

حل بهترین درس رسم
نصل پنجم حسابان ۱

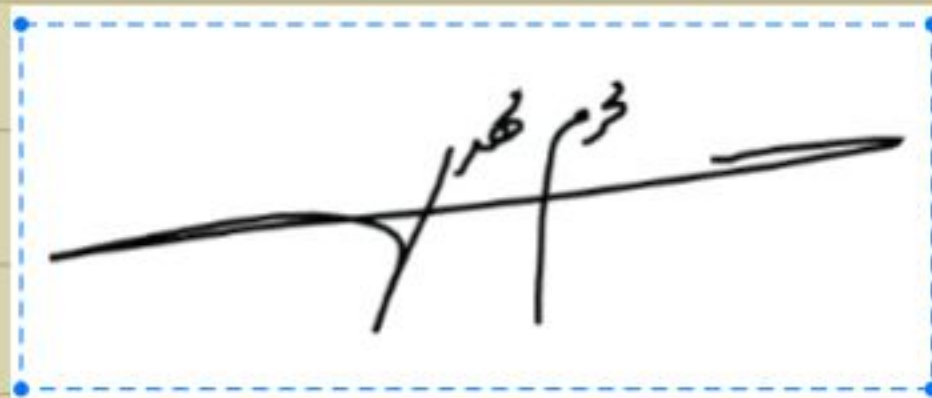
قضایای حد

حل فعالیت‌ها
و کار در کلاسها

۳

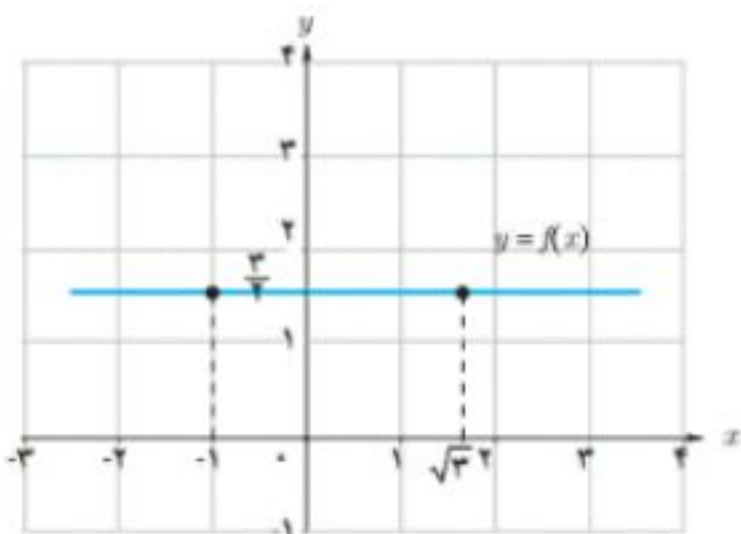
درس

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi



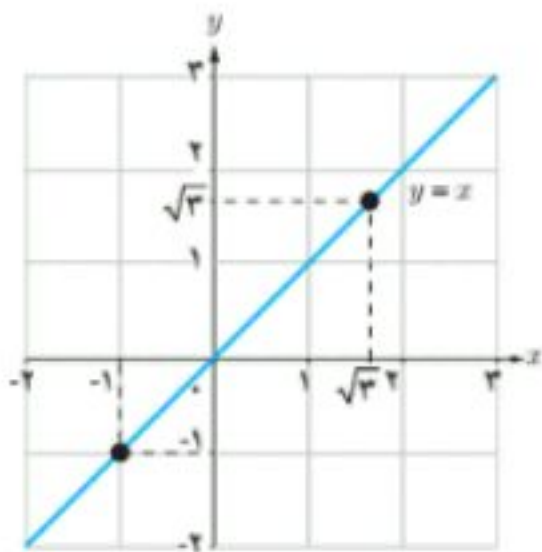
صفحه ۱۳۰

فعالیت



الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{3}{2}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار
حدهای زیر را بیابید.

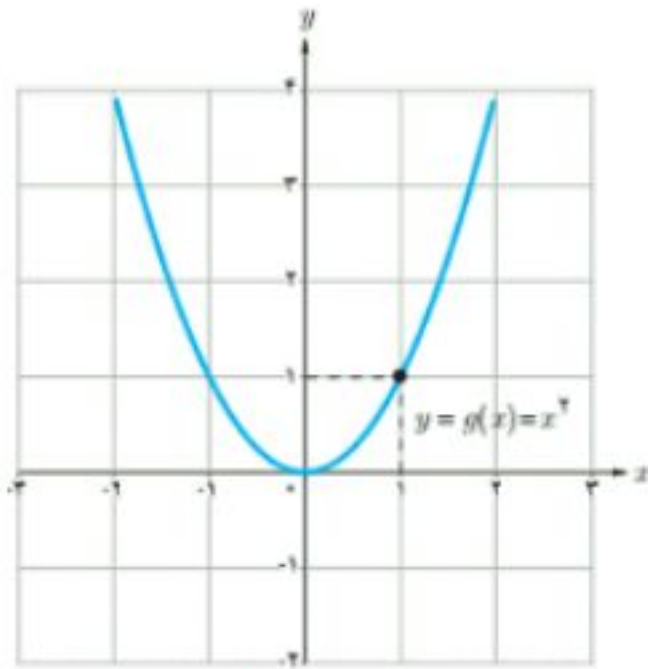
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{3}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \frac{3}{2}$$



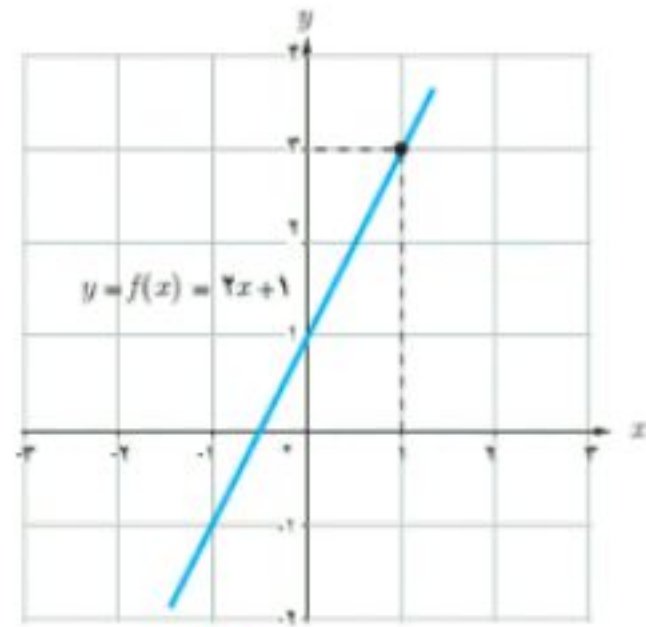
ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته
باشیم $g(x) = x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x) = \sqrt{3}$$

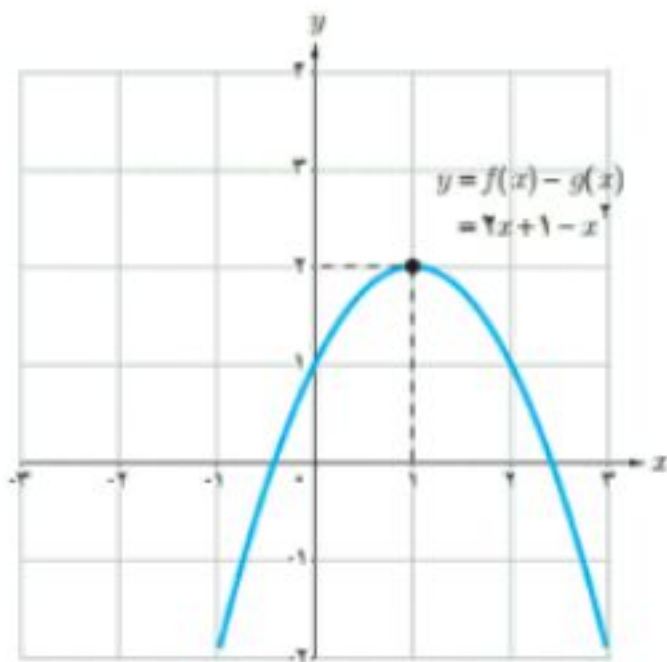
نواح $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.
الف) با توجه به نمودار توابع $f, g, f+g, f-g$ ، مقدار حدهای خواسته شده را بیابید.



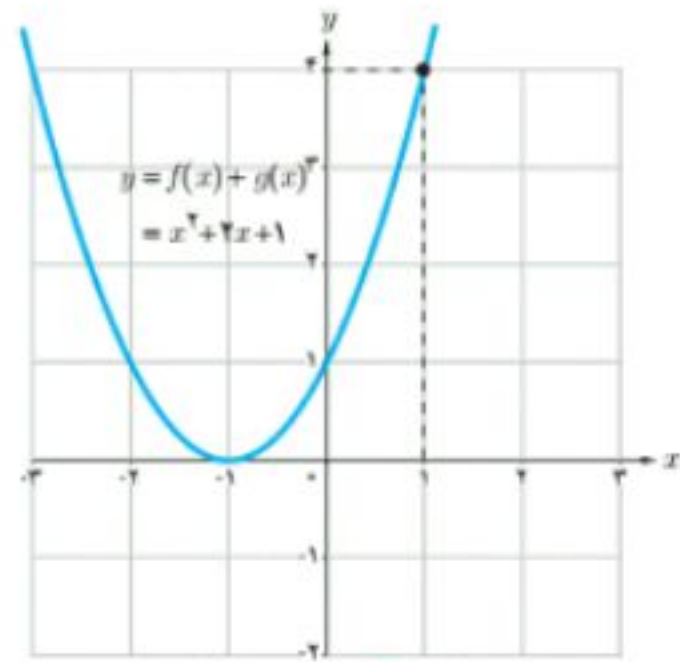
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \dots 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \dots 4$$

ب) با استفاده از قسمت الف)، درستی این تساوی‌ها را بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

4 3 1



$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

2 3 1



فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیه فوق، توضیح دهید چرا تساوی های زیر برقرارند؟

الف) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} f^r(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^r$

پ) $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ (به شرط آنکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$)

الف) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} f^r(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times f(x) \times \dots \times f(x))$

$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \dots \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^r$

پ) $\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (-1 \times f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} -1 \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$= -1 \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$)

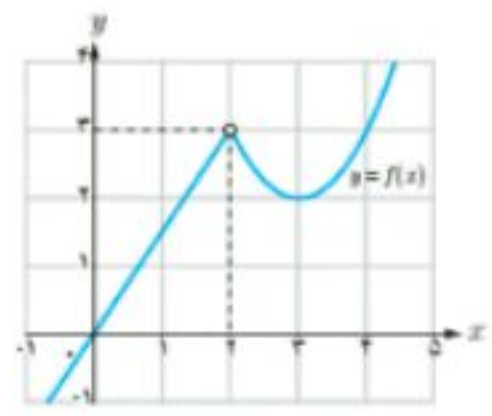
الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow -1} x^4 = (-1)^4 = 1$

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} (\Delta x^3 - 6|x| + 1) = \Delta(1.0)^3 - 6|1.0| + 1 = \Delta \dots - 6.0 + 1 = 4941$

۳) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 4}{4x^3 - 7x + 1} = \frac{2^2 + 4(2) + 4}{4(2)^3 - 7(2) + 1} = \frac{14}{19}$

۴) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - [x]}{1 - x}$
 $= \frac{\frac{1}{2} - [\frac{1}{2}]}{1 - \frac{1}{2}}$
 $= \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}} = 1$



ب) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} x f(x)$ را بیابید.

$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

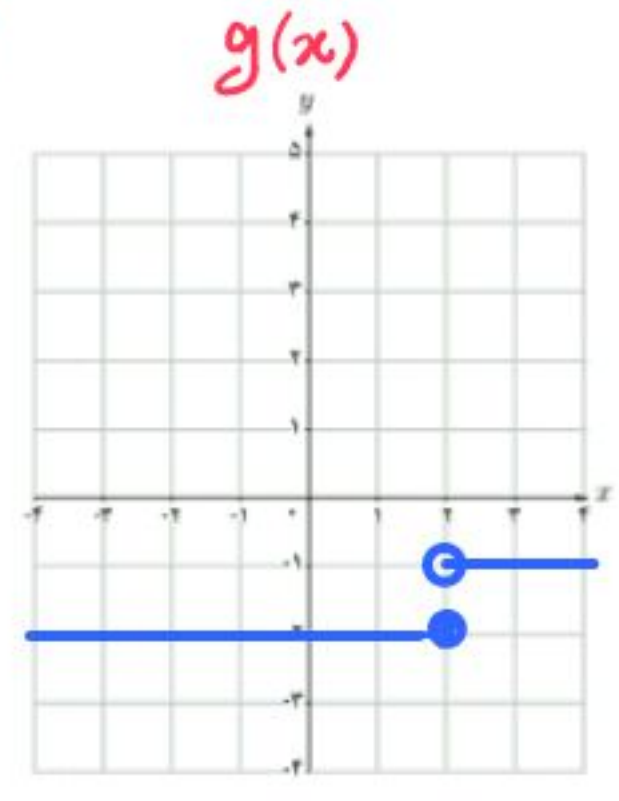
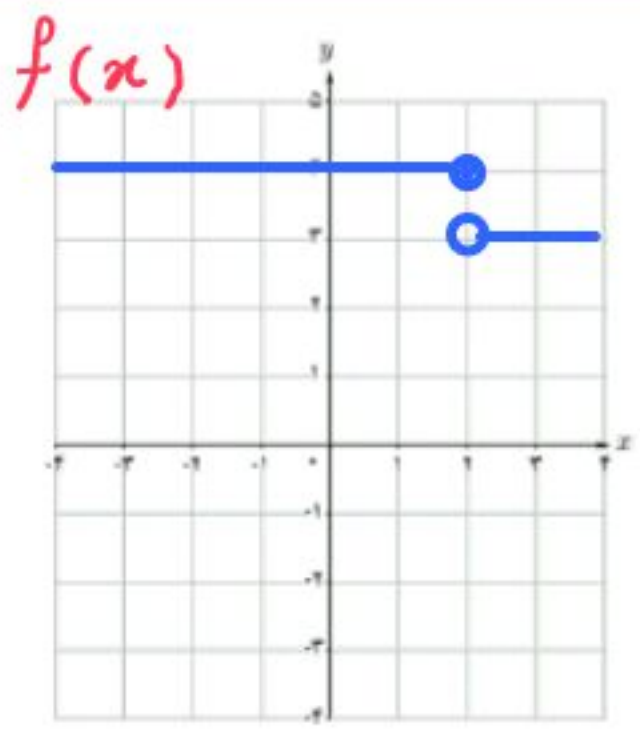
$\lim_{x \rightarrow 2} x f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \times 3 = 6$

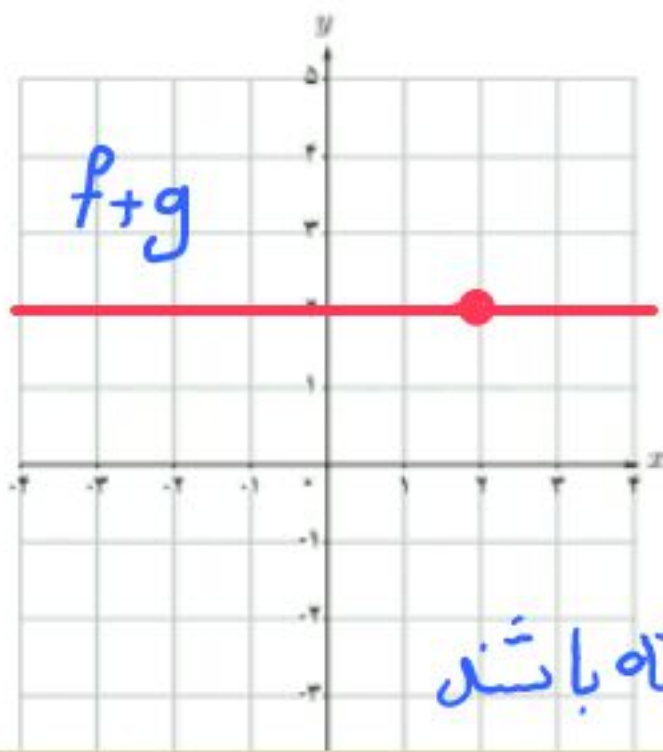
$f+g = \begin{cases} 2 & x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$

دو تابع $f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2 & x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.
 ب) نمودار توابع f, g و $f+g$ را رسم کنید.

$(f+g)(x) = 2$





پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=2$ وجود دارد؟ **خیر**

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=2$ وجود دارد؟ **بله**

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد

$f+g$ در $x=2$ استفاده کرد؟ چرا؟ **خیر**

شرط استفاده از این قضیه این است که

توابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند

۱۳۶

کاردر کلاس

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

ب) ثابت کنید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشند، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ نیز وجود دارد.

الف) **خیر** مثال نقض

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 4 \\ -2 & x < 4 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2 & x > 4 \\ 2 & x < 4 \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = 0 \quad D = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (f+g)(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) \text{ وجود ندارد}$$

$$\overbrace{\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))}^{(1)} - \overbrace{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}^{(2)} =$$

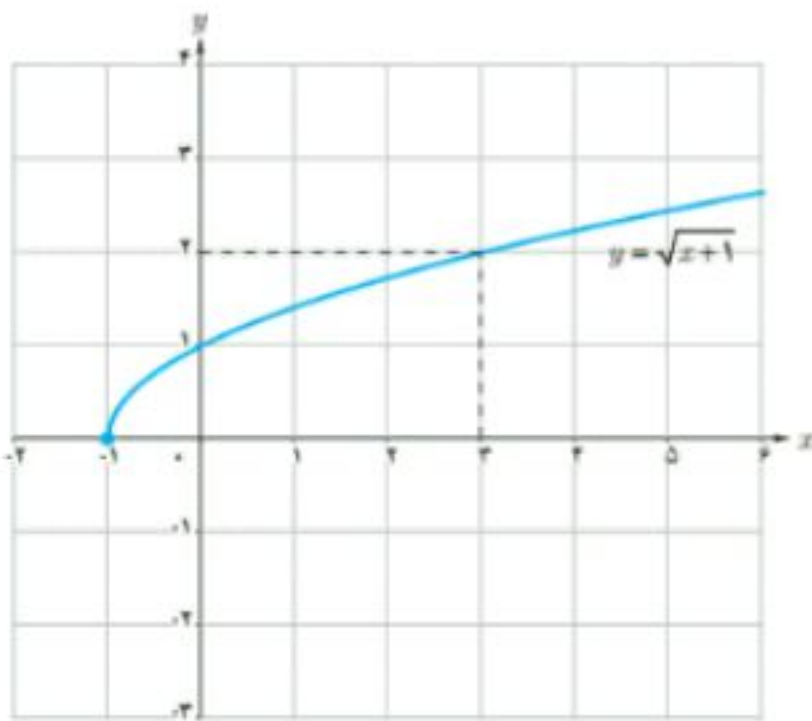
چون حدی (۱) و (۲) موجودند می توان آن را از هم کم کرد

$$= \lim_{x \rightarrow a} (\cancel{f(x)} + g(x) - \cancel{f(x)})$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{بنابراین، حد وجود دارد.}$$

صفحه ۱۳۶

فعالیت



در شکل روبه رو نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}$ را بیابید.

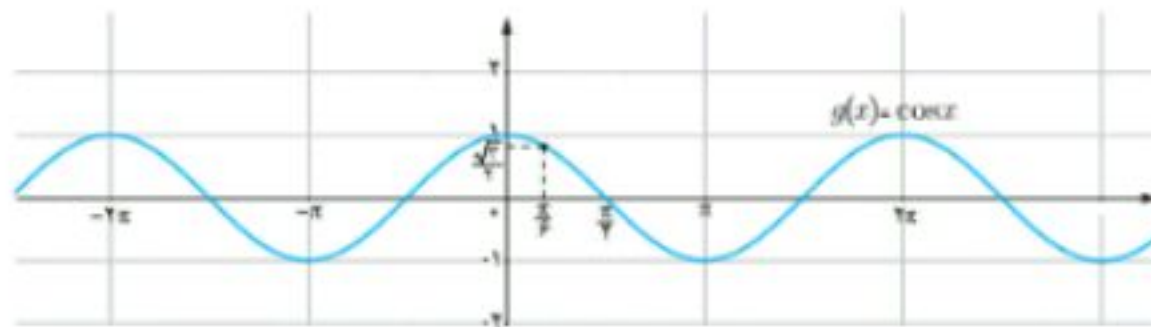
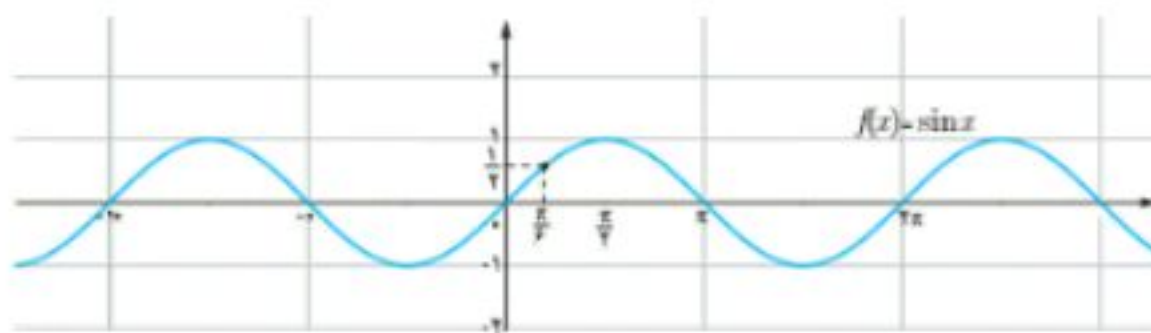
ب) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$ برقرار است؟

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \underline{2}$$

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)} = \sqrt{1+3} = \underline{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$$

نمودارهای توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ در زیر رسم شده‌اند.



الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

ب) آیا مقدار حد تابع $f(x) = \sin x$ در $\frac{\pi}{6}$ با مقدار $\sin(\frac{\pi}{6})$ برابر است؟ **بله**

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ب) آیا مقدار حد تابع $g(x) = \cos x$ در $\frac{\pi}{6}$ با مقدار $\cos(\frac{\pi}{6})$ برابر است؟ **بله**

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \pi \times \lim_{x \rightarrow -\pi} \cos x}{\lim_{x \rightarrow -\pi} x} = \frac{\pi \times \overbrace{\cos(-\pi)}^{-1}}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2}$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}}{\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] + \lim_{x \rightarrow 2^+} 2}$$

$$= \frac{0}{2+2} = 0$$

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} (-6x^5 - 4x^2 + 5)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{4}} \frac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^2+1)}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1-x^2}{x^2-4}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{4x^2+6x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{x + \cos x}$

چ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3 = (\sqrt{9} - 9)^3 = (-6)^3 = -216$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} (-6x^5 - 4x^2 + 5) = -6(-1)^5 - 4(-1)^2 + 5$

$$= 6 - 4 + 5$$

$$= 7$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\frac{\Delta}{r}} \frac{(x + \pi)(rx + \Delta)}{(rx + \gamma)(x^r + 1)} = \frac{\left(-\frac{\Delta}{r} + \pi\right)\left(r\left(-\frac{\Delta}{r}\right) + \Delta\right)}{\left(r\left(-\frac{\Delta}{r}\right) + \gamma\right)\left(-\frac{\Delta}{r} + 1\right)} = 0$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{r}^+} \frac{1 - x^r}{x^r - \varepsilon} = \frac{1 - (\sqrt{r})^r}{(\sqrt{r})^r - \varepsilon} = \frac{1 - r}{r - \varepsilon} = \frac{1}{r}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \sqrt{\varepsilon x^r + \gamma x} = \sqrt{\varepsilon \left(\frac{1}{r}\right)^r + \gamma \left(\frac{1}{r}\right)} = \sqrt{r} = r$$

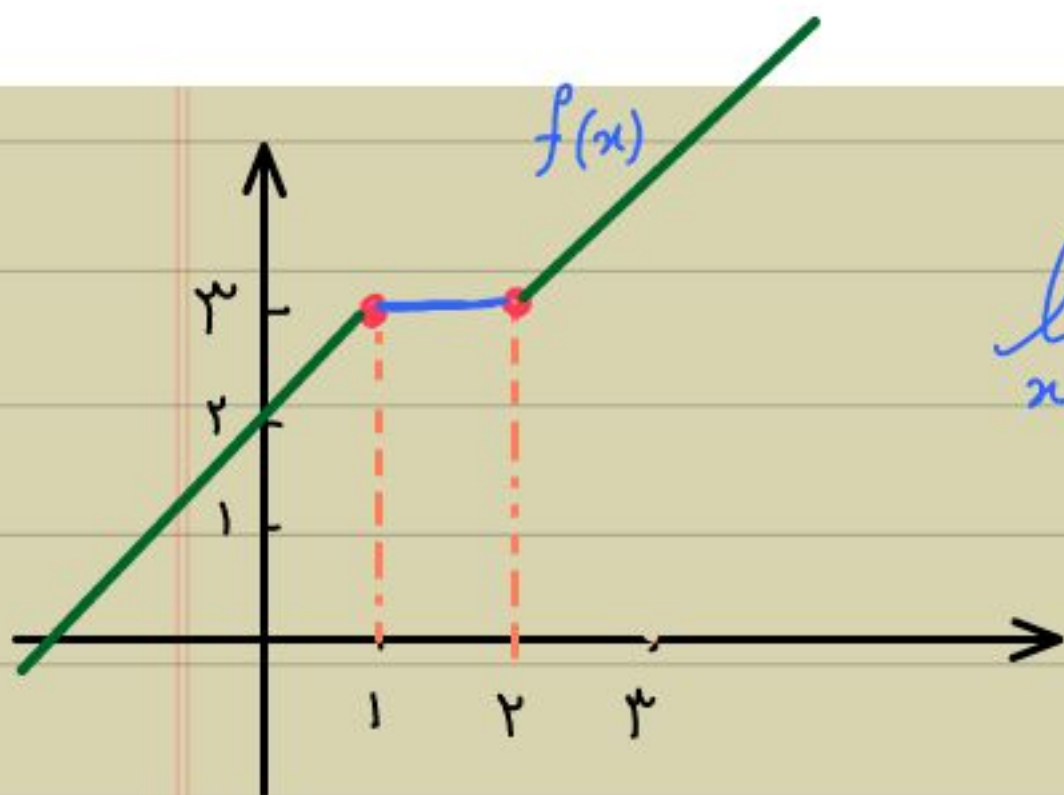
$$\text{هـ) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{\sin 0^+}{0^+ + \cos 0^+} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \frac{|\cos \frac{\pi}{r}|}{\frac{\pi}{r} - \pi} =$$

$$= \frac{0}{-\frac{\pi}{r}} = 0$$

فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

خیر
مثلاً در شکل زیر



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

ولی تابع ثابت نیست

تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)} = 4 \rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{3} = 4$$

$2^2 - 1 = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 12$$

توابع مختلف می‌توانند مشخص کرد

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0$$

برعکس: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

۵ نواع زیر را در نظر بگیرید.

$$y = 2x + 2, \quad y = x^2 - 1, \quad y = [x] - 1, \quad y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.
ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$f(x) + g(x) = \dots$	$g(x) = \dots$	$f(x) = \dots$	هر سه تابع f ، g و $f+g$ در 1 حد دارند.
$f(x) \cdot g(x) = \dots$	$g(x) = \dots$	$f(x) = \dots$	تابع $f \cdot g$ در 1 حد دارد اما تابع f در 1 حد ندارد.
$\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$g(x) = \dots$	$f(x) = \dots$	توابع f و g در 1 حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در 1 حد راست ندارد.
$f'(x) = \dots$		$f(x) = \dots$	تابع f' در 1 حد دارد اما تابع f در 1 حد ندارد.
$\sqrt{f(x)} = \dots$		$f(x) = \dots$	تابع f در 1 حد دارد اما تابع \sqrt{f} در 1 حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$$

الف)

$$y = [x] - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{حد راست} \\ \text{در } x=1 \\ \text{صورت دارد} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] - 1 = 0 - 1 = -1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{حد چپ} \\ \text{در } x=1 \\ \text{صورت دارد} \end{array} \right\}$$

$$y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -2$$

در $x=1$ صورت دارد

(ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$f(x)+g(x)=\dots$	$g(x)=\dots$	$f(x)=\dots$	هر سه تابع f ، g و $f+g$ در a حد دارند.
-------------------	--------------	--------------	---

$$f(x) = 3x + 2 \Rightarrow f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

$f(x)g(x)=\dots$	$g(x)=\dots$	$f(x)=\dots$	تابع f, g در a حد دارد اما تابع f در a حد ندارد.
------------------	--------------	--------------	--

$$f(x) = [x] - 1$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

$$k(x) = f(x) \times g(x)$$

$$k(x) = ([x] - 1)(x^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = (1-1)(1^2-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = (0-1)(1^2-1) = 0$$

$k(x)$ در $x=1$ حد دارد و حد آن صفر است

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$$

$$g(x) = \dots$$

$$f(x) = \dots$$

توابع f و g در a حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در a حد راست ندارد.

$$f(x) = 3x + 2$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x + 2}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \dots$$

$$f(x) = \dots$$

تابع f' در a حد دارد اما تابع f در a حد ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = 0$$

$$\sqrt{f(x)} = \dots$$

$$f(x) = \dots$$

تابع f در a حد دارد اما تابع \sqrt{f} در a حد ندارد.

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$$

*

$$x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

در نقطه $x=1$ حد چپ وجود ندارد و * در $x=1$ حد ندارد

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می توان گفت؟

تابع $f+g$ در حد a چنانچه مثال

$$f(x) = 2x + 5 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$$

$$g(x) = [x] + 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$(f+g) = 2x + [x] + 4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} h = 9, \lim_{x \rightarrow 1^-} h = 8 \text{ چنانچه}$$

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ حد داشته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3(-1) + b = -3 + b \text{ حد راست}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{(-1)^2 + [-1]}{|-1|} = \frac{1 + (-2)}{1} = -1$$

حد چپ

$$1) = 2) \Rightarrow -3 + b = -1$$

$$b = -1 + 3$$

$$b = 2$$

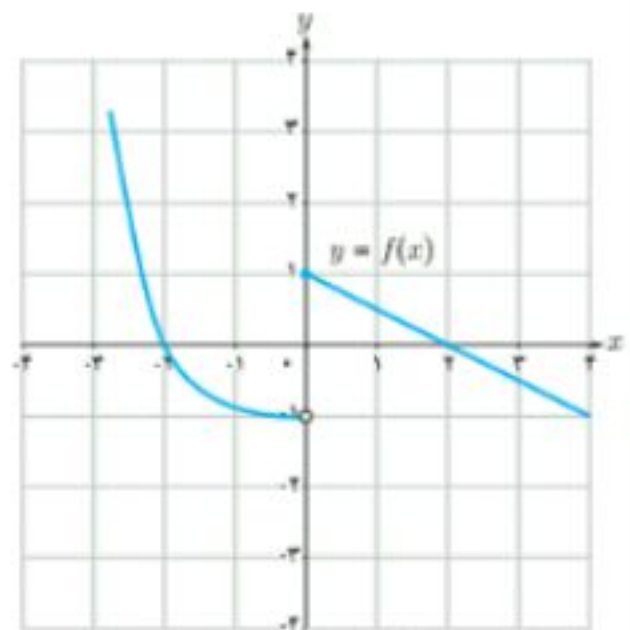
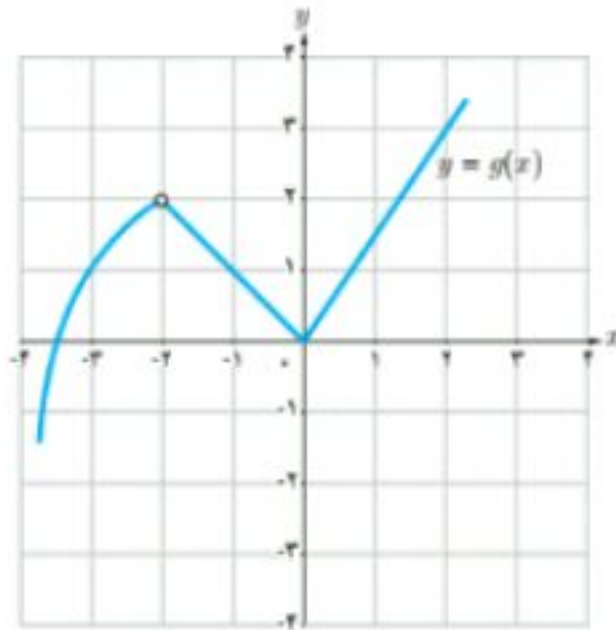
در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} -2\sqrt{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\Delta g(x)}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x)) &= 2 \lim_{x \rightarrow -2} g(x) - \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \\ &= 2 \cdot 2 - 0 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \frac{0}{1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} -2\sqrt{g(x)} &= -2\sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} g(x)} = -2\sqrt{2} \\ &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{1 + g(x)} = \sqrt[3]{1 + \lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \sqrt[3]{1 + 25} = 2 \sqrt[3]{5}$$

پس روز و سربلند باشید

حرم مهر

09213102271-09125102271-@moharrammahdi

تهران

نوزدهم فروردین ماه 1400

الما کس دعا در لایم بر فضیلت
ماه مبارک رمضان