



# فصل ۱

## آشنایی با منطق

و

استدلال ریاضی



منطق در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال ها تعبیر می کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال هاست. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می شود.

تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعبیر می توان ادعا کرد که منطق دانان و افرادی که با منطق مانوس ترند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال ها اشتباه می کنند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شما را با منطق ریاضی که شاخه ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی گونه منطق می پردازد، آشنا کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

به هر جمله خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت بدهیم، یک گزاره گفته می شود.

**تمرین ۱:** کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر یک را تعیین کنید.

(الف) شما چند سال دارید؟ گزاره نیست. (ب) عدد ۲ عددی اول است. گزاره درست

(پ) عدد  $\sqrt{2}$  عددی گویا است. (ت) افلاطون شاگرد ارسطو است.

(ث)  $2 + 3 \times 4 = 20$

(ج) عدد  $(-1)^n$  عددی همواره مثبت است. ( $n \in \mathbb{N}$ )

(چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش مزه تر است.

(ح) لطفاً تخته را پاک کن.



اگر یک گزاره چنان تغییر کند که ارزش آن تغییر کند، گویند **نقیض گزاره** نوشته شده است.  
 نقیض یک گزاره درست، گزاره ای نادرست و نقیض یک گزاره نادرست، گزاره ای درست باشد.  
 در واقع ارزش نقیض یک گزاره دقیقاً مخالف آن گزاره است.  
 برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم.

**مثال ۱:** نقیض گزاره «**۲ زوج نیست.**» می شود: «**۲ زوج است.**»

**مثال ۲:** نقیض گزاره « **$a$  مثبت است.**» می شود: « **$a$  مثبت نیست.**»

به جدول زیر توجه کنید:

$p$	$\sim p$
د	ن
ن	د



**تمرین ۴:** ارزش گزاره زیر را بنویسید و سپس گزاره نقیض آن را بنویسید.

«عدد  $\sqrt{2}$  عددی گنگ است.»

**حل:** این گزاره درست است و هر یک از گزاره های زیر نقیض آن محسوب می شوند.

«عدد  $\sqrt{2}$  عددی گنگ نیست.»      «عدد  $\sqrt{2}$  عددی گویا است.»      «پنین نیست که عدد  $\sqrt{2}$  عددی گنگ است.»



**تمرین ۵:** در هر یک از حالت های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

**الف)** عدد ۵ عددی زوج است.

**ب)** تساوی « $4 = 2 \times 2$ » برقرار است.

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچکتر است.

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد.

ج)  $(5 \times 4) > (3 \times 7)$

## ترکیب گزاره ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره ها، به صورت های متفاوتی می توان گزاره های ساده را با هم ترکیب و گزاره های مرکب تولید کرد. در این کتاب، گزاره ها توسط رابط «و»، «یا»، «شرطی»، «دوشرطی» انجام می شود. هر گزاره مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزاره ساده تولید می شود، خودش یک گزاره است و باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم.

مثال ۱: « ۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است.»

مثال ۲: « ۱۲۱ مضرب ۱۲ یا مثبت  $\sqrt{3}$  است.»

مثال ۳: « اگر من مسلمان باشم، آنگاه نبوت حضرت رسول اکرم  $(\text{صلی الله علیه و آله})$  را قبول دارم.»

مثال ۴: «  $n$  عددی زوج است اگر و تنها اگر  $n^2$  عددی زوج باشد.»

ارزش گزاره های ترکیبی به ارزش گزاره های ساده تشکیل دهنده آنها و نوع رابط به کار رفته بین آنها بستگی دارد.

نکته

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند  $p$  و  $q$  را با لفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد « $\wedge$ » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را **ترکیب عطفی** دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم: « $p \wedge q$ »؛ و آن را به صورت « $p$  و  $q$ » می‌خوانیم.

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول روبرو تعیین می‌شود:

$p$	$q$	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

**مثال ۱:** «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است.»

**مثال ۲:** «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است.»



ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش **درست** است که هر دو گزاره درست باشند و در غیر این صورت

**نادرست** است.



**تمرین ۶:** در جدول زیر رو به روی گزاره‌های داده شده ارزش آنها را با علامت مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد.		
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره‌های آن با بسم الله شروع می‌شود.		
۳	..... و ۸ زوج است.	✓	
۴	..... و ۱۱۴ سوره دارد		✓
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		
۶	..... و $5 > 2$	✓	

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند  $p$  و  $q$  را با لفظ «یا» ترکیب کنیم، از نماد « $\vee$ » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم: « $p \vee q$ »؛ و آن را به صورت « $p$  یا  $q$ » می‌خوانیم.

مثال ۱: « $\sqrt{3}$  عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اول نیست.»

مثال ۲: «آن حیوان، پرنده است یا مهره دار است.»

ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول رو به رو تعیین می‌شود:

$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش **نادرست** است که هر دو گزاره نادرست باشند و در غیر این صورت



**درست** است.



تمرین ۷: جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است.		
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا .....	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا .....	✓	
۴	یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است. ....		✓
۵	یا .....	✓	

هرگاه بخواهیم از گزاره مانند  $p$  گزاره مانند  $q$  را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Rightarrow$ » استفاده می‌کنیم و آن را **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم: « $p \Rightarrow q$ ».

در گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ »  $p$  را **مقدم** و  $q$  را **تالی** می‌نامیم.

$p \Rightarrow q$  را به صورت های زیر می‌خوانیم:

- «اگر  $p$  آنگاه  $q$ »
- « $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را»
- « $q$  از  $p$  نتیجه می‌شود»

**مثال ۱:** «اگر دو عدد فرد باشند **آنگاه** مجموع آن دو عدد زوج است.»

**مثال ۲:** «اگر چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد **آنگاه** قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند.»

ارزش گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  با توجه به جدول رو به رو تعیین می‌گردد:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ارزش گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  فقط وقتی **نادرست** است که مقدم (یعنی  $p$ ) درست و تالی (یعنی  $q$ ) نادرست باشد و در غیر این صورت **درست** است.

وقتی ارزش مقدم ( $p$ ) **نادرست** باشد، درست و نادرست بودن تالی ( $q$ ) تأثیری در ارزش گزاره « $p \Rightarrow q$ » ندارد. در این صورت می‌گوییم **به انتهای مقدم** ارزش گزاره « $p \Rightarrow q$ » **درست** است.

**مثال ۱:** «اگر  $۳^۲ = ۶$  آنگاه ۵ عدد اول است.» ارزش این گزاره به انتهای مقدم درست است.



مثال ۲: « اگر ۸ عدد فرد است آنگاه  $4 > 2$  ». ارزش این گزاره به انتفای مقدم درست است.

مثال ۳: « اگر  $4^2 = 2^4$  آنگاه  $2^3 > 3^2$  ». ارزش این گزاره درست است.

تمرین ۸: جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است. آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است. آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است. آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر .....		✓
۵	اگر .....	✓	
۶	اگر ۷ فرد است. آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر ..... آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

تمرین ۹: اگر گزاره ای درست و  $q$  گزاره ای نادرست و  $r$  گزاره ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

الف)  $(q \Rightarrow p) \wedge r$

$q$	$p$	$q \Rightarrow p$	$r$	$(q \Rightarrow p) \wedge r$
ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	ن

حل:



ب)  $(p \vee q) \vee r$

$p$	$q$	$p \vee q$	$r$	$(q \Rightarrow p) \wedge r$
د	ن	د	د	د
د	ن	د	ن	د

روش دوم

$(p \vee q) \vee r$

حل: روش اول ؟ ن د  
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_d$   
 د

پ)  $(p \Rightarrow q) \wedge r$

$q$	$p$	$p \Rightarrow q$	$r$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$
ن	د			
ن	د			

حل:

ریاضی و آمار ۲

ت)  $(r \Rightarrow p) \vee q$

حل:



ث)  $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$

حل:



ج)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

حل:

ج)  $(p \wedge q) \Rightarrow r$

حل:




## ۴ ترکیب دو شرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره مانند  $p$  گزاره مانند  $q$  را نتیجه بگیریم و نیز از گزاره مانند  $q$  گزاره مانند  $p$  را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Leftrightarrow$ » استفاده می‌کنیم و آن را **ترکیب دو شرطی** دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم: « $p \Leftrightarrow q$ ».

در واقع گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » است.

$p \Leftrightarrow q$  را به صورت های زیر می‌خوانیم:

- « اگر  $p$  آنگاه  $q$  و اگر  $q$  آنگاه  $p$  »
- «  $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را و  $q$  نتیجه می‌دهد  $p$  را »
- « اگر  $p$  آنگاه  $q$  و برعکس »
- «  $p$  شرط لازم و کافی است برای  $q$  نتیجه می‌شود »
- «  $p$  اگر و تنها اگر  $q$  »

مثال ۱: « ۹۹ عددی اول نیست **اگر و تنها اگر** ۱۱ عددی اول باشد. »

مثال ۲: « **اگر** عددی بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد **آنگاه** آن عدد ۶ بر بخش پذیر است و برعکس »

ارزش گزاره شرطی  $p \Leftrightarrow q$  با توجه به جدول زیر تعیین می گردد:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د



ارزش گزاره دو شرطی  $p \Leftrightarrow q$  وقتی **درست** است که مقدم ( $p$ ) و تالی ( $q$ ) هر دو درست یا هر دو نادرست باشند و در غیر این صورت **فادرست** است.



تمرین ۱۰: جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	فادرست
۱	اگر ۲ فرد است. آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳	..... اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر ..... آنگاه ..... و برعکس		✓
۵	اگر چهارضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهارضلعی لوزی باشد.		
۶	اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده ها با یکدیگر برابرند و برعکس.		



اگر دو گزاره  $p$  و  $q$  هم ارزش باشند؛ یعنی  $p \equiv q$  (هر دو درست یا هر دو نادرست باشند).

تمرین ۱۱: اگر گزاره  $p$  گزاره ای درست و  $q$  گزاره ای نادرست و  $r$  گزاره ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

الف)  $(q \Leftrightarrow p) \wedge r$

$q$	$p$	$q \Leftrightarrow p$	$r$	$(q \Leftrightarrow p) \wedge r$
د	د	د	د	د
د	د	د	ن	ن

حل: روش اول ? روش دوم

$(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

د ن ن

ن

ب)  $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$

$p$	$\sim p$	$q$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$r$	$(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$
د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	ن	د

پ)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

$q$	$p$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
د	د			
د	د			

ت)  $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

ث)  $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$

حل:


ج)  $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$

حل:


ریاضی و آمار ۲

چ)  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

حل:


تمرین ۱۲: با استفاده از جدول ارزش ها درستی هر یک از هم ارزی های زیر را بررسی کنید:

الف)  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

حل:

$p$	$q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
>	>	ن	د	د
>	ن	ن	ن	
ن	>	>	د	د
ن	ن	>	د	

ب)  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

حل:

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
>	>	⊖	⊖	د	د
>	⊖	⊖	>	ن	ن
⊖	>	>	⊖	د	
⊖	⊖	>	>	د	

نکته گزاره  $\sim q \Rightarrow \sim p$  را عكس تقيض گزاره  $p \Rightarrow q$  مي ناميم.

پ)  $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

حل:

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
>	>	⊖	⊖		ن	
>	⊖	⊖		>		
⊖	>	>		>		ن
⊖	⊖	>			د	

نکته اين قانون با هم ارزي؛ يعني  $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$  و مشابه آن؛ يعني  $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$  به قوانين دمورگان معروف اند.

ت)  $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

حل:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
>	>	>	د
>	⊖	⊖	
⊖	>	⊖	ن
⊖	⊖	⊖	

ث)  $(p \vee \sim p) \equiv T$

حل:

$p$	$\sim p$	$p \vee \sim p$
د	ن	د
ن	د	د

ج)  $(p \wedge \sim p) \equiv F$

حل:

$p$	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

گزاره هایی نظیر  $(p \vee \sim p)$  را گزاره هایی همیشه **درست** و  $(p \wedge \sim p)$  را همیشه **نادرست** می نامیم.

نکته



تمرین ۱۲: با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید:  $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$



در درس گذشته با انواع گزاره ها و جدول ارزشی گزاره ها آشنا شدید. از طرفی در سال گذشته انواع استدلال های منطقی و قیاس ها را در کتاب منطق خود فرا گرفتید.

در این درس ابتدا به نحوه تبدیل گزاره های توصیفی به نمادهای ریاضی و سپس با استفاده از قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می پردازیم.

در اینجا منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم.

**تمرین ۱۳:** عبارت «ما و ما نصف ما و نیمه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جمگلی صد می شویم.» را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید و سپس آن را حل کنید.

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100 \quad \text{تعداد } x =$$

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100 \quad \Rightarrow \quad 4x + 4x + \frac{4}{2}x + \frac{4}{4}x + 4 = 400 \quad \Rightarrow$$

$$11x = 400 - 4 \quad \Rightarrow \quad 11x = 396 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{396}{11} \quad \Rightarrow \quad x = 36$$

**تمرین ۱۴:** به عبارت زیر که عیناً از کتاب خلاصه الحساب تألیف شیخ بهایی، انتخاب شده است، توجه کنید: «عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد.» را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید و سپس آن را حل کنید.

$$x \times \left(\frac{1}{2}x\right) + 12 = 5x \quad \text{عددی } x =$$

$$x \times \left(\frac{1}{2}x\right) + 12 = 5x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + 12 = 5x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-4)(x-6) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{array} \right.$$

تمرین ۱۵: عبارت «ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.» را به صورت نماد ریاضی بیان کنید.

حل: قیمت خرید آن کالا  $y =$  قیمت فروش آن کالا  $x =$

$$\text{سود} = x - y \Rightarrow \text{قیمت خرید آن کالا} - \text{قیمت فروش آن کالا} = \text{سود}$$

$$\frac{1}{100}x = x - y$$



تمرین ۱۶: عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

(ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

(پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگتر از خودش است.



تمرین ۱۷: عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

(ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

(پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگتر از خودش است.

## دلیل آوردن برای اثبات یک حکم را استدلال گویند.



یکی از انواع قیاس ها که در استدالات ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، «قیاس استثنایی» است.

در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را یادآوری می کنیم.

**مقدمه ۱:** اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

**مقدمه ۲:** امشب شب چهاردهم ماه باشد.

**نتیجه:** ماه کامل است.

استدلال بالا را می توان به طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد .

اگر الف آنگاه ب

الف

∴ ب

و یا با استفاده از نماد گذاری های درس قبل داریم:

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{p}{\quad}$$

$$\therefore q$$

**تمرین ۱۸:** در هر یک از استدلال های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

**الف)** اگر یاسمن کتاب داشته باشد، آن را می خواند.

دوست یاسمن، به او یک کتاب داده است.

**نتیجه:**

**ب)** تمام دانش آموزانی که ریاضی یاد می گیرند می توانند استدلال کنند.

حمید دانش آموزی است که ریاضی یاد می گیرد.

**نتیجه:**

گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می شود و منجر به نتیجه گیری نادرست می شود. به این گونه استدالات، مغالطه می گویند. در زیر مثالی از این نوع پرداخته شده است.

**مثال ۱:** اگر باران بیاید، زمین خیس می شود.

زمین خیس شده است.

-----

∴ باران باریده است.

در استدلال فوق طبق قیاس استثنایی، مقدمه دوم باید  $p$  باشد و نه  $q$ ، پس استدلال فوق نادرست است. (زمین می تواند به دلیل دیگری غیر از باریدن باران خیس شده باشد.)

-----

**تمرین ۱۹:** با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس استثنایی  $[p \Rightarrow q] \wedge p \Rightarrow q$  را نشان دهید.

حل:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

-----

**تمرین ۲۰:** در هر یک از استدلال های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

الف)  $p: 3 > 0 \Rightarrow 4 > 1$

$p: 3 > 0$

∴

خطوط  $L_1$  و  $L_2$  هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند:  $q \Rightarrow$  خطوط  $L_1$  و  $L_2$  موازی باشند:  $p$  (ب)

-----

خطوط  $L_1$  و  $L_2$  هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند ∴

تمرین ۲۱: آیا نتایج زیر از عبارت داده شده حاصل می شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف)  $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$

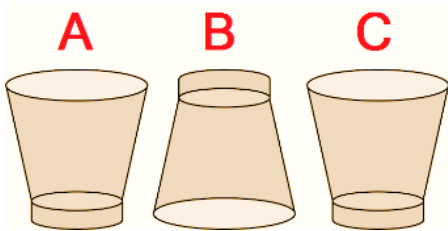
$$\frac{x^2 > 0}{\therefore x > 0}$$

ب) چهارضلعی لوزی است:  $q \Rightarrow$  چهارضلعی مربع است:  $p$

چهارضلعی لوزی است.

∴ چهارضلعی مربع است.

تمرین ۲۲: سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آنها وارونه است. می خواهیم همه آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند؛ ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم. سوال این است که آیا این کار امکان پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟ امتحان کنید!

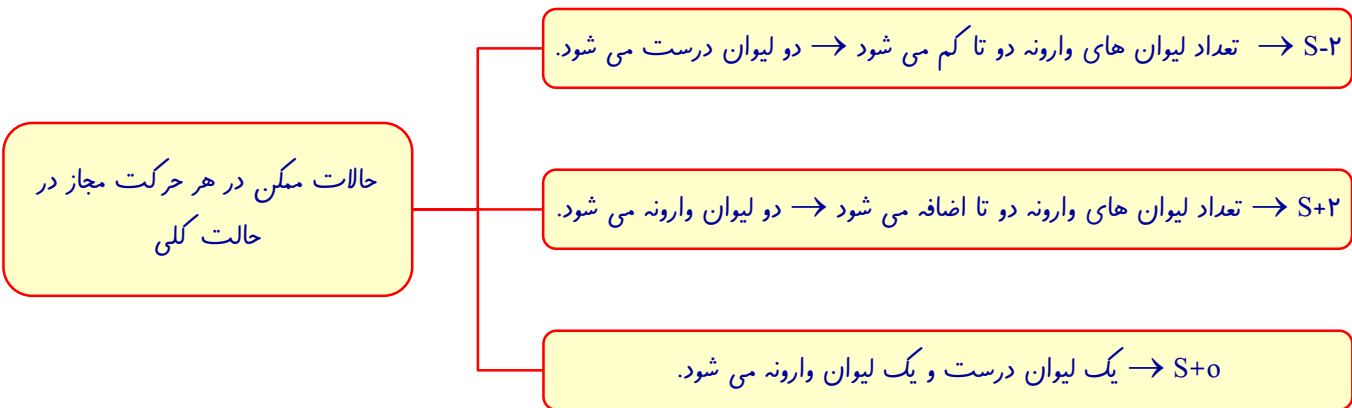


حل: تعداد لیوان های وارونه  $S =$

وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است):  $S = 1$

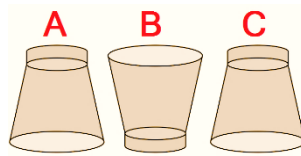
وضعیت مطلوب (یک لیوان وارونه است):  $S = 0$

حرکت مجاز: در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.



بنابراین  $S$  همیشه به اندازه عددی زوج (  $-2$  یا  $+2$  یا  $0$  ) تغییر می یابد و هرگز از  $1$  به  $0$  کاهش نمی یابد.

تمرین ۲۳: تمرین سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟

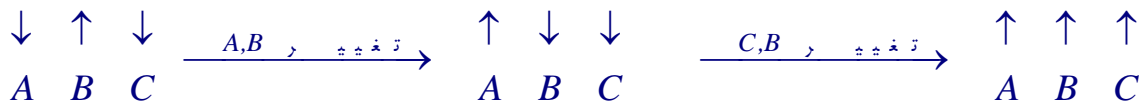


حل:

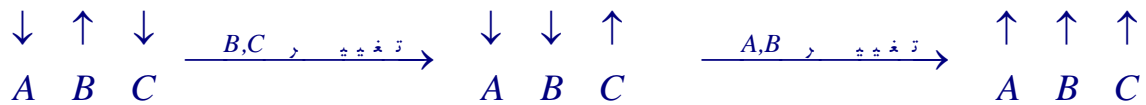
راه حل اول:



راه حل دوم:

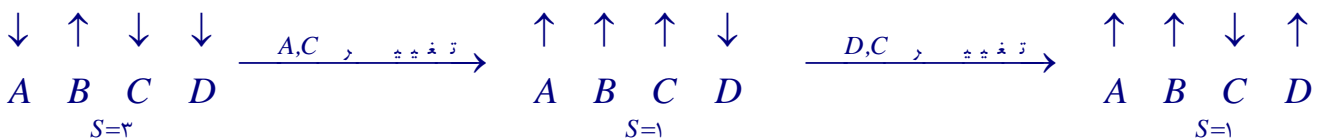


راه حل سوم:



تمرین ۲۴: تمرین سه لیوان را برای حالتی که بیش از لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟

حل:



هر بار با تغییر حالت دو لیوان مقدار  $S$  برابر ۱ باقی می ماند. مطلوب آن است که  $S=0$  شود. با این استدلال معلوم می شود که حالت  $S=0$  به دست نمی آید لذا مسئله جواب ندارد.

اگر بخواهیم ثابت کنیم گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » درست است و این کار دشوار باشد، به جای آن می توان « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » ثابت کرد درست است. در این حالت می گوئیم عکس نقیض گزاره اصلی را ثابت می کنیم.

**مثال:** ثابت کنید «اگر  $n^2$  زوج باشد آنگاه  $n$  زوج است.» ( $n \in \mathbb{Z}$ )

**اثبات:** عکس نقیض آن را ثابت می کنیم یعنی ثابت می کنیم «اگر  $n$  فرد باشد آنگاه  $n^2$  فرد است.» ( $n \in \mathbb{Z}$ )

فرد است  $n^2 \Rightarrow n^2 = 2m + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1 = 2m + 1 \Rightarrow n = 2k + 1$  فرد است  $n$

**تمرین ۲۵:** ثابت کنید «اگر  $x + y > 5$  آنگاه  $x > 2$  یا  $y > 3$ »

**اثبات:** عکس نقیض آن را ثابت می کنیم یعنی ثابت می کنیم «اگر  $x \leq 2$  یا  $y \leq 3$  آنگاه  $x + y \leq 5$  فرد است.»

به عبارت دیگر «اگر  $x \leq 2$  یا  $y \leq 3$  آنگاه  $x + y \leq 5$  فرد است.»

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x + y \leq 2 + 3 \Rightarrow x + y \leq 5$$

**تمرین ۲۶:** ثابت کنید «اگر  $xy = 0$  آنگاه  $x = 0$  یا  $y = 0$ »

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می شویم. یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم است. کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد.

**مثال:** دانش آموزی ادعا می کند که معادله  $x^2 - x = 0$  تنها یک ریشه دارد و آن  $x = 1$  است. استدلال او در زیر آمده است.

$$۱) x^2 - x = 0$$

$$۲) x(x-1) = 0 \quad \text{تجزیه معادله}$$

$$۳) \frac{x(x-1)}{x} = \frac{0}{x} \quad \text{تقسیم طرفین بر } x \text{ و ساده سازی}$$

$$۴) x-1 = 0 \quad \text{حاصل ساده سازی و تبدیل به معادله ساده تر}$$

$$۵) x = 1 \quad \text{جواب معادله}$$

**ایراد این استدلال:** در گام سوم اجازه تقسیم بر  $x$  وجود ندارد، چون  $x$  ممکن است صفر باشد و عبارت بی معنی می شود.



**تمرین ۲۷:** دانش آموزی گزاره « $a < b \Rightarrow ac < bc$ » را که  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی اند، به صورت زیر ثابت کرده است. ایراد این استدلال را پیدا کنید.

$$۱) a < b$$

$$۲) a + c < b + c \quad \text{طرفین را با } c \text{ جمع می کنیم.}$$

$$۳) c(a + c) < c(b + c) \quad \text{طرفین نامساوی قبل را در } c \text{ ضرب می کنیم.}$$

$$۴) ac + c^2 < bc + c^2 \quad \text{c را در پرانتزها ضرب می کنیم.}$$

$$۵) ac + \cancel{c^2} < bc + \cancel{c^2} \quad \text{چون } c^2 \text{ عددی همواره مثبت است، می توان آن را از طرفین کم کرد.}$$

$$۶) ac < bc$$



تمرین ۲۸ : سوال زیر در یک امتحان داده شده است.

$$\text{« اگر } a = \frac{a-d}{c-d} \text{ آنگاه مطلوب است } d \text{ . } (a \neq 1) \text{»}$$

استدلال های زیر را برای به دست آوردن  $d$  از برگه های امتحانی دانش آموزان آورده ایم.

کدام یک از استدلال ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

(الف)

$$۱) a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$۲) 0 = \frac{-d}{c-d}$$

$$۳) 0 = -d$$

$$۴) d = 0$$



(ب)

$$۱) a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$۲) ac - ad = a - d$$

$$۳) ac - a = ad - d$$

$$۴) a(c-1) = (a-1)d$$

$$۵) \frac{a(c-1)}{a-1} = d$$

$$۶) -(c-1) = d$$

۱)  $a = \frac{a-d}{c-d}$

۲)  $a(c-d) = a-d$

۳)  $ac - ad = a-d$

۴)  $ac - a = ad - d$

۵)  $ac - a = (a-1)d$

۶)  $\frac{a(c-1)}{a-1} = d$



**تمرین ۲۹:** فرض کنید  $x=1$  است، دانش آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که  $۲=۱$  است استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

۱)  $x=1$

۲)  $x^2 = x$

۳)  $x^2 - 1 = x - 1$

۴)  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1}$

۵)  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}$

۶)  $\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1$

۷)  $x+1=1$

۸)  $x=2$

۹)  $1=2$