

$$1- \text{اگر } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-x}{2x^2 + bx + a - 1} = -\infty \text{ باشد، } a \text{ و } b \text{ را حساب کنید.}$$

« پاسخ »

چون حاصل حد برای راست و چپ یکسان شده است. بنابراین باید مخرج مربع کامل باشد در نتیجه داریم:

$$x = 5 \Rightarrow x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^2 - 10x + 25 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 20x + 50 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -20 \\ a - 1 = 50 \Rightarrow a = 51 \end{cases}$$

$$2- \text{مجانِب قائم تابع } f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2 - 4} \text{ را حساب کنید.}$$

« پاسخ »

ابتدا ریشه مخرج را حساب می‌کنیم و باید حاصل حد، بی‌نهایت شود.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow x = -2 \text{ مجانب قائم است}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2 - 4} = \text{حد وجود ندارد}$$

$$3- \text{مجانِب قائم تابع } f(x) = \frac{5-x}{|x+2|} \text{ را حساب کنید.}$$

« پاسخ »

ابتدا ریشه مخرج را حساب می‌کنیم و باید حاصل حد، بی‌نهایت شود.

$$|x+2| = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5-x}{|x+2|} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

۴- مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-6x+9}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

ابتدا ریشه مخرج را حساب می‌کنیم و باید حاصل حد، بی‌نهایت شود.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{(x-3)^2} = \frac{7}{0^+} = +\infty \Rightarrow \text{مجانِب قائم است } x = 3$$

$$x \rightarrow 3$$

۵- مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

ابتدا ریشه مخرج را حساب می‌کنیم و باید حاصل حد، بی‌نهایت شود.

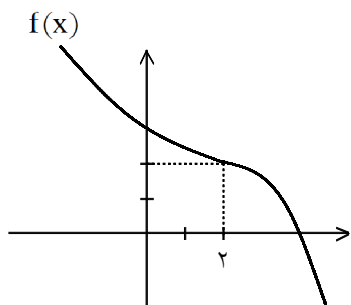
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x = 1$ مجانب قائم است

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} = \text{حد وجود ندارد}$$

$$x \rightarrow -1$$

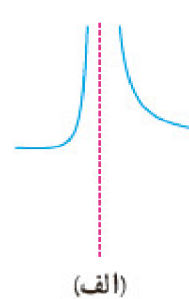
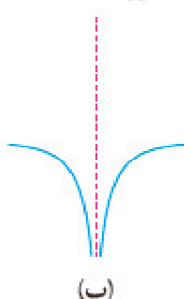
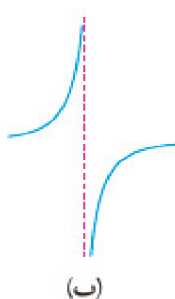
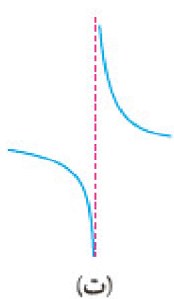


۶- با توجه به نمودار تابع f حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+10}{2-f(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+10}{2-f(x)} = \frac{12}{+} = +\infty$$

۷- کدام شکل زیر وضعیت نمودار $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ را در همسایگی $x = 1$ نمایش می دهد؟ چرا؟



« پاسخ »

شکل الف

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{+} = +\infty$$

۸- مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{3 - x} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } f(x) = \frac{2x - 1}{3 - x} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 1}{3 - x} = \infty$$

$x = 3$ مجانب قائم است.

$$\text{ب) } g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{مجانب قائم نیست} \\ x = 1 \Rightarrow \text{مجانب قائم است} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{1}{1} = 1$$

۹- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{4}{4 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} = \frac{9 + 6 - 1}{9 + 3 - 12} = \frac{14}{0^-} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{3+1}{9-9} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

۱۰- حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} =$$

« پاسخ »

$$\frac{-1}{0/5} = +\infty$$

۱۱- حد توابع زیر را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\frac{2-3}{-} = +\infty \quad (0/25)$$

(الف)

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} \quad (0/75) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 24 \quad (0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2}$$

۱۲- حد روبه‌رو را محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{+} = +\infty$$

۱۳- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4}{(x-6)^2}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4}{(x-6)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad (0/25)$$

۱۴- حد تابع زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 7}{|3-x|}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 7}{|3-x|} = \frac{9-7}{|3-3^-|} = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad (0/75)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$$

۱۵- حد زیر را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4}{0^-} = -\infty$$

۱۶- حدود تابع زیر را بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده‌ی هوییتال محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x-1}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{0/25}{0/25} = -\infty \quad (0/25)$$

۱۷- با استفاده از قاعده‌ی هوییتال، حد تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$x \rightarrow +\infty$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \times \cos \frac{1}{x} \quad (0/0)}{\frac{-1}{x^2} \quad (0/0)} = 1 \quad (0/0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2}$$

$x \rightarrow 2^-$

۱۸- حد مقابل را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} = \frac{-1}{-} = +\infty$$

۱۹- تعداد مجانب‌های قائم تابع $y = \operatorname{tg} \omega x$ را در فاصله‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ به دست آورید.

« پاسخ »

$$y = \frac{\sin \omega x}{\cos \omega x}$$

$$\cos \omega x = 0 \Rightarrow \omega x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{2k+1}{\omega}\right) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1) \frac{\pi}{10}$$

$$-2\pi \leq (2k+1) \frac{\pi}{10} \leq 2\pi \Rightarrow -20 \leq 2k+1 \leq 20 \Rightarrow \frac{-21}{2} \leq k \leq \frac{19}{2} \Rightarrow -10 \leq k \leq 9 \Rightarrow 20 = \text{تعداد جواب ها}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x}{(x+1)^2}$$

$x \rightarrow (-1)^-$

۲۰- حد زیر را حساب کنید:

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{-2}{+} = -\infty$$

۲۱- حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^2}$$

« پاسخ »

$$\frac{-2+3}{(2-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۲۲- حد مقابل را در صورت وجود تعیین کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{x^2+2x-3}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{5}{0^- \cdot 4} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

۲۳- حد مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x+2) - 4}{(x-2)(x+2)} \right) \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۲۴- حد مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{1 - \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1 + 0}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty \quad \text{a و b را طوری تعیین کنید که:}$$

« پاسخ »

حد مخرج باید صفر شود و در همسایگی محذوف $x = 3$ باید مثبت باشد پس مخرج باید به صورت $(x - 3)^2$ باشد پس $x^2 + ax + b = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ و از آنجا $a = -6$ و $b = 9$.

۲۶- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{1}{+} = +\infty$$

۲۷- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - 3}{x - 3} = \frac{-1}{-} = +\infty$$

۲۸- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x^2 - 2x + 3)}{(x+1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x+1} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x+1} = \frac{8}{+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x+1} = \frac{8}{-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

۲۹- حد مقابل را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x + 3}{(x - 3)^2}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x + 3}{(x - 3)^2} = \frac{9}{(3^+ - 3)^2} = \frac{9}{(+)^2} = +\infty$$

۳۰- مجانب‌های افقی تابع $f(x) = \frac{x|x|}{3x^2 + x + 1}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

باید حاصل حد در بی‌نهایت را حساب کرد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x|x|}{3x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x|}{3x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

بنابراین $y = \frac{1}{3}$ و $y = -\frac{1}{3}$ مجانب‌های افقی تابع است.

۳۱- مجانب افقی تابع روبه‌رو را حساب کنید.

$$f(x) = \frac{4x^2 + 1}{(3x + 1)^2}$$

« پاسخ »

باید حاصل حد در بی‌نهایت را حساب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 1}{(3x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 1}{\cancel{9x^2} + \cancel{6x} + 1} = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{4}{9} \text{ (مجانب افقی)}$$

۳۲- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$$

ب)
$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x+3}{5-x}$$

پ)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{5x + 1}$$

« پاسخ »

الف)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{x \rightarrow 2}{4 \times 4} = \frac{3}{16}$$

ب)
$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x+3}{5-x} = \frac{8}{+} = +\infty$$

پ)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{5x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + |x|}{5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x}{5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$$

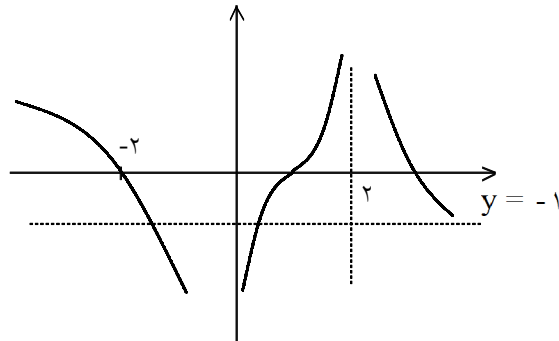
۳۳- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد:

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

« پاسخ »



۳۴- مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

ب) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

الف) $y = \frac{2x - 1}{x - 3}$

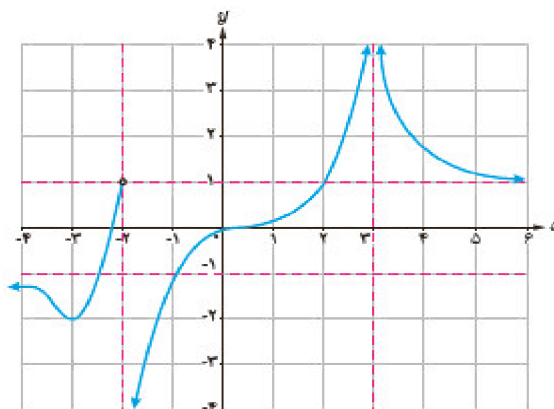
ت) $y = \frac{2x}{1 + x^2}$

پ) $y = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2}$

« پاسخ »

- الف) $\begin{cases} \text{مجانب قائم } x = 3 \\ \text{مجانب افقی } y = 2 \end{cases}$
- ب) $\begin{cases} \text{مجانب قائم } x = 2, x = -2 \\ \text{مجانب افقی } y = 0 \end{cases}$
- پ) $\begin{cases} \text{مجانب افقی } x = 1, x = -1 \\ \text{مجانب افقی } y = -2 \end{cases}$
- ت) $\begin{cases} \text{مجانب قائم ندارد} \\ \text{مجانب افقی } y = 0 \end{cases}$

۳۵- برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:



« پاسخ »

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$ مجانب‌های افقی و قائم

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

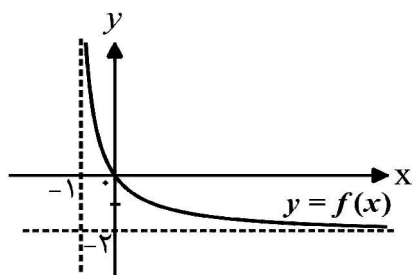
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$ مجانب قائم $x = -2, x = 3$
مجانب افقی $y = 1, y = -1$



۳۶- با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.

ا) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$

« پاسخ »

ا) -2
پا
۰/۲۵

ب) $+\infty$
پا
۰/۲۵

۳۷- مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$ را بیابید.

« پاسخ »

مجانب قائم $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (۰/۲۵)

مجانب افقی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y = 0$ (۰/۲۵)

۳۸- حد تابع روبه‌رو را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)}{\sqrt{4x^2 + 9x - 1}}$$

$x \rightarrow \infty$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\left(2x \sqrt{1 + \frac{9}{4x} - \frac{1}{4x^2}}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$x \rightarrow \infty$

۳۹- حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6x - 1}{x^3 + 4x}$$

$x \rightarrow +\infty$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6x - 1}{x^3 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

۴۰- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 7x^2}{3x^2 + x - 4}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 7x^2}{3x^2 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overset{0/25}{7x^2}}{\underset{0/25}{3x^2}} = \frac{7}{3} \quad (0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{2x + 3}$$

۴۱- حد زیر را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{رفع ابهام} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

۴۲- حدود تابع زیر را بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده‌ی هوییتال محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\sqrt{x^2 + 2} - x \right)}_{0/25} \times \frac{\sqrt{x^2 + 2} + x}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{2(0/25)}{2}}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2} + x \cdot \frac{0/25}}}}{\underset{0/25}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = 0 \quad (0/25)$$

۴۳- حاصل حد روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x+1}}{5x + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$x \rightarrow +\infty$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x+1}}{5x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{5x + |2x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{5x + 2x} = \frac{2}{7}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$x \rightarrow \infty$

۴۴- جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

مقدار عددی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 4}{(x+1)(x^2-1)}$ برابر با است.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3}{(x)(x^2)} = -3 \quad (۰/۲۵)$$

$x \rightarrow +\infty$

۴۵- حدود تابع زیر را بدون هم‌ارزی و قاعده‌ی هوییتال محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2 - 4x + 1}}{6x - 1}$$

$x \rightarrow -\infty$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x| \sqrt{9 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(6 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3x}{6x} = \frac{5}{6} \quad (۰/۲۵)$$

$x \rightarrow -\infty$

(۰/۵)

(۰/۲۵)

۴۶- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-2)x^3 + 2x^2 + 3}{bx^2 + 1} = 2$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

« پاسخ »

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad (۰/۲۵), \quad \frac{2}{b} = 2 \Rightarrow b = 1 \quad (۰/۵)$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{(x - 1)^3}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{1 - x}$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x - 4]}{x - 4}$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 6}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x - 1)(x + \sqrt{x})} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x - 1)(x + \sqrt{x})} \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + \sqrt{x})} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x + \sqrt{x}} \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x} - \frac{\sin 2x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sin 3x}{x}} \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1 - 2}{1 + 3} \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{-1}{4} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\text{ج) } -\frac{2}{0^+} \left(\frac{0}{0} \right) = -\infty \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{-1} = \begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow -\infty \left(\frac{0}{0} \right) \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow +\infty \left(\frac{0}{0} \right) \end{cases}$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{+3 - 4}{4^- - 4} \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{-1}{-} \left(\frac{0}{0} \right) = +\infty \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 3)} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{x + 3} = \frac{5}{5} \left(\frac{0}{0} \right) = 1 \left(\frac{0}{0} \right)$$

۴۸- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 + x - 10}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\sin x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x+2}}{4x + \sqrt{4x^2 + 1}}$

د) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x}$

ه) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$

و) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x) \tan(3x)}{x^2}$

« پاسخ »

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 + x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2 \cdot \text{○/○}}{(x-2)(2x+5) \cdot \text{○/○}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2x+5} = \text{○/○}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin \pi^-} \cdot \text{○/○} = \frac{1}{+} \cdot \text{○/○} = +\infty \cdot \text{○/○}$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x+2}}{4x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[2 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right]}{x \left[4 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right]} \cdot \text{○/○} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{4 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} \cdot \text{○/○} = \frac{2+0}{4+2} \cdot \text{○/○} = \frac{1}{3}$

د) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x} = \frac{|2-2|}{2} \cdot \text{○/○} = 0 \cdot \text{○/○}$

ه) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} = \frac{\sqrt{3+1} - 2}{3^2 - 9} = \frac{0}{0} \text{ مهم} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \right] \cdot \text{○/○} =$

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} \cdot \text{○/○} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} \right] =$

$= \frac{1}{(3+3)(\sqrt{3+1}+2)} \cdot \text{○/○} = \frac{1}{24} \cdot \text{○/○}$

و) $= \epsilon \left(\lim_{x \rightarrow 0} \tan 2x \cdot \text{○/○} \times \lim_{x \rightarrow 0} \tan 3x \cdot \text{○/○} \right) = \epsilon(1)(1) \cdot \text{○/○} = \epsilon \cdot \text{○/○}$

۴۹- حد توابع زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{1 - 4x}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{x-5}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2 \cos x - 1}{\sin x}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{1 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-4x} \quad (0/\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{-4} \quad (0/\infty)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \left[\left(\frac{\sqrt{3x+1} - 4}{x-5} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3x+1} + 4}{\sqrt{3x+1} + 4} \right) \right] \quad (0/0)$$

$$= \frac{3(x-5)}{(x-5)(\sqrt{3x+1} + 4)} \quad (0/0) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{\sqrt{3x+1} + 4} \quad (0/0) = \frac{3}{\sqrt{3(5)+1} + 4} = \frac{3}{8} \quad (0/0)$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{3x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right] \quad (0/0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2(1 + \cos x)} \quad (0/0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{3(1 + \cos x)} \right] \quad (0/0) = 1 \times \frac{1}{3 \times 2} \quad (0/0) = \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$\text{پ) راه دوم } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{3x^2} \quad (0/0) = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{3 \times x} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \quad (0/0) =$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \quad (0/0) = \left(\frac{1}{6} \right) \quad (0/0)$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2 \cos x - 1}{\sin x} = \frac{-3}{+} = -\infty \quad (0/0)$$

۵۰- حد تابع‌های زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x + 1}{\cot x}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{x-1}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{(x-2)^3}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow 0} 9 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x - 3x^3)$$

$$\text{الف) } \frac{\frac{\tan \pi}{4} + 1}{\frac{\cot \pi}{4}} \left(\frac{0}{25} \right) = \frac{1+1}{1} \left(\frac{0}{25} \right) = 2 \left(\frac{0}{25} \right)$$

$$\text{ب) } = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 3x - 1}{(x-1)(2 + \sqrt{3x+1})} \left(\frac{0}{5} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(1-x)}{(x-1)(2 + \sqrt{3x+1})} \left(\frac{0}{5} \right) =$$

$$= \frac{x \rightarrow 1}{-3} \frac{-3}{2 + \sqrt{4}} \left(\frac{0}{25} \right) = \frac{-3}{4} \left(\frac{0}{25} \right)$$

$$\text{ج) } \frac{2}{-} \left(\frac{0}{25} \right) = -\infty \left(\frac{0}{25} \right)$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow 0} 9 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \left(\frac{0}{25} \right) = 9 \times 1^2 \left(\frac{0}{25} \right) = 9 \left(\frac{0}{25} \right)$$

$$\text{ه) } = -3x^3 = -3(-\infty)^3 \left(\frac{0}{25} \right) = -3(-\infty) \left(\frac{0}{25} \right) = +\infty \left(\frac{0}{25} \right)$$

۵۱- a و b را چنان بیابید که خطوط $x = 2$ و $y = 3$ مجانب‌های تابع $y = \frac{ax+1}{x-b}$ باشند.

« پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجانِب قائم : } x - b = 0 \Rightarrow x = b = 2 \\ \text{مجانِب افقی : } y = a = 3 \end{array} \right\} b = 2, a = 3$$

۵۲- مجانب‌های افقی و قائم تابع $y = 2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 8x + 9}$ را در صورت وجود بیابید.

« پاسخ »

تابع مجانب قائم ندارد. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ در شاخه $+ \infty$ مجانب افقی ندارد

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + 2 \left| x + \frac{1}{2} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - 2x - 2) = -1$$

$y = -1$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} \approx \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

تذکر:

۵۳- حدهای زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x} \right) \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \frac{a}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0$$

۵۴- حد توابع زیر را محاسبه کنید:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 13x + 12}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-5x^2}{x^2 - 1}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x^2 - 5x}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 13x + 12} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

(الف)

برای رفع ابهام عامل صفرکننده از صورت و مخارج یعنی $(-3) - x$ را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(2x-5)}{(x+3)(3x+4)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-5}{3x+4} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^2}{x^2 - 1} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

(پ)

برای رفع ابهام صورت و مخارج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2) \times (\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

(ت)

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \times \frac{1}{x+a} = 1 \times \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(ث)