تمرین ۱ صفحه ۸ کتاب: گزاره های زیر را به روش بازگشتی (گزاره ی هم ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد مخالف صفر و هم علامت باشند داریم

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+xz$$

$$x^2+y^2+1\ge xy+x+y$$

حل الف: فرض کنید رابطه درست باشد پس:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2 \iff \frac{x^2+y^2}{xy}\ge 2 \xLeftrightarrow[\div xy>0]{\times xy>0}$$

$$x^2+y^2\ge 2xy \xLeftrightarrow[+2xy]{-2xy} x^2-2xy+y^2\ge 0 \iff$$

$$(x-y)^2\ge 0$$

رابطه حاصل همواره درست است و تمام روابط برگشت پذیر هستند پس حکم درست است.

حل ب) قسمت اول: فرض کنید رابطه درست باشد پس

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+xz \xLeftrightarrow[\div 2]{\times 2}$$

$$2x^2+2y^2+2z^2\ge 2xy+2yz+2xz \iff$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz\ge 0 \iff$$

$$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(x^2-2xz+z^2)\ge 0$$

$$\iff (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\ge 0$$

رابطه حاصل همواره درست است و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است.

حل ب) قسمت دوم: فرض کنید حکم درست باشد پس

$$x^2+y^2+1\ge xy+x+y \xLeftrightarrow[\div 2]{\times 2}$$

$$2x^2+2y^2+2\ge 2xy+2x+2y \iff$$

$$2x^2+2y^2+\overbrace{2}^{1+1}-2xy-2x-2y\ge 0 \iff$$

$$(x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)\ge 0 \iff$$

$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\ge 0$$

رابطه حاصل همیشه درست است و تمام روابط برگشت پذیر هستند پس حکم درست است.

تمرین ۲ صفحه ۸ کتاب: عدد حقیقی مانند x ارائه دهید که $x^3<x^2$.

حل: با انتخاب $x=\frac{1}{2}$ داریم $(\frac{1}{2})^3<(\frac{1}{2})^2$

تمرین ۳ صفحه ۸ کتاب: اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha+\beta$ گویا باشند ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

تذکر مهم: طبق دو مثال حل شده در کتاب می دانیم مجموع یک عدد گنگ و یک عدد گویا همواره گنگ است و ضرب عدد گویای مخالف صفر در یک عدد گنگ همواره گنگ است.

حل قسمت اول: به برهان خلف نشان می دهیم $\alpha-\beta$ گنگ است.

(برهان خلف): فرض کنید $\alpha-\beta$ گنگ نباشد پس گویا است یعنی $\alpha-\beta=a\in\mathbb{Q}$ داریم:

$$\alpha-\beta=\overbrace{(\alpha+\beta)}^{\text{گویا}}-\overbrace{2\beta}^{\text{گنگ}}=\overbrace{a}^{\text{گویا}}\in\mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\alpha+\beta}^{\text{گویا}}=\underbrace{\overbrace{a}^{\text{گویا}}+\overbrace{2\beta}^{\text{گنگ}}}_{\text{گنگ}} \quad \times!$$

تساوی فوق امکان ندارد زیرا طرف اول گویا و طرف دوم گنگ است پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است.

حل قسمت دوم تمرین ۳ کتاب ص ۸

نشان می‌دهیم $\alpha+2\beta$ گنگ است.

(برهان خلف): فرض کنید $\alpha+2\beta$ گنگ نباشد پس گویاست

پس $\alpha+2\beta = a \in \mathbb{Q}$

پس $\alpha+2\beta = \overbrace{\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گنگ}}+\beta}^{\text{گنگ}} = a \in \mathbb{Q}$ ✗

طبق مثال حل شده کتاب چون $\alpha+\beta$ گویا و β گنگ است پس $(\alpha+\beta)+\beta$ گنگ است پس تساوی فوق امکان ندارد زیرا یک طرف گنگ و طرف دیگر گویاست پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است.

تمرین ۴ ص ۸ کتاب: آیا اعداد صحیح ناصفر x و y وجود دارد که:

$$x^2+y^2=(x+y)^2$$

حل: در صورتی که یکی از دو عدد x یا y صفر باشد یا هر دو صفر باشند. رابطه درست است ولی اگر $x,y\neq 0$ رابطه درست نیست.

$$x=0 \to 0+y^2=(0+y)^2 \to y^2=y^2$$

$$y=0 \to x^2+0=(x+0)^2 \to x^2=x^2$$

$$x=y=0 \to 0=0$$

$$x,y\neq 0 \to x^2+y^2 \neq (x+y)^2$$

تمرین ۵ ص ۸ کتاب: آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad a+b$$

حل: خیر زیرا:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \to \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab} \to$$

$$(a+b)^2=ab \to a^2+b^2+2ab=ab \xrightarrow{-ab}$$

$$a^2+b^2+ab=0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2ab=0$$

$$(a^2+2ab+b^2)+(a^2+b^2)=0$$

$$\to (a+b)^2+(a^2+b^2)=0$$

تساوی فوق امکان ندارد زیرا طبق فرض $a+b\neq 0$ پس چنین اعدادی وجود ندارد.

روش دوم:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \to \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}$$

$$a^2+2ab+b^2=ab \to a^2+ab+b^2=0$$

این یک معادله درجه ۲ برحسب a است پس

$$\Delta=b^2-4b^2=-3b^2<0$$

پس جواب ندارد.

تمرین ۶ ص ۸ کتاب: گزاره‌های زیر را اثبات یا با ارائه مثال نقض رد کنید:

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است

ب) میانگین ۵ عدد طبیعی متوالی همان عدد وسط است

حل: الف) درست است.

$$a=2k+1 \to a^2=4k^2+4k+1=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{q\in\mathbb{Z}}+1$$

$$\to a^2=2q+1=\text{فرد}$$

$$a^3=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1=2\underbrace{(4k^3+6k^2+3k)}_{q'\in\mathbb{Z}}+1$$

$$\to a^3=2q'+1=\text{فرد}$$

حل ب): $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} a=n \\ b=n+1 \\ c=n+2 \\ d=n+3 \\ e=n+4 \end{cases} \to a+b+c+d+e=5n+10$$

$$\text{میانگین}=\frac{a+b+c+d+e}{5}=\frac{5n+10}{5}=\frac{5(n+2)}{5}$$

$$=n+2=c=\text{عدد وسط}$$

حل تمرینات درس ۲ از فصل ۱ ریاضیات گسسته دوازدهم

تمرین ۱ ص ۱۶ کتاب: فرض کنید $ab=cd$ (a و b و c و d ناصفرند) در این صورت ۵ رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

حل:

$$ab=cd \Rightarrow \begin{cases} 1)\ a\mid cd \\ 2)\ b\mid cd \\ 3)\ c\mid ab \\ 4)\ d\mid ab \\ 5)\ ab\mid cd \ \text{یا}\ cd\mid ab \end{cases}$$

تمرین ۲ ص ۱۶ کتاب: ثابت کنید اگر $a\mid b$ آنگاه $a\mid -b$ و $-a\mid b$ و $-a\mid -b$

حل:

1) $a\mid b \rightarrow b=aq \xrightarrow{\times -} -b=a(-q)=aq' \rightarrow a\mid -b$

2) $a\mid b \rightarrow b=aq \rightarrow b=(-a)(-q)=(-a)q' \rightarrow -a\mid b$

3) $a\mid b \rightarrow b=aq \xrightarrow{\times -} -b=(-a)q \rightarrow -a\mid -b$

تمرین ۳ ص ۱۶ کتاب: اگر $a>1$ و $a\mid 9k+4$ و $a\mid 5k+3$. ثابت کنید a عددی اول است.

حل:

$$\begin{cases} a\mid 9k+4 \\ a\mid 5k+3 \end{cases} \rightarrow a\mid 9(5k+3)-5(9k+4)=7$$

$$\rightarrow a\mid 7 \xrightarrow{a>1} a=7$$

۷ اول است.

تمرین ۴ ص ۱۶ کتاب: اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $5\mid 4k+1$. ثابت کنید $25\mid 16k^2+28k+6$

حل:

$$5\mid 4k+1 \begin{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25\mid 16k^2+8k+1 \\ \xrightarrow{\times 5} 25\mid 20k+5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 25\mid (16k^2+8k+1)+(20k+5)=16k^2+28k+6$$

$$\Rightarrow 25\mid 16k^2+28k+6$$

تمرین ۵ ص ۱۶ کتاب: آیا از اینکه $a\mid b$ و $c\mid d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که: $a+c\mid b+d$.

حل: خیر این رابطه در حالت کلی درست نیست مثلاً $\begin{cases} 2\mid 4 \\ 3\mid 9 \end{cases}$ ولی $2+3 \nmid 4+9$.

تمرین ۶ ص ۱۶ کتاب: ثابت کنید:

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند

ب) هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

حل الف) فرض کنید n, $n+1$ دو عدد صحیح متوالی باشند داریم:

$$d=(n+1,n) \Rightarrow \begin{cases} d\mid n+1 \\ d\mid n \end{cases} \rightarrow d\mid n+1-n=1$$

$$d\mid 1 \xrightarrow{d>0} d=1 \rightarrow d=(n,n+1)=1$$

حل (ب): فرض کنید $2n-1$, $2n+1$ دو عدد صحیح فرد متوالی باشند داریم:

$$d=(2n+1,2n-1) \rightarrow \begin{cases} d\mid 2n+1 \\ d\mid 2n-1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$d\mid 2n+1-(2n-1)=2 \rightarrow d\mid 2 \xrightarrow{d>0} d=1 \ \text{یا}\ 2$$

اما چون $2n-1$ و $2n+1$ فردند پس $d=2$ آنها را عاد نمی‌کند پس $d=2$ قابل قبول نیست پس $d=(2n-1,2n+1)=1$. یعنی نسبت به هم اول‌اند.

تمرین ۷ ص ۱۶ کتاب: اگر $p\neq q$ و p و q هر دو اول باشند ثابت کنید $(p,q)=1$

حل: فرض کنید $(p,q)=d$ پس $\begin{cases} d\mid p \\ d\mid q \end{cases}$ و

چون p و q اول‌اند پس $\begin{cases} d=1 \ \text{یا}\ p \\ d=1 \ \text{یا}\ q \end{cases}$ اما $d=p$ و $d=q$ قابل قبول نیستند زیرا مثلاً اگر $d=p$ چون $d\mid q$ پس $p\mid q$ و چون p و q اول‌اند پس $p=q$ که با فرض $p\neq q$ در تناقض است پس فقط $d=(p,q)=1$ قابل قبول است. یعنی $(p,q)=1$.

تمرین ۸ صـ ۱۶ کتاب: اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ و $m,n\in\mathbb{N}$ ، $m\le n$ ، $a|b\to a^m|b^n$ ثابت کنید:

حل:

$$a|b\to b=aq \xrightarrow{\text{توان } n} b^n=a^nq^n \xrightarrow{m\le n}$$

$$b^n=a^m(\underbrace{a^{n-m}q^n}_{q'\in\mathbb{Z}}) \Rightarrow b^n=a^mq' \Rightarrow a^m|b^n$$

تمرین ۹ صـ ۱۶ کتاب: اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد. باقیمانده تقسیم عدد a بر ۵۶ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} a=7q_1+5 \xrightarrow{\times 8} 8a=56q_1+40 \\ a=8q_2+7 \xrightarrow{\times 7} 7a=56q_2+49 \end{cases}$$

$$\longrightarrow 8a-7a=56q_1-56q_2-9 \Rightarrow$$

$$a=56\underbrace{(q_1-q_2)}_{q\in\mathbb{Z}}-9=56q-9 \Rightarrow$$

$$a=56q-56+56-9=56(q-1)+47=56q'+47$$

پس باقیمانده a بر ۵۶ برابر ۴۷ است.

یا اینکه وقتی به رابطه $a=56q-9$ رسیدید به صورت زیر عمل کنید

باقیمانده $=-9+56=47$

زیرا باقیمانده تقسیم نمی‌تواند منفی باشد.

تمرین ۱۰ صـ ۱۶ کتاب: اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقیمانده تقسیم عدد a^2+b^2+3 بر ۸ را بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است. داریم:

$$n=2k+1 \longrightarrow n^2=4k^2+4k+1=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}+1$$

$$\longrightarrow n^2=8q+1$$

حال چون a فرد است و $b|a+2$ پس الزاماً b هم فرد است لذا داریم:

طبق اثبات فوق

a فرد $\to a^2=8k_1+1$

b فرد $\to b^2=8k_2+1$

$$\to a^2+b^2+3=(8k_1+1)+(8k_2+1)+3$$

$$=8k_1+8k_2+5=8\underbrace{(k_1+k_2)}_{q\in\mathbb{Z}}+5$$

$$\to a^2+b^2+3=8q+5$$

پس باقیمانده a^2+b^2+3 بر ۸ برابر ۵ است

تمرین ۱۱ صـ ۱۶ کتاب: اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

حل:

$$n^3-n=n(n-1)(n+1) \quad (*)$$

$$1)\ n=3k \xrightarrow{(*)} n^3-n=3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{q_1\in\mathbb{Z}}=3q_1$$

$$2)\ n=3k+1 \xrightarrow{(*)} n^3-n=(3k+1)(\cancel{3k+1-1})(3k+2)$$
$$=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q_2\in\mathbb{Z}}=3q_2$$

$$3)\ n=3k+2 \xrightarrow{(*)} n^3-n=(3k+2)(3k+1)(3k+3)$$
$$=3\underbrace{(3k+2)(3k+1)(k+1)}_{q_3\in\mathbb{Z}}$$
$$=3q_3$$

پس در هر سه حالت n^3-n مضرب ۳ است

پس $3|n^3-n$

تمرین ۱۲ صـ ۱۷ کتاب: اگر در یک تقسیم مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنید

$$a=bq+r$$

و $n|a$ ، $n|b$ پس $a=nq_1$ و $b=nq_2$

$$a=bq+r \Rightarrow nq_1=nq_2q+r \Rightarrow$$

$$r=nq_1-nq_2q=n\underbrace{(q_1-q_2q)}_{q'\in\mathbb{Z}} \Rightarrow r=nq'$$

$\Rightarrow n|r$ $r=$ باقیمانده تقسیم a بر b

تمرین ۱۳ ص ۱۷ کتاب: اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است

حل: a در تقسیم بر ۳ به یکی از سه صورت زیر است

$a=3k$ یا $a=3k+1$ یا $a=3k+2$

۱) اگر $a=3k$ که در این حالت a مضرب ۳ است.

۲) اگر $a=3k+1$ در این حالت $a+2=3k+3=3k'$ مضرب ۳ است.

۳) اگر $a=3k+2$ در این حالت $a+4=3k+6=3k''$ مضرب ۳ است.

تمرین ۱۴ ص ۱۷ کتاب: ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

حل: فرض $a=n$ و $b=n+1$ دو عدد صحیح متوالی باشند پس

$$b^3-a^3=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$
$$=3\underbrace{n(n+1)}_{2q}+1=2(3q)+1=2q'+1$$

پس b^3-a^3 فرد است.

تمرین ۱۵ ص ۱۷ کتاب: ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۶ بخش‌پذیر است

حل: فرض کنید $n-1$ و n و $n+1$ سه عدد صحیح متوالی باشند در بین این سه عدد حتماً یکی زوج است پس حاصل ضرب آنها بر ۲ بخش‌پذیر است و حاصل ضرب آنها مضرب ۳ است زیرا

۱) $n=3k \to (n-1)(n)(n+1)=(3k-1)(3k)(3k+1)=3q_1$

۲) $n=3k+1 \to (n-1)(n)(n+1)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q_2}=3q_2$

۳) $n=3k+2 \to (n-1)(n)(n+1)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$
$$=3\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)}_{q_3}=3q_3$$

پس چون $(n-1)n(n+1)$ هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر است پس بر $3\times2=6$ بخش‌پذیر است و $6=3!$ نیز

$3!\,|\,(n-1)n(n+1)$

تمرین ۱۶ ص ۱۷ کتاب: حاصل هر یک را بیابید: $(m\in\mathbb{Z})$

الف) $([m^2,m],m^5)$

ب) $(2m,6m^2)$

پ) $(3m+1,3m+2)$

ت) $[m^7,(m^2,m^3)]$

ث) $[(72,48),120]$

حل:

الف) $(\overbrace{[m^2,m]}^{m|m^2},m^5)=(\underbrace{m^2,m^5}_{m^2|m^5})=m^2$

ب) $(2m,6m^2)=2|m|\overbrace{(1,3m)}^{1}=2|m|$

پ) $d=(3m+1,3m+2)\Rightarrow \begin{cases} d\,|\,3m+2 \\ d\,|\,3m+1\end{cases}$

$\to d\,|\,3m+2-(3m+1)=1 \xrightarrow{d>0} d=1$

ت) $[m^7,\overbrace{(m^2,m^3)}^{m^2}]=[m^7,m^2]=|m^7|$

زیرا $m^2|m^7$, $m^2|m^3$

ث) $[\overbrace{(72,48)}^{24},120]=[24,120]=120$

زیرا $24|120$

$72=2^3\times3^2$
$48=2^4\times3$ $\to (72,48)=2^3\times3=24$

۱- عدد ۱۳۹۸ به کدام رده هم‌نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

حل:
$1398 \overset{9}{\equiv} 1+3+9+8=21 \overset{9}{\equiv} 3$

$\Longrightarrow 1398 \in [3]_9$

تمرین ۲ صفحه ۲۹ کتاب:

اگر $k \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید فقط یکی از حالات زیر امکان‌پذیر است.

$k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 2$

حل: در تقسیم k بر ۳ داریم:

1) $k=3q+0 \Rightarrow k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \in [0]_3$

یا

2) $k=3q+1 \Rightarrow k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \in [1]_3$

یا

3) $k=3q+2 \rightarrow k \overset{3}{\equiv} 2$ یا $k \in [2]_3$

تمرین ۳ صفحه ۲۹ کتاب:

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$

حل:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ n|m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m|a-b \\ n|m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n|m \\ m|a-b \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{خاصیت تعدی}} n|a-b \rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$

تمرین ۴ صفحه ۲۹ کتاب:

فرض کنید $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

حل:

$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m|a-b \xrightarrow{d|m} d|a-b$ ①

$b \overset{n}{\equiv} c \rightarrow n|b-c \xrightarrow{d|n} d|b-c$ ②

$\xrightarrow{①,②} d|(a-b)+(b-c) \rightarrow d|a-c$

$\longrightarrow a \overset{d}{\equiv} c$

تمرین ۵ صفحه ۲۹ کتاب:

ثابت کنید اگر باقیمانده تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

حل:

$$\begin{cases} a=mq+r \\ b=mq'+r \end{cases} \Rightarrow a-b=mq-mq'$$

$\longrightarrow a-b=m(q-q')=mq''$

$\longrightarrow m|a-b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

تمرین ۶ صفحه ۲۹ کتاب:

عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

حل: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه باقیمانده a و b بر m برابر است.

اثبات: فرض کنید r_1 و r_2 باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m باشند پس

$$\begin{cases} a=mq_1+r_1 & 0 \le r_1 < m \\ b=mq_2+r_2 & 0 \le r_2 < m \end{cases} \quad , \quad |r_1-r_2|<m \ \circledast$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} r_1 \\ b \overset{m}{\equiv} r_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{a \overset{m}{\equiv} b} r_1 \overset{m}{\equiv} r_2$$

$\longrightarrow m|r_1-r_2 \xrightarrow[|r_1-r_2|<m \ \circledast]{m \in \mathbb{N}}$

پس اجباراً $r_1-r_2=0$ پس $r_1=r_2$.

یعنی a و b دارای باقیمانده‌ی یکسان بر m هستند.

تمرین ۷ صفحه ۲۹ کتاب:

با استفاده از بسط دوجمله‌ای خیام-نیوتن ثابت کنید برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ همواره

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$$

حل:

$$(a+b)^n-(a^n+b^n)=\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}$$

$$=ab\underbrace{\left(\binom{n}{1}a^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}b^{n-2}\right)}_{q\in\mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow (a+b)^n-(a^n+b^n)=(ab)q$$

$$\Rightarrow ab\mid (a+b)^n-(a^n+b^n)$$

$$\Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$$

تمرین ۸ صفحه ۲۹ کتاب:

با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $23^{51}-11^{51}-12^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

حل: داریم $132=12\times 11$ پس

$$11^{51}+12^{51} \overset{12\times11=132}{\equiv} (11+12)^{51} \overset{132}{\equiv} 23^{51} \quad (1)$$

$$A=23^{51}-11^{51}-12^{51}=23^{51}-(11^{51}+12^{51})$$

$$\overset{132}{\equiv} 23^{51}-23^{51}$$ طبق (1)

$$\overset{132}{\equiv} 0$$

پس عدد مورد نظر بر ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

تمرین ۹ صفحه ۲۹ کتاب: باقیمانده تقسیم $A=(2^{11}+7)\times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

حل:

$$2^5 \overset{23}{\equiv} 9 \xrightarrow{\text{توان } 2} 2^{10}\overset{23}{\equiv}81\overset{23}{\equiv}12$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2^{11}\overset{23}{\equiv}24\overset{23}{\equiv}1\xrightarrow{+7}$$

$$2^{11}+7\overset{23}{\equiv}8\xrightarrow{\times9}(2^{11}+7)\times9\overset{23}{\equiv}72\overset{23}{\equiv}3$$

$$\rightarrow A\overset{23}{\equiv}3$$ باقیمانده $=3$

تمرین ۱۰ صفحه ۲۹ کتاب:

اگر دو عدد $3a-5$ و $4a-7$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان $9a+6$ را بیابید.

حل:

$$4a-7\overset{10}{\equiv}3a-5\Rightarrow$$

$$a\overset{10}{\equiv}2\xrightarrow{\times9}9a\overset{10}{\equiv}18\xrightarrow{+6}$$

$$9a+6\overset{10}{\equiv}24\overset{10}{\equiv}4 \rightarrow$$ رقم یکان

تمرین ۱۱ صفحه ۲۹ کتاب:

باقیمانده تقسیم عدد $A=1!+2!+\cdots+500!$ را بر ۱۰ بیابید (رقم یکان A را بیابید).

حل:

$$A=1!+2!+3!+4!+5!+\cdots+500!$$

$$\overset{10}{\equiv}1+2+6+4+0+\cdots+0$$

$$\overset{10}{\equiv}13\overset{10}{\equiv}3 \rightarrow$$ رقم یکان

تمرین ۱۲ صفحه ۲۹ کتاب:

جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $7x+5y=11$ را بدست آورید.

حل:

$$(7,5)=1\mid 11$$

$$7x+5y=11\rightarrow \begin{cases}5y\overset{7}{\equiv}11\\ 7x\overset{5}{\equiv}11\end{cases}$$

$$7x\overset{5}{\equiv}11\overset{5}{\equiv}21\xrightarrow[(7,5)=1]{\div 7}x\overset{5}{\equiv}3$$

$$x-3=5k\rightarrow \boxed{x=5k+3}$$

$$7x+5y=11\rightarrow 7(5k+3)+5y=11$$

$$\rightarrow 5y=-35k-10\rightarrow \boxed{y=-7k-2}$$

$$\begin{cases}x=5k+3\\ y=-7k-2\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب کلی است.

تمرین ۱۳ ص ۲۹ کتاب:

به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد.

حل:

$x =$ تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی

$y =$ « « ۵۰۰۰ تومانی

$$2000x+5000y=29000 \to 2x+5y=29$$

$$\xrightarrow[\text{در } \mathbb{Z} \text{ جواب دارد}]{(2,5)=1|29} 2x \overset{5}{\equiv} 29 \overset{5}{\equiv} 34$$

$$\xrightarrow[(2,5)=1]{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 17 \overset{5}{\equiv} 2 \to x-2=5k \to x=5k+2 \quad (1)$$

$$2x+5y=29 \to 2(5k+2)+5y=29$$

$$5y=-10k+25 \xrightarrow{\div 5} y=-2k+5 \quad (2)$$

چون x و y تعداد اسکناس هستند

$$\begin{cases} x=5k+2 \geq 0 \\ y=-2k+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{2}{5} \\ k \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0,1,2$$

چون ۳ مقدار برای k حاصل شد و به ازای این ۳ مقدار، x و y نامنفی هستند پس به ۳ طریق می‌توان این کار را انجام داد.

حل الف: $423x \overset{11}{\equiv} 79$

$$(423,11)=1 \,|\, 79$$

پس این معادله در $\mathbb{Z}$ جواب دارد.

$$423x \overset{11}{\equiv} 79 \to \underbrace{418x}_{\overset{11}{\equiv}0} + 5x \overset{11}{\equiv} 79$$

$$\xrightarrow{418x \overset{11}{\equiv} 0} 5x \overset{11}{\equiv} 79 \overset{11}{\equiv} 90 \leftarrow 79+11$$

$$5x \overset{11}{\equiv} 90 \xrightarrow{\div 5} x \overset{11}{\equiv} 18 \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow$$

$$11 \,|\, x-7 \to x-7=11k \to x=11k+7 \quad k\in\mathbb{Z}$$

حل ب: $8x \overset{12}{\equiv} 20$

$$(8,12)=4 \,|\, 20$$

پس معادله در $\mathbb{Z}$ جواب دارد. پس

$$8x \overset{12}{\equiv} 20 \overset{12}{\equiv} 32 \xrightarrow[d=(8,12)=4]{\div 8}$$

$$x \overset{\frac{12}{4}=3}{\equiv} 4 \to 3 \,|\, x-4 \to x-4=3k$$

$$\to x=3k+4 \quad k\in\mathbb{Z}$$

حل (ج): $51x \overset{6}{\equiv} 11$

چون $(51,6)=3 \nmid 11$ پس این معادله در $\mathbb{Z}$ جواب ندارد.

تمرین ۱۴ صفحه ۳۰ کتاب:

معادله‌های هم‌نهشتی زیر را به صورت امتحان حل کرده و جواب‌های عمومی آن‌ها را بیابید:

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20$

ج) $5x \overset{6}{\equiv} 11$

تمرین ۱۵ ص ۳۰ کتاب: اگر اول مهر در یک سال روز یکشنبه باشد ۷ اسفند در همان سال چه روزی است؟

حل:

یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$\underbrace{(0+29)}_{\text{مهر}} + \underbrace{(4\times 30)}_{\text{آبان تا بهمن}} + \underbrace{7}_{\text{اسفند}} = 156 \overset{7}{\equiv} 2$$

پس ۷ اسفند روز سه‌شنبه است.

تمرین ۱۶ صفحه ۳۰ کتاب: اگر ۱۲ بهمن یک سال جمعه باشد ۳۱ مرداد در همان سال چه روزی از هفته است؟

حل: چون روزهای قبل را خواسته از ۱۲ بهمن شروع می‌کنیم و به عقب برمی‌گردیم

جمعه	۱شنبه	۲شنبه	۳شنبه	۴شنبه	۵شنبه	جمعه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

شروع ، ۱۲ بهمن — دی تا مهر — شهریور — ۱ام مرداد

$$(۰-۱۱)-(۴\times ۳۰)-۳۱-۱=-۱۶۳$$

و داریم $-۱۶۳ \overset{۷}{\equiv} ۵$

و ۵ متناظر با روز ۴شنبه است پس ۱ام مرداد ماه روز ۴شنبه است.

تمرین ۱۷ صفحه ۳۰ کتاب: همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها بعلاوه ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند.

حل:

$$۵a+۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \longrightarrow ۵a \overset{۱۱}{\equiv} -۹ \overset{۱۱}{\equiv} -۲۰$$

$$\xrightarrow[(۵,۱۱)=۱]{\div ۵} a \overset{۱۱}{\equiv} -۴ \longrightarrow ۱۱ \mid a-(-۴)$$

$$a+۴=۱۱k \longrightarrow a=۱۱k-۴ \qquad k\in \mathbb{Z}$$

تمرین ۱۸ صفحه ۳۰ کتاب: به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

حل:

$x=$ تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی

$y=$ « « ۵ «

$$۳x+۵y=۲۳ \qquad (۳,۵)=۱ \mid ۲۳$$

در $\mathbb{Z}$ جواب دارد

$$\Longrightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۲۳ \overset{۵}{\equiv} ۳$$

ادامه ←

ادامه تمرین ۱۸

$$۳x \overset{۵}{\equiv} ۳$$

$$\xrightarrow[(۳,۵)=۱]{\div ۳} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \longrightarrow x-۱=۵k$$

$$\longrightarrow x=۵k+۱ \quad (۱)$$

$$۳x+۵y=۲۳ \xrightarrow{(۱)} ۳(۵k+۱)+۵y=۲۳$$

$$۵y=-۱۵k+۲۰ \xrightarrow{\div ۵}$$

$$y=-۳k+۴ \quad (۲)$$

چون x و y تعداد وزنه‌ها هستند پس

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} x=۵k+۱\geq ۰ \\ y=-۳k+۴\geq ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k\geq -\frac{۱}{۵} \\ k\leq \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

$$\longrightarrow -\tfrac{۱}{۵}\leq k \leq \tfrac{۴}{۳} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}$$

$$k=۰,۱$$

چون ۲ مقدار صحیح برای k حاصل شد پس به ۲ طریق می‌توان مسئله را حل کرد.

تمرین ۱۹ صفحه ۳۰ کتاب: به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

حل:

$x=$ تعداد شاخه گل انتخابی از نوع اول

$y=$ « « « « « « دوم

$x+y=۹$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
y	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

تعداد حالات $=۱۰$

تمرین ۲۰ صفحه ۳۰ کتاب: شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را بدست آورد.

حل:

$x =$ تعداد سؤالات ۷ امتیازی

$y =$ تعداد سؤالات ۹ امتیازی

$$7x+9y=73 \Rightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 73 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$7x \overset{9}{\equiv} 1 \overset{9}{\equiv} 28 \Leftrightarrow 3(9)+1$$

$$\xrightarrow[(9,7)=1]{\div 7} x \overset{9}{\equiv} 4 \rightarrow x-4=9k$$

$$\rightarrow x=9k+4 \quad (1)$$

$$7x+9y=73 \xrightarrow{x=9k+4} 7(9k+4)+9y=73$$

$$\rightarrow 9y=-63k+45 \xrightarrow{\div 9}$$

$$y=-7k+5 \quad (2)$$

چون تعداد سؤال هستند پس

$$\begin{cases} x=9k+4\geq 0 \\ y=-7k+5\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\geq -\frac{4}{9} \\ k\leq \frac{5}{7} \end{cases} \longrightarrow$$

$$-\frac{4}{9}\leq k\leq \frac{5}{7} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0$$

پس فقط به یک صورت می‌تواند ۷۳ امتیاز کسب کند.

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$$

یعنی باید به ۴ سؤال ۷ امتیازی و ۵ سؤال ۹ امتیازی جواب دهد تا به امتیاز ۷۳ برسد.