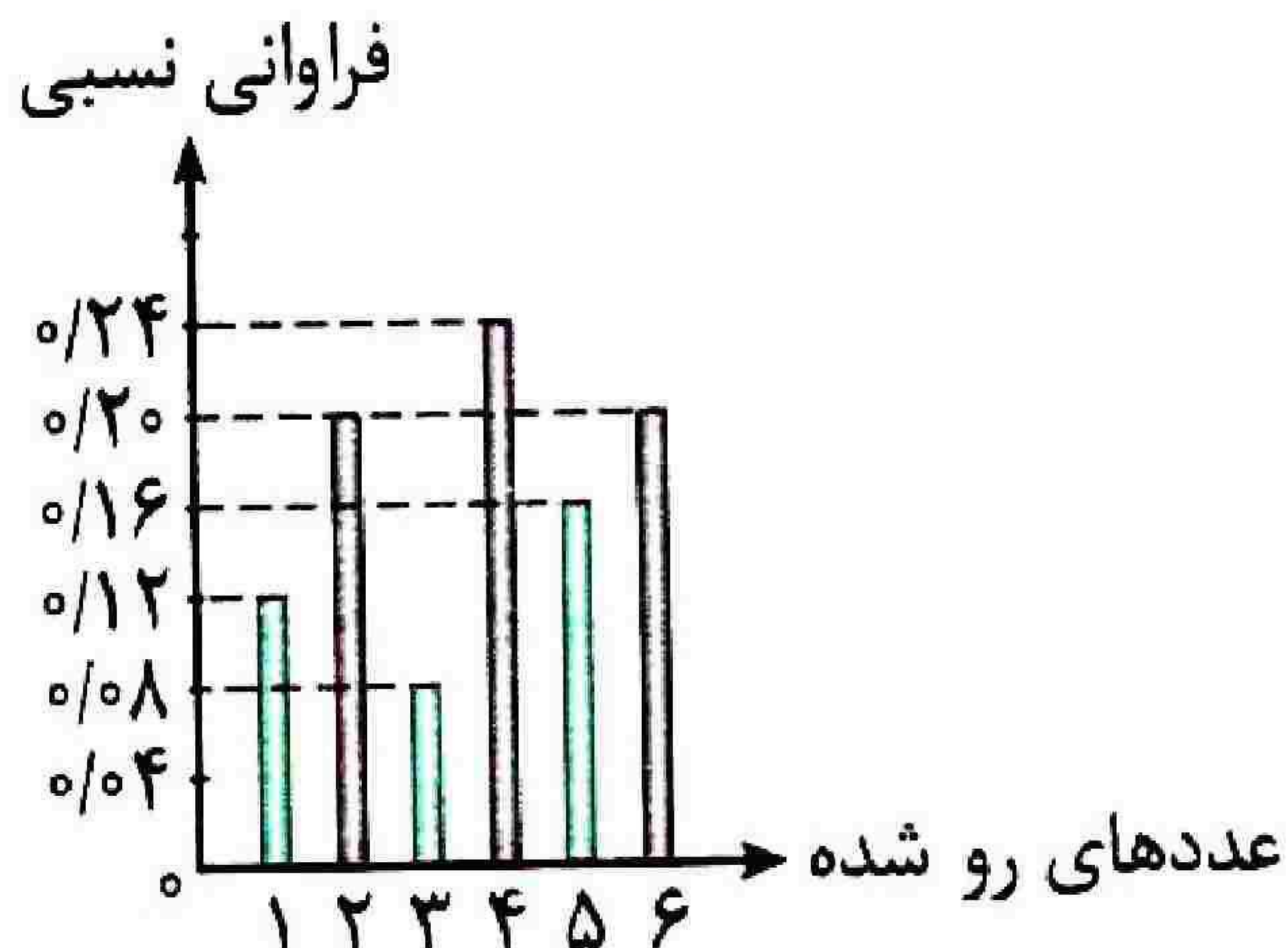
عدد رو شده	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۳	۵	۲	۶	۴	۵

یک تاس است. نمودار میله‌ای را برای فراوانی داده‌ها

رسم کنید.



مثال: نمودار میله‌ای را برای فراوانی نسبی داده‌های مثال قبل رسم کنید.



عدد رو شده	فراوانی	فراوانی نسبی
۱	۳	$\frac{3}{25} = 0.12$
۲	۵	$\frac{5}{25} = 0.20$
۳	۲	$\frac{2}{25} = 0.08$
۴	۶	$\frac{6}{25} = 0.24$
۵	۴	$\frac{4}{25} = 0.16$
۶	۵	$\frac{5}{25} = 0.20$

2) نمودار دایره‌ای:

برای متغیرها کمی گسسته و کیفی از نمودار دایره‌ای استفاده می‌شود.

برای رسم نمودار دایره‌ای، ابتدا زاویه قطاع مربوط به هر داده را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$۳۶۰ \times \text{فراوانی نسبی داده} = \text{زاویه قطاع مربوط به هر داده}$$

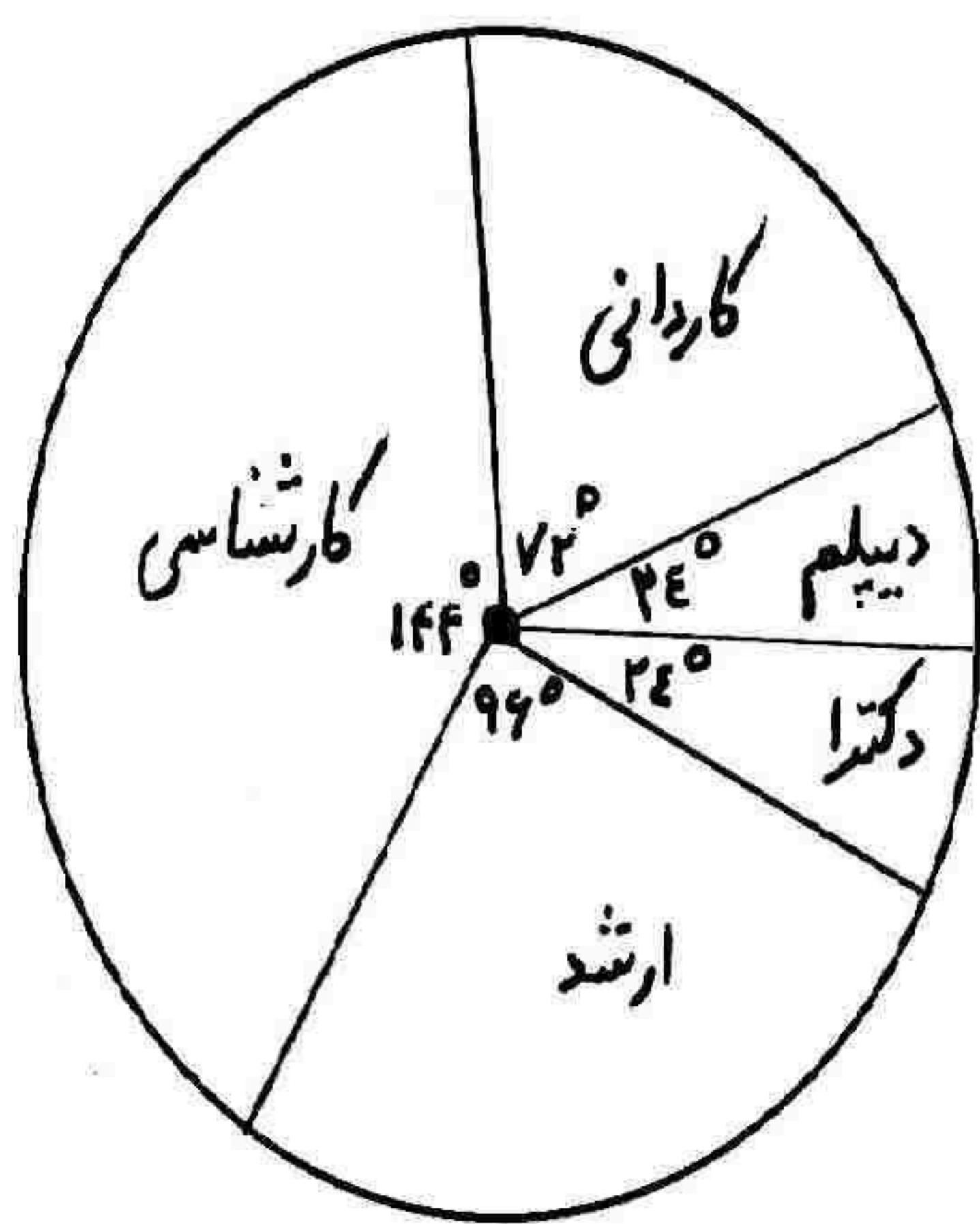
سپس دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم کرده و قطاع‌های روی آن چنان جدا می‌کنیم که اندازه زاویه مرکزی هر قطاع مربوط به هر داده‌ها باشد.

مثال: در یک شرکت دارویی جدول

نوع مدرک	دبیر	کارشناس	دکتر	ارشد
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰

توزیع کارکنان به صورت روبرو است.

نمودار دایره‌ای آن را رسم کنید.



نوع مدرک	تعداد	فراوانی نسبی	زاویه مرکزی قطاع
دبیر	۳۰	$\frac{۳۰}{۴۵۰}$	$\frac{۳۰}{۴۵۰} \times ۳۶۰ = ۲۴^\circ$
کارشناس	۹۰	$\frac{۹۰}{۴۵۰}$	$\frac{۹۰}{۴۵۰} \times ۳۶۰ = ۷۲^\circ$
کارشناسی	۱۸۰	$\frac{۱۸۰}{۴۵۰}$	$\frac{۱۸۰}{۴۵۰} \times ۳۶۰ = ۱۴۴^\circ$
ارشد	۱۲۰	$\frac{۱۲۰}{۴۵۰}$	$\frac{۱۲۰}{۴۵۰} \times ۳۶۰ = ۹۶^\circ$
دکتر	۳۰	$\frac{۳۰}{۴۵۰}$	$\frac{۳۰}{۴۵۰} \times ۳۶۰ = ۲۴^\circ$

مثال: جدول زیر، زاویه مرکزی داده آماری در نمودار دایره‌ای است. فراوانی دسته سوم چقدر است؟

داده	A	B	C	D	E
زاویه مرکزی	۷۷°	۴۵°	x°	۹°	۸°

باید مجموع زوایای مرکزی برابر ۳۶۰ باشد، بنابراین:

$$۷۷^\circ + ۴۵^\circ + x^\circ + ۹^\circ + ۸^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x^\circ = ۶۸^\circ \xrightarrow{\div ۳۶^\circ} \text{فراوانی نسبی دسته C} = \frac{۶۸}{۳۶} = \frac{۱۷}{۹}$$

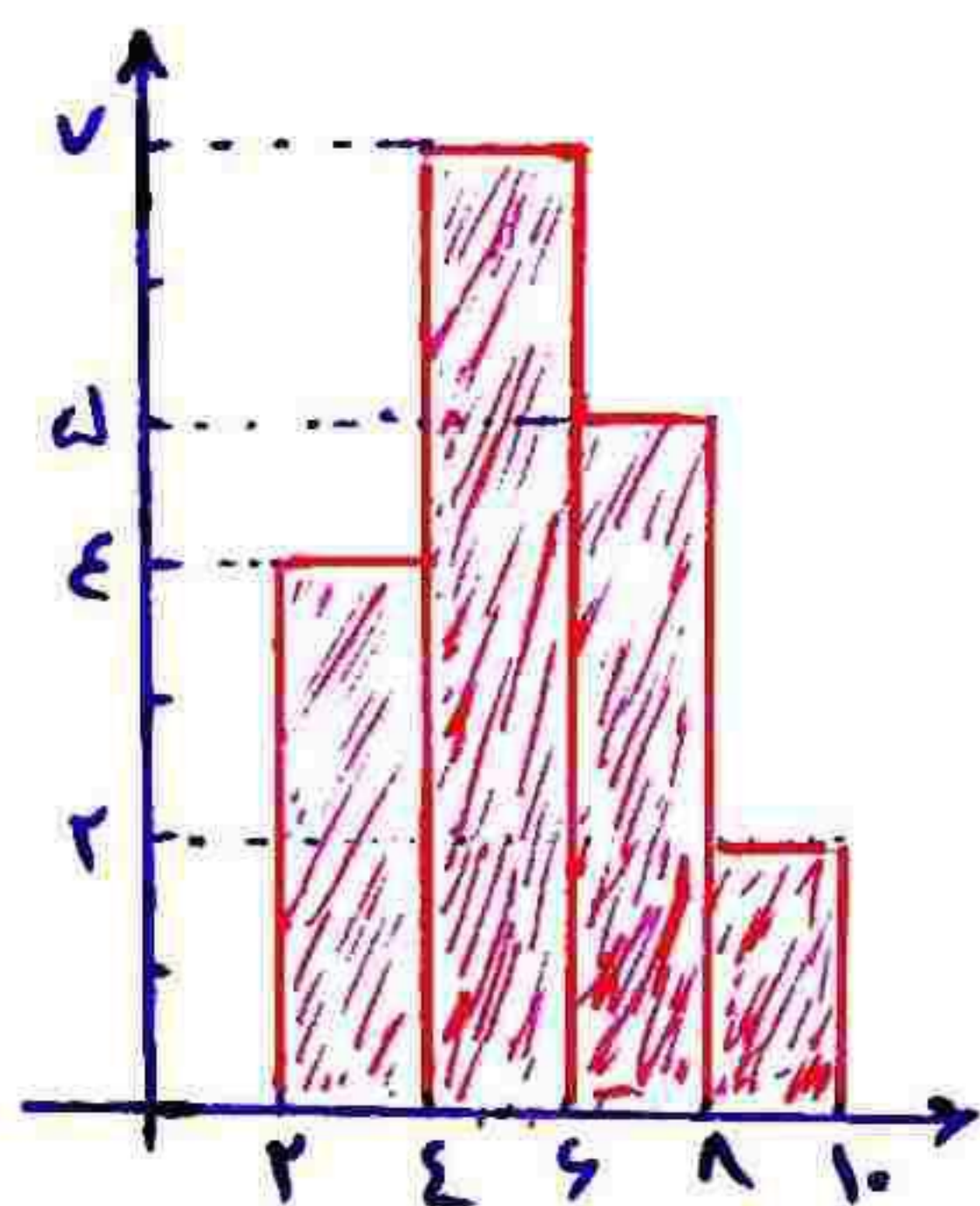
از طرفی: $\text{فراوانی نسبی C} = \frac{\text{فراوانی C}}{\text{مجموع کل داده‌ها}} \Leftarrow \frac{۱۷}{۹} = \frac{\text{فراوانی C}}{۹۰} \Leftarrow \text{فراوانی دسته C برابر ۱۷ است.}$

3 نمودار بافت نداشت (نمودار مستطیلی):

این نمودار برای متغیرهای کمی پیوسته مناسب است. در این نمودار مستطیل هایی رسم می کنیم که قاعده آن ها روی محور افقی به اندازه طول هر یک از دسته ها است و ارتفاع آن ها به موازات محور عمودی و متناسب با فراوانی یا فراوانی نسبی هر یک از دسته ها می باشد.

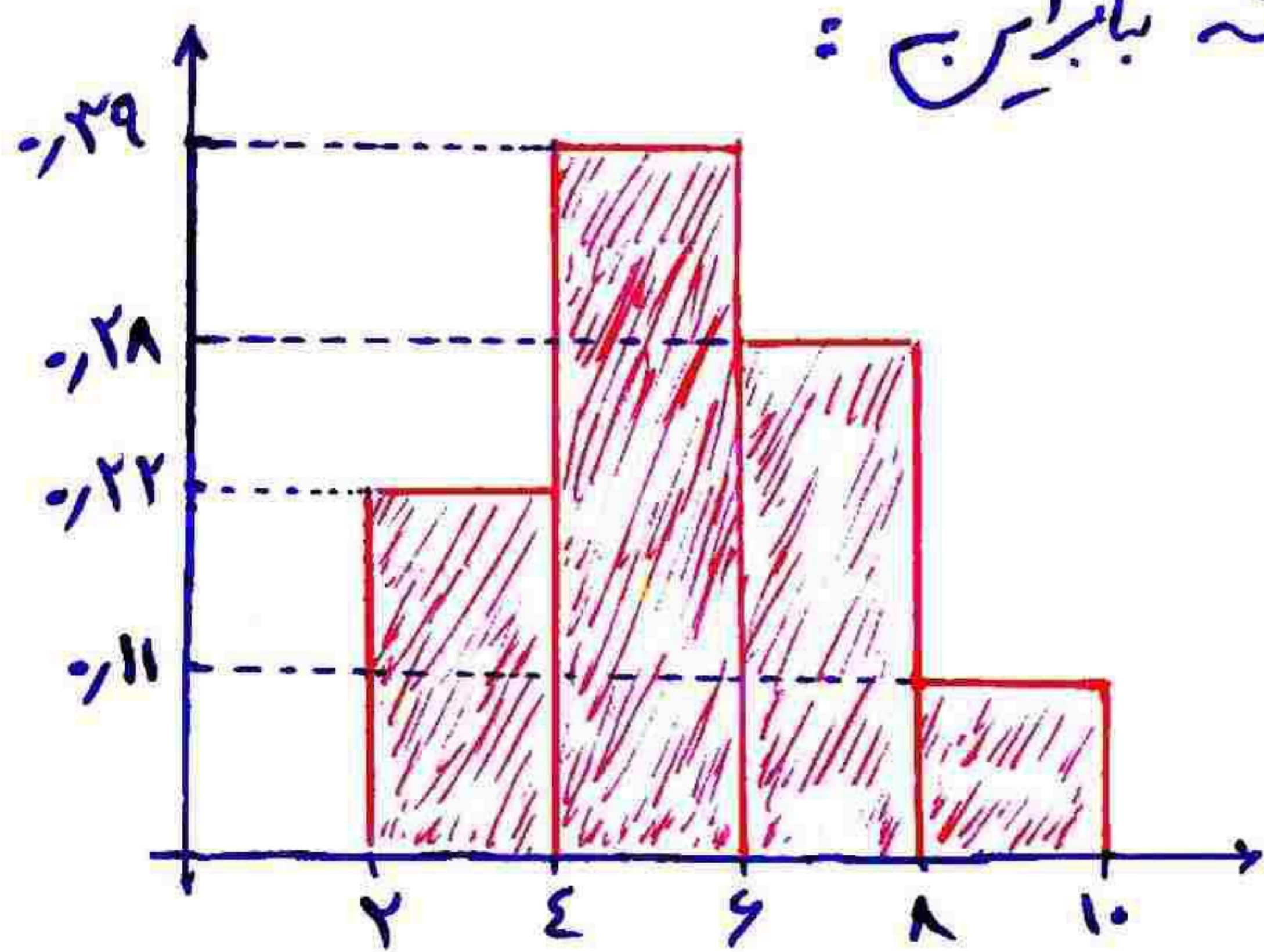
سوال: نمودار بافت نداشت مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی جدول فراوانی زیر را رسم کنید.

دسته ها	۲-۴	۴-۶	۶-۸	۸-۱۰
فراوانی	۴	۷	۵	۲

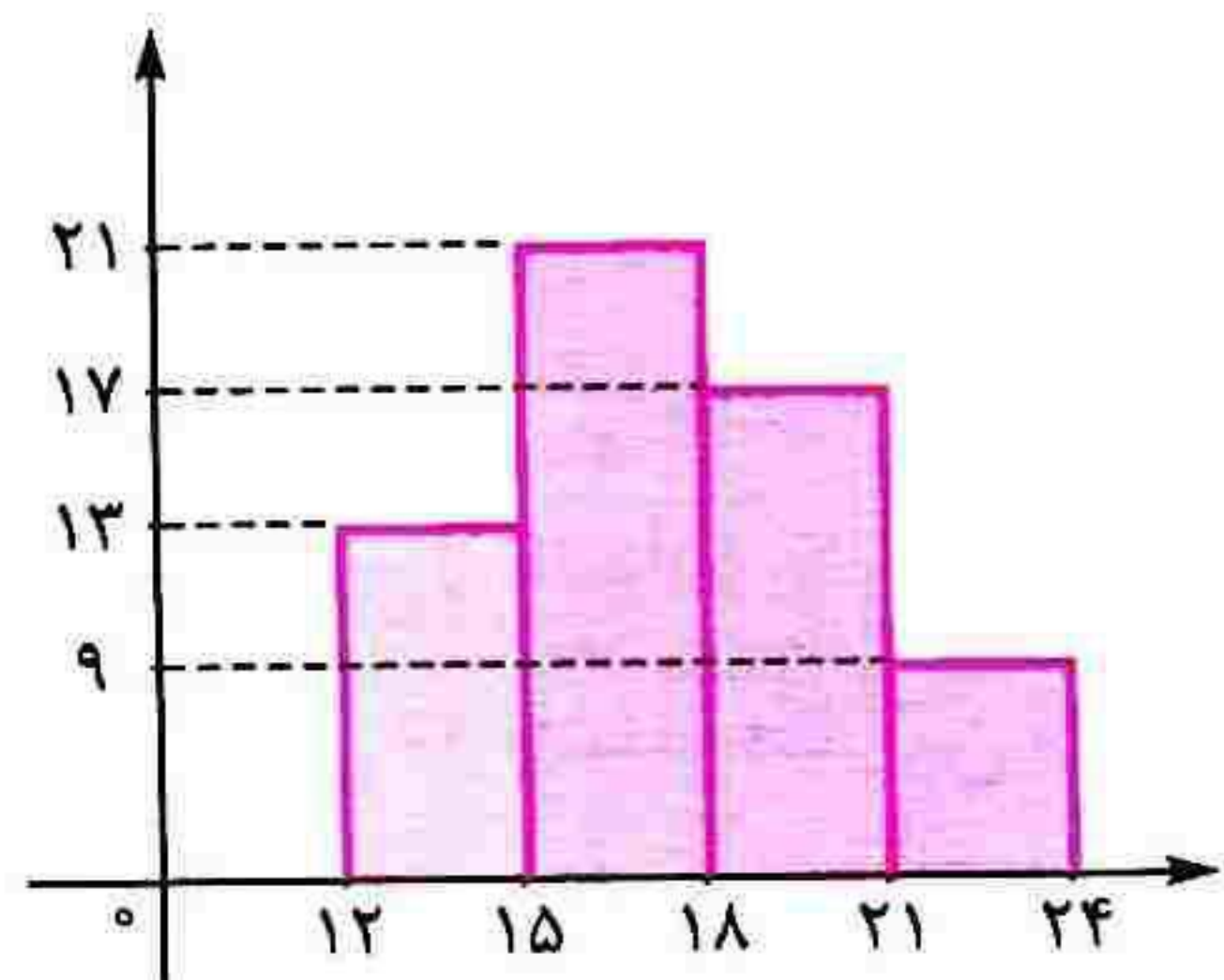


برای رسم نمودار بافت نداشت مربوط به فراوانی نسبی، ابتدا باید فراوانی نسبی دسته ها را بدست آوریم.

تعداد کل داده ها $4 + 7 + 5 + 2 = 18$ می باشد.



فراوانی نسبی	فراوانی	حدود دسته ها
$\frac{4}{18} \approx 0.22$	۴	۲-۴
$\frac{7}{18} \approx 0.39$	۷	۴-۶
$\frac{5}{18} \approx 0.28$	۵	۶-۸
$\frac{2}{18} \approx 0.11$	۲	۸-۱۰



سوال: از داده های آماری با نمودار بافت نداشت مقابل سه داده ۱۴، ۱۶، ۱۶ و حذف

شده است. در نمودار دایره ای داده های جدید بزرگترین زاویه مرکزی چند درجه است؟

دسته ها	۱۲-۱۵	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴
فراوانی	۱۳	۲۱	۱۷	۹

طبق نمودار بافت نداشت، جدول فراوانی به صورت روبروست:

با حذف داده ۱۴ از دسته اول و ۱۶ ها از دسته دوم، جدول فراوانی به شکل زیر تغییر می کند:

دسته‌ها	۱۲-۱۵	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴
فراوانی	۱۲	۱۹	۱۷	۹

بزرگترین زاویه مرکزی مربوط به دسته‌ایست که بیشترین فراوانی را دارد، یعنی دسته‌ی دوم، بنابراین:

$$\text{زاویه مرکزی} = \text{فراوانی نسبی} \times ۳۶۰^\circ = \frac{۱۹}{۱۲+۱۹+۱۷+۹} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

*** حل چند نمونه سوال ***

۱- گروه خونی O که دانش آموز پایه یازدهم به صورت زیر گردآوری شده است.

O	O	A	A	O	B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB	O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A	O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A	O	B	A	A	O
O	O	O	A	O	O	A	O	A	O

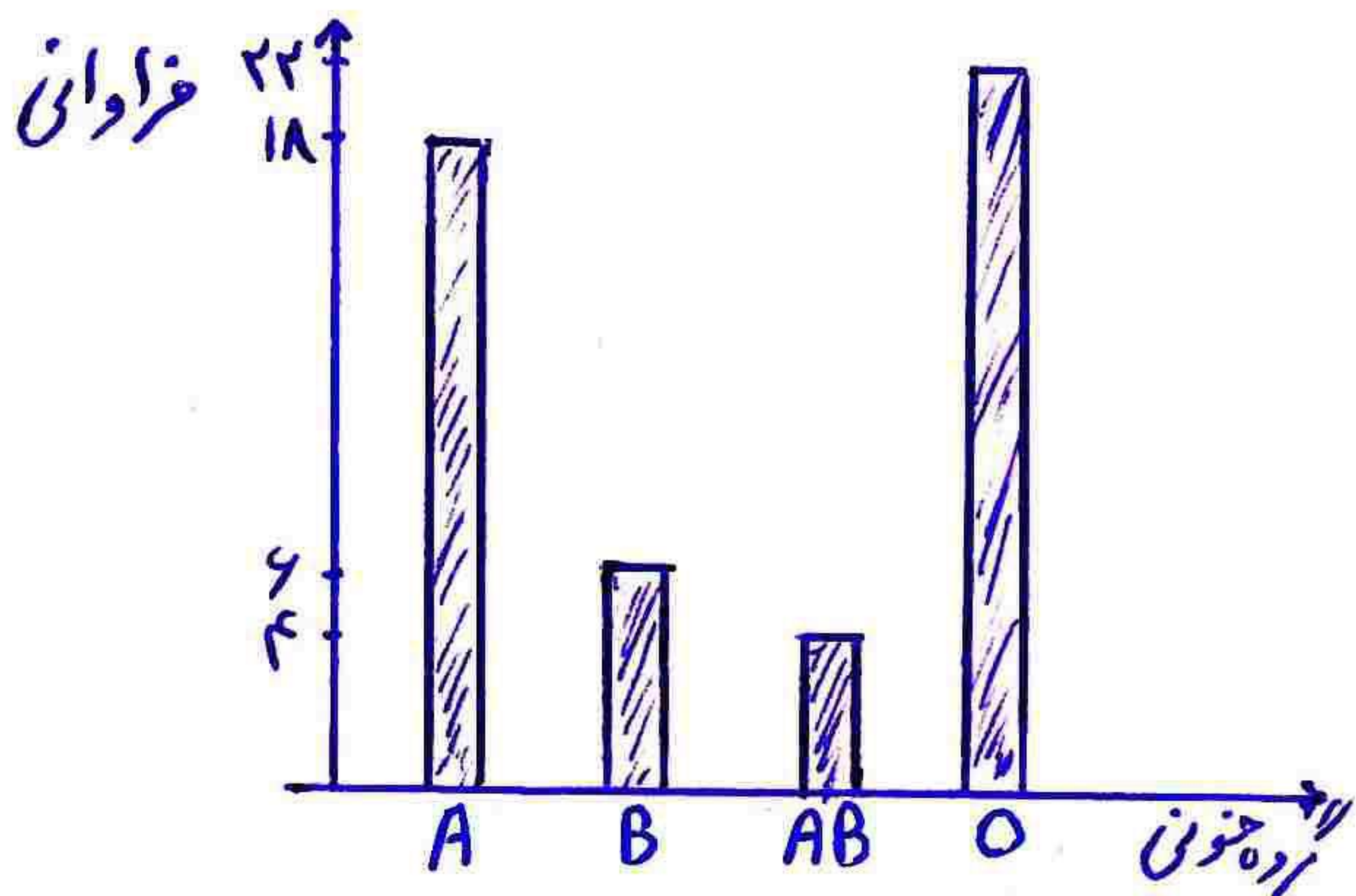
الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را

رسم کنید.

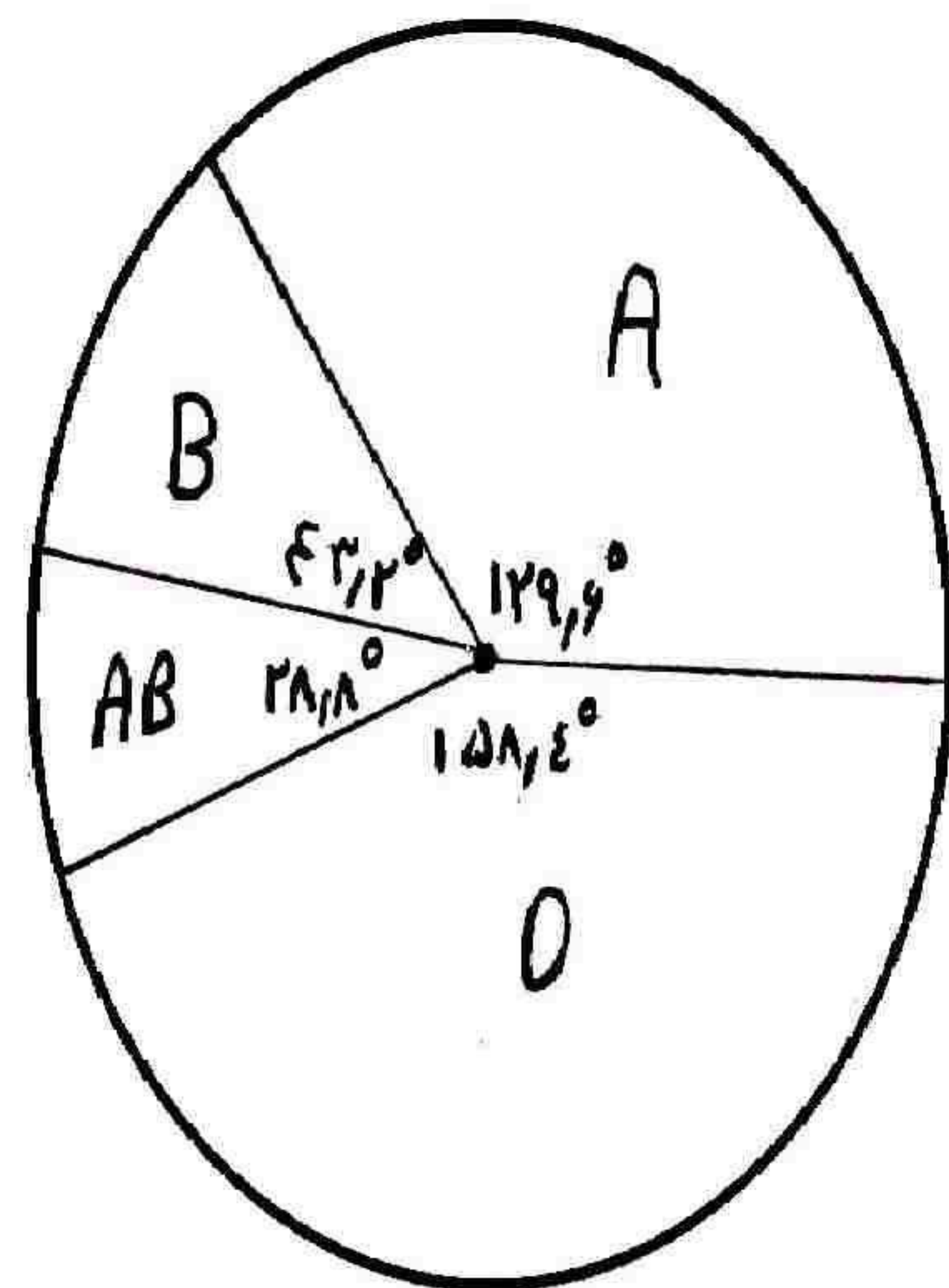
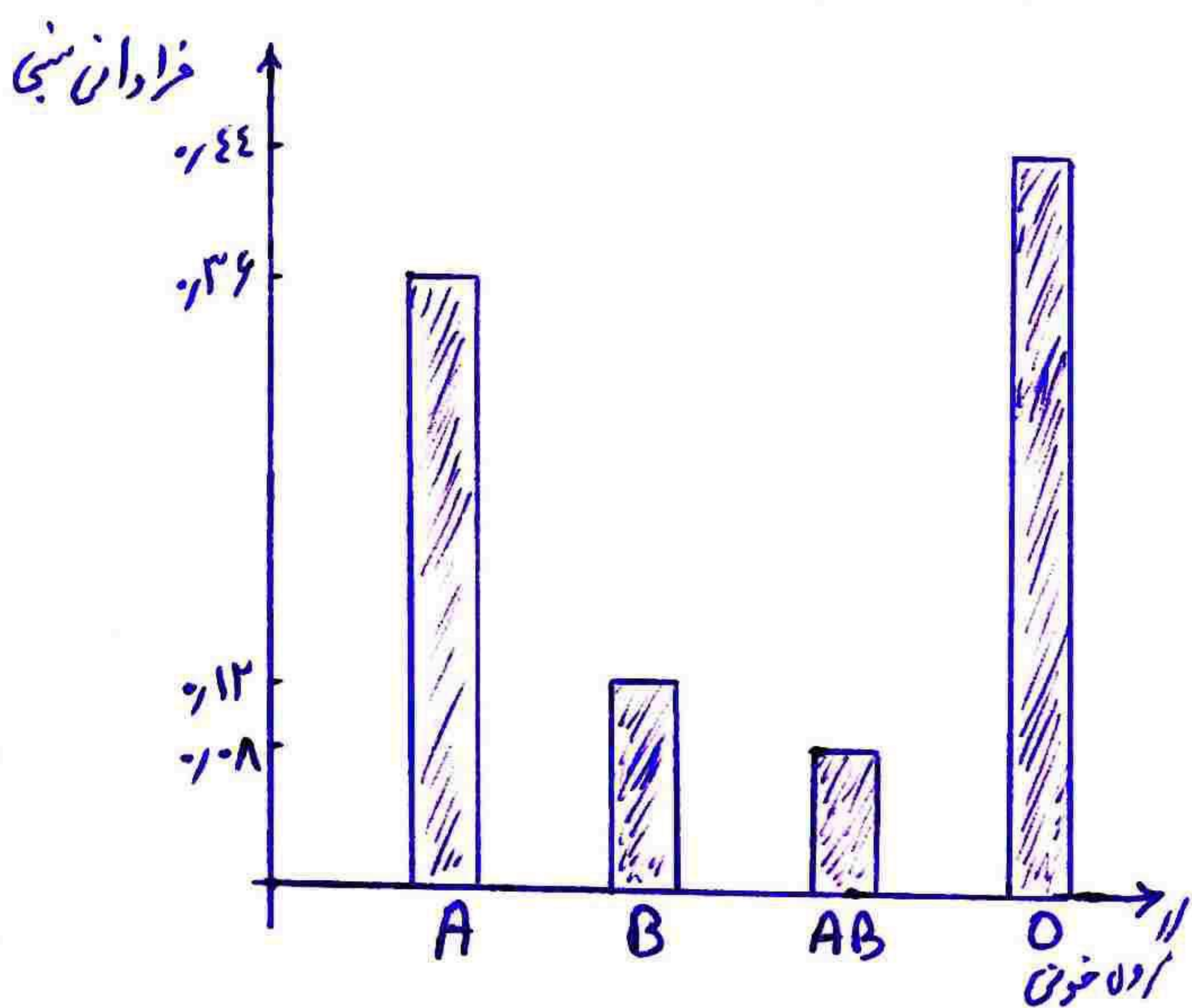
ب) نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی را

رسم کنید.

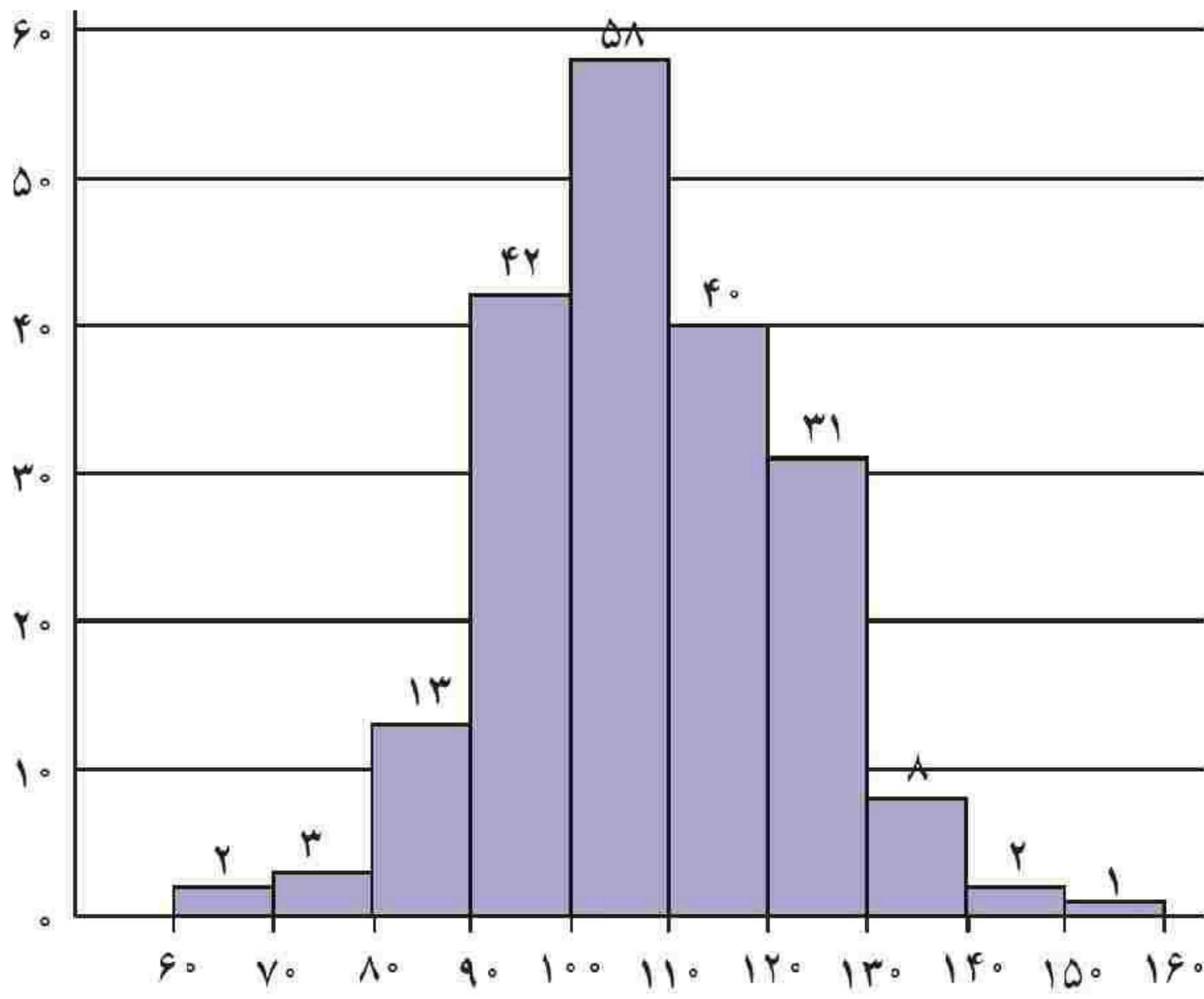
ت) چند درصد افراد دارای گروه خونی O هستند؟



گروه خونی	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد فراوانی نسبی	زاویه مرکزی
A	18	$\frac{18}{50} = 0.۳۶$	۳۶	$\frac{18}{50} \times ۳۶۰^\circ = ۱۲۹.۶^\circ$
B	6	$\frac{6}{50} = 0.۱۲$	۱۲	$\frac{6}{50} \times ۳۶۰^\circ = ۴۳.۲^\circ$
AB	4	$\frac{4}{50} = 0.۰۸$	۸	$\frac{4}{50} \times ۳۶۰^\circ = ۲۸.۸^\circ$
O	22	$\frac{22}{50} = 0.۴۴$	۴۴	$\frac{22}{50} \times ۳۶۰^\circ = ۱۵۸.۴^\circ$



ت) ۴۴ درصد افراد دارای گروه خونی O هستند.



۲- نمودار بافت نداشت نمرات IQ کودکان یک مهدکودک به صورت روبرو است. با توجه به این نمودار، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) تعداد کل کودکان که نمره IQ آنها مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

$$2 + 3 + 13 + 42 + 58 + 40 + 31 + 8 + 2 + 1 = 200$$

ب) نمره IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

در رده ۱۰۰-۱۱۰ بیشترین و در رده ۱۴۰-۱۵۰ کمترین فراوانی وجود دارد.

پس چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

$$\text{درصد فراوانی} = \frac{\text{فراوانی}}{\text{تعداد کل}} \times 100 = \frac{3}{200} \times 100 = 1,5 \Rightarrow 1,5 \text{ درصد}$$

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید.

رده های IQ	فراوانی	فراوانی نسبی
۶۰-۷۰	۲	$\frac{2}{200} = 0,01$
۷۰-۸۰	۳	$\frac{3}{200} = 0,015$
۸۰-۹۰	۱۳	$\frac{13}{200} = 0,065$
۹۰-۱۰۰	۴۲	$\frac{42}{200} = 0,21$
۱۰۰-۱۱۰	۵۸	$\frac{58}{200} = 0,29$
۱۱۰-۱۲۰	۴۰	$\frac{40}{200} = 0,20$
۱۲۰-۱۳۰	۳۱	$\frac{31}{200} = 0,155$
۱۳۰-۱۴۰	۸	$\frac{8}{200} = 0,04$
۱۴۰-۱۵۰	۲	$\frac{2}{200} = 0,01$
۱۵۰-۱۶۰	۱	$\frac{1}{200} = 0,005$
مجموع کل	۲۰۰	۱

ملا سعیدی @sinxcosx
 سایت: www.sinxcosx.ir
 09168324500

۳- هستاد داده آماری در ۷ طبقه دسته بندی شده اند. اگر با داده جدید به این جدول افزوده شود، فراوانی نسبی دسته

وسط تغییر نکند. نسبت افزایش داده ها دسته مذکور به فراوانی قبلی آن کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

اگر فراوانی دسته وسط f باشد، آنگاه فراوانی نسبی آن $\frac{f}{n}$ است.

فرض کنیم از ۱۰ داده جدید اضافه شد، n نامی آنجا در دسته وسط قرار گیرد، در این صورت فراوانی دسته وسط $f+n$ و تعداد کل داده ها $100 + 20 = 120$ خواهد شد، در نتیجه فراوانی نسبی دسته وسط $\frac{f+n}{120}$ است.

طبق فرض فراوانی نسبی تغییر نکند، پس:

$$\frac{f+n}{120} = \frac{f}{n} \Rightarrow 12f + 12n = 10f \Rightarrow f = 2n$$

بنابراین نسبت افزایش داده های دسته وسط به فراوانی قبلی آن برابر است با:

$$\frac{n}{f} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

۴- در دسته بندی ۱۲۰ داده آماری در ۹ طبقه، دسته‌ی اول به صورت (۲۲، ۲۵] می‌باشد. می‌دانیم که در صد داده‌ها کمتر از ۳۴ و فراوان نسبی دسته وسط ۲٪ است. تعداد داده‌ها کمتر از ۳۷ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

با توجه به دسته‌ی اول که به صورت ۲۲-۲۵ می‌باشد، طول دسته‌ها برابر ۳ است و لذا ۹ دسته به صورت زیر خواهند بود:

۲۲-۲۵ و ۲۵-۲۸ و ۲۸-۳۱ و ۳۱-۳۴ و ۳۴-۳۷ و ۳۷-۴۰ و ۴۰-۴۳ و ۴۳-۴۷ و ۴۷-۵۰
دسته وسط

فراوان نسبی دسته وسط ۲٪ است، پس ۲۰ درصد داده‌ها در دسته‌ی وسط قرار دارند، از طرفی ۴۵ درصد آنها در چهار دسته نخست واقعند پس ۶۵ درصد داده کمتر از ۳۷ هستند. بنابراین $۷۸ = ۱۲۰ \times \frac{۶۵}{۱۰۰}$ داده کمتر از ۳۷ می‌باشد.

۵- شرکتی ۱۶۰ کارمند دارد که مدرک تحصیلی آنان با α یک معیار مشخص شده‌اند. در نمودار دایره‌ای، زاویه مرکزی

مرکزی هر گروه با واحد درجه مطابق جدول روبه‌رو است.

گروه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
زاویه مرکزی	۲۷°	۴۵°	۹۹°	α°	۵۴°	۱۸°

تعداد کارکنان با α چند نفر است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۰)

مجموع زوایا باید ۳۶۰ شود بنابراین: $۲۷ + ۴۵ + ۹۹ + \alpha + ۵۴ + ۱۸ = ۳۶۰ \Rightarrow \alpha = ۱۱۷$

$۵۲ = \frac{۱۱۷}{۳۶۰} \times ۱۶۰ = \frac{۱۱۷}{۳۶۰} \times ۱۶۰ \Rightarrow$ فراوان نسبی = $\frac{۱۱۷}{۳۶۰}$

۶- جدول فراوانی روبه‌رو مربوط به وزن ۸۰ و وزنی سراسری است. این جدول را کامل کنید.

فراوانی نسبی	فراوانی	وزن افراد
?	۵	۵۰-۶۰
$\frac{۱}{۲۵}$?	۶۰-۷۰
?	?	۷۰-۸۰
?	۵	۸۰-۹۰
?	۱۵	۹۰-۱۰۰

فراوانی نسبی	فراوانی	وزن افراد
$\frac{۵}{۸۰} = ۰٫۰۶۲۵$	۵	۵۰-۶۰
$\frac{۱}{۲۵}$	$۰٫۰۶۲۵ \times ۸۰ = ۵$	۶۰-۷۰
$\frac{۵۵}{۸۰} = ۰٫۶۸۷۵$	$۸۰ - ۵ - ۵ - ۱۵ = ۵۵$	۷۰-۸۰
$\frac{۵}{۸۰} = ۰٫۰۶۲۵$	۵	۸۰-۹۰
$\frac{۱۵}{۸۰} = ۰٫۱۸۷۵$	۱۵	۹۰-۱۰۰