درسنامه درس حسابان ۲ (فصل ۱)

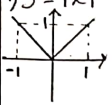
سال دوازدهم - رشته ریاضی فیزیک

شامل درسنامه کاربردی و حل مثال

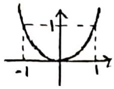
ابراهیم موسی پور

★ تبدیل نمودار تابع ★ مقدمه: برای رسم نمودار، به کمک برخی از تبدیل‌ها، دانستن رسم نمودار توابع زیر ضروری است.

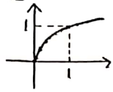
1) $y=|x|$



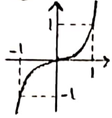
2) $y=x^2$



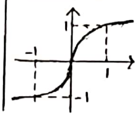
3) $y=\sqrt{x}$



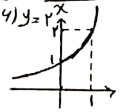
4) $y=x^3$



5) $y=\sqrt[3]{x}$

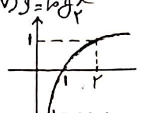


6) $y=2^x$



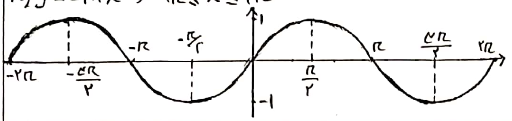
محور xها مجانب افقی

7) $y=\log_2 x$

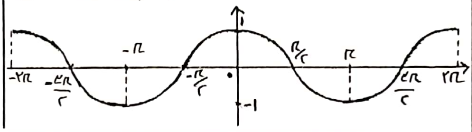


محور yها مجانب قائم

8) $y=\sin x\ ;\ -2\pi\le x\le 2\pi$

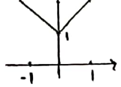


9) $y=\cos x\ ;\ -2\pi\le x\le 2\pi$

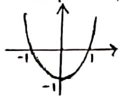


★ انتقال‌های عمودی و افقی: ① برای رسم نمودار $y=f(x)+K$، اگر $K>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را K واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $K<0$ نیز این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود. (انتقال عمودی)

مثال: $y=|x|+1 \Rightarrow$



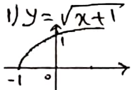
$y=x^2-1 \Rightarrow$



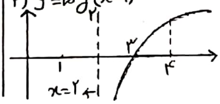
② همچنین برای رسم نمودار $y=f(x+K)$، اگر $K>0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را K واحد در جهت افقی به سمت چپ و برای رسم $y=f(x-K)$ ($K>0$)، نیز این انتقال K واحد به سمت راست انجام می‌شود. (انتقال افقی)

مثال:

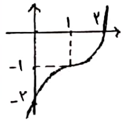
1) $y=\sqrt{x+1}$



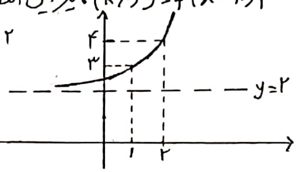
2) $y=\log_2(x-2)$



3) $y=(x-1)^3-1$



4) $y=2^{x-1}+2$



★ توضیح اینکه نمودارهای ۳ و ۴، از طریق هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی رسم شده‌اند.

★ انبساط و انقباض عمودی: ① برای رسم نمودار $y=Kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار f را در K ضرب کنیم. (K برابر کنیم.)

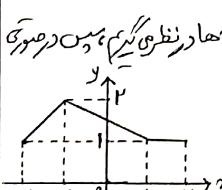
② اگر $K>1$ باشد، نمودار $y=Kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$، حاصل می‌شود.

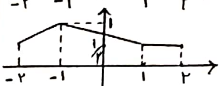
③ اگر $0<K<1$ باشد، نمودار $y=Kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ بدست می‌آید.

④ اگر $K=-1$، آنگاه نمودار $y=-f(x)$، قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$، نسبت به محور xهاست.

⑤ برای رسم نمودار $y=Kf(x)$، هرگاه $K<0$ باشد، ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع f را نسبت به محور xها در نظر می‌گیریم، سپس در صورتی که $K<-1$، انبساط عمودی و اگر $-1<K<0$، انقباض عمودی صورت می‌گیرد.

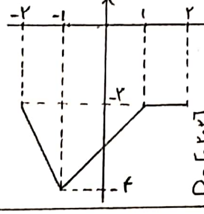
مثال: نمودار تابع f به صورت مقابل می‌باشد. نمودار هر یک از توابع: $g(x)=y=\frac{1}{2}f(x)$ ، $y=h(x)=-2f(x)$ و $y=K(x)=-f(x-1)+2$ را رسم کرده و از روی نمودار، دامنه و برد هر یک را معین کنید.





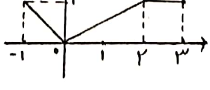
$D_g=[-2,2]$

$R_g=[\frac{1}{2},1]$



$D_h=[-2,2]$ ، $R_h=[-4,-2]$

★ برای رسم نمودار تابع K، ابتدا $f(x-1)$ سپس $-f(x-1)$ و نهایتاً $K(x)$، یعنی اول یک واحد به سمت راست، بعد قرینه نسبت به محور xها و بعد ۲ واحد بالا.



$D_K=[-1,3]$

$R_K=[0,1]$

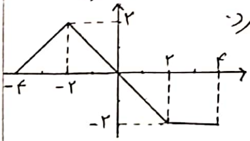
★ انبساط و انقباض افقی: ① برای رسم نمودار تابع $y=f(Kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع f را در $\frac{1}{K}$ ضرب کنیم.

② اگر $K>1$ باشد، نمودار $y=f(Kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$، در راستای محور xها به دست می‌آید.

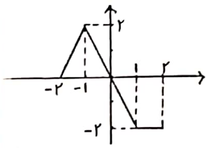
③ اگر $1>K>0$ باشد، نمودار $y=f(Kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.

④ اگر $K=-1$، آنگاه نمودار $y=f(-x)$، قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$، نسبت به محور yهاست.

⑤ برای رسم نمودار $y=f(Kx)$، هرگاه $K<0$ باشد، ابتدا قرینه‌ی نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها در نظر می‌گیریم، سپس در صورتی که $K<-1$ باشد، انقباض افقی و اگر $-1<K<0$، انبساط افقی صورت می‌گیرد.

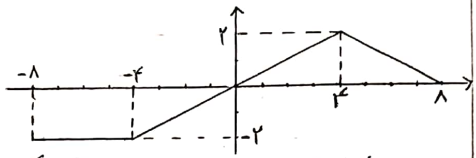


مثال: نمودار تابع f به صورت مقابل می‌باشد. نمودار هر یک از توابع $y=g(x)=f(2x)$ و $y=h(x)=f(-\frac{1}{2}x)$ را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را از روی نمودار معین کنید.



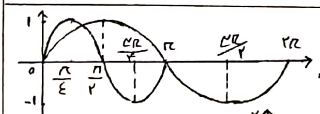
★ برای رسم g، طول نقاط f را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم و عرض نقاط تغییر نمی‌کند. (انقباض افقی)

$D_g=[-2,2]$, $R_g=[-2,2]$

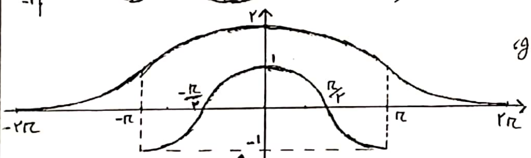


★ برای رسم h، طول نقاط f در -2 ضرب شده و عرض نقاط تغییر نمی‌کند. (انبساط افقی)

$D_h=[-8,8]$, $R_h=[-2,2]$

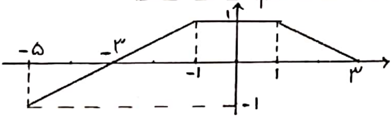


مثال: هرگاه $f(x)=\sin x$ و $x\in[0,2\pi]$ و $g(x)=f(2x)$، نمودار هر دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. ★ نمودار g از انقباض افقی نمودار f به دست می‌آید.



مثال: هرگاه $f(x)=\cos x$ و $x\in[-\pi,\pi]$ و $g(x)=f(\frac{x}{2})+1$، نمودارهای هر دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

★ برای رسم g از انبساط افقی و انتقال عمودی (رو به بالا) استفاده شده است.



مثال: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $g(x)=f(2x+1)$ را رسم نموده و دامنه‌ی g را معین کنید.

جواب: (دقت کنید!) فرض کنیم $A(x_0,y_0)\in f$ پس $f(x_0)=y_0$، در این صورت نقطه‌ی متناظر با A روی نمودار تابع g عبارت است از:

$2x+1=x_0 \Rightarrow x=\frac{x_0-1}{2} \Rightarrow g(x)=f(2\times\frac{x_0-1}{2}+1)=f(x_0)=y_0 \Rightarrow A'(\frac{x_0-1}{2},y_0)$

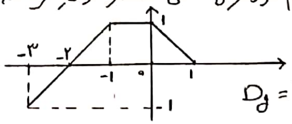
یعنی برای رسم نمودار g کافی است از طول هر نقطه‌ی نمودار f، یک واحد کم کرده و بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط تغییر نمی‌کند.

x	-5	-3	-1	1	3
$f(x)$	-1	0	1	1	0

$\Rightarrow$

x	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	-1	0	1	1	0

$\Rightarrow$



$D_g=[-3,1]$

مثال: هرگاه $D_f=[-4,6]$ و $R_f=[-2,3]$ و $g(x)=2f(-2x)-1$، مطلوب است تعیین D_g و R_g.

جواب: $D_g: -4\le -2x\le 6 \xrightarrow{\div(-2)} -3\le x\le 2 \Rightarrow D_g=[-3,2]$

$R_g: -2\le f(-2x)\le 3 \Rightarrow -4\le 2f(-2x)\le 6 \Rightarrow -5\le 2f(-2x)-1\le 5 \Rightarrow R_g=[-5,5]$

★ نکته: هرگاه نامساوی مضاعف $a\le x\le b$ بر عدد منفی c تقسیم شود به جای جهت عوض کردن می‌توان نوشت: $\frac{b}{c}\le\frac{x}{c}\le\frac{a}{c}$

و همچنین هرگاه نامساوی مضاعف $a\le x\le b$ در عدد منفی c ضرب شود خواهیم داشت: $bc\le cx\le ac$.

مثال: اگر $A(-8,6)\in f$ و $g(x)=1-f(\frac{x}{2}+2)$ و A' نقطه‌ی متناظر با A روی نمودار g باشد، مختصات A' را معین کنید.

جواب: $\frac{x}{2}+2=-8 \Rightarrow \frac{x}{2}=-10 \Rightarrow x=-20 \Rightarrow g(-20)=1-f(-8)=1-6=-5 \Rightarrow A'(-20,-5)\in g$

مثال: هرگاه $g(x)=2-f(x-1)$ و $A'(0,0)\in g$ و A نقطه‌ی متناظر با A' روی نمودار f باشد، مختصات A را معین کنید.

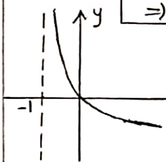
جواب: $A'(0,0)\in g \Rightarrow g(0)=0 \Rightarrow 2-f(0-1)=0 \Rightarrow f(-1)=2 \Rightarrow A(-1,2)\in f$

مثال (کنکور ۹۸ - ریاضی - داخل کشور) - نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم، نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ ۱) $(3,4)$ ۲) $(2,5)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(4,6)$

جواب: معادله‌ی نمودار برابر: $y=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2$ و $y>x \Rightarrow -(x-3)^2+2(x-3)+3>x$

$\Rightarrow -(x-3)^2+2(x-3)-(x-3)>0 \Rightarrow -(x-3)^2+(x-3)>0 \Rightarrow (x-3)^2-(x-3)<0 \Rightarrow (x-3)(x-4)<0$

$\Rightarrow 3<x<4 \Rightarrow x\in(3,4)$ (گزینه‌ی اوّل)



مثال: شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=\log_2 U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟ (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل کشور) ۱) $x+1$ ۲) $(x+1)^{-1}$ ۳) $x-1$ ۴) $1-x$

جواب: این نمودار، تبدیل یافته‌ی نمودار $y=\log_2 x$ می‌باشد. ابتدا یک واحد به سمت چپ منتقل شده و سپس نسبت به محور x ها قرینه گشته، لذا معادله‌ی این نمودار عبارت است از:

$y=\log_2 x \Rightarrow y=\log_2(x+1) \Rightarrow y=-\log_2(x+1) \Rightarrow y=\log_2(x+1)^{-1} \Rightarrow U(x)=(x+1)^{-1}$ (گزینه ۲)

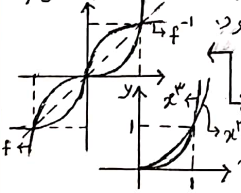
درس $\boxed{2}$ ★ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم ★

★ **تعریف تابع چندجمله‌ای:** تابع چندجمله‌ای از مجموع چند تک جمله‌ای برحسب x تشکیل شده است. همانطور که می‌دانیم در یک جمله‌ای برحسب x، درجه‌ی x (توان x)، باید عددی صحیح و نامنفی باشد. دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است.

مثال: ۱) $y=-2$ (تابع درجه صفر) ۲) $y=-2x+3$ (تابع درجه ۱) ۳) $y=x^2-x+2$ (تابع درجه ۲)
۴) $y=2x-x^4$ (تابع درجه ۴) ۵) $y=x^2(1-x)^3$ (تابع درجه ۵)

چند نکته: ① برای تابع ثابت $f(x)=0$، که نمودارش محور xها می‌باشد، درجه تعریف نمی‌شود.

② یکی از توابع چندجمله‌ای، تابع $y=x^3$ می‌باشد که تابعی وارون‌پذیر است، و وارون آن عبارت است از: $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$. نمودارهای این دو تابع در یک دستگاه مختصات:

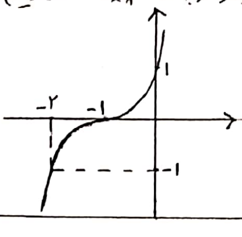


③ در فاصله‌ی $(0,1)$، نمودار تابع $y=x^3$، پایین‌تر از نمودار $y=x^2$ می‌باشد و هر دو پایین‌تر از نیمساز ربع اول ($y=x$) می‌باشند.

④ با توجه به نمودار $y=x^3$، نمودار بعضی از توابع درجه سوم، به کمک انتقال قابل رسم است. مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

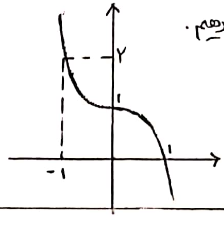
الف) $y=(x+1)^3$

★ برای رسم این تابع کافی است نمودار $y=x^3$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم.



ب) $y=-x^3+1$

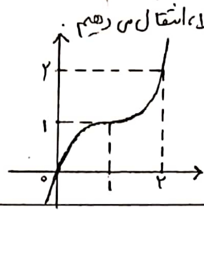
★ برای رسم این تابع ابتدا نمودار $y=x^3$ را نسبت به محور xها قرینه و سپس ۱ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



پ) $y=x^3-3x^2+3x$

$\Rightarrow y=x^3-3x^2+3x-1+1 \Rightarrow y=(x-1)^3+1$

★ برای رسم این تابع، نمودار $y=x^3$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا، انتقال می‌دهیم.



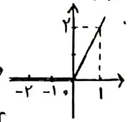
★ توابع صعودی و توابع نزولی - چند تعریف:

① تعریف تابع صعودی: تابع f را در مجموعه‌ی $A \subseteq D_f$ صعودی می‌نامند، هرگاه: $\forall a,b \in A;\ a<b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

به زبان فارسی هرگاه تابع f در فاصله‌ای از اعداد حقیقی صعودی باشد، آنگاه با افزایش x در این فاصله، مقدار تابع یعنی $f(x)$ کاهش نمی‌یابد. از نظر شهودی نیز با حرکت روی نمودار تابع f در دستگاه مختصات از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.

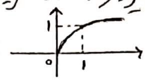
مثال: هریک از توابع زیر در دامنه‌ی تعریفشان صعودی می‌باشند.

الف) $f(x)=x+|x|=\begin{cases}2x\ ; & x\geq 0\\ 0\ ; & x<0\end{cases} \Rightarrow$



f در $\mathbb{R}$، صعودی است.

ب) $g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow$



g در فاصله‌ی $[0,+\infty)$ صعودی است.

② تعریف تابع نزولی: تابع f را در مجموعه‌ی $A \subseteq D_f$ نزولی می‌نامند هرگاه: $\forall a,b \in A;\ a<b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

به زبان فارسی هرگاه تابع f در فاصله‌ای از مجموعه‌ی اعداد حقیقی نزولی باشد آنگاه با افزایش x در این فاصله، مقدار تابع یعنی $f(x)$ افزایش نمی‌یابد. از نظر شهودی نیز با حرکت روی نمودار تابع در دستگاه از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.

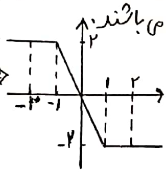
مثال: هریک از توابع زیر در دامنه‌ی تعریفشان نزولی می‌باشند.

الف) $f(x)=|x-1|-|x+1|$

ریشه‌های داخل قدرمطلق: $\begin{cases}x=1\\ x=-1\end{cases} \Rightarrow$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	2	0	-2	-2

$\Rightarrow$

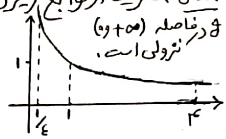


f در $\mathbb{R}$ نزولی است.

ب) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

x	$\frac{1}{4}$	1	4
$g(x)$	2	1	$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$



g در فاصله‌ی $(0,+\infty)$ نزولی است.

③ تعریف تابع یکنوا: به تابعی که بر مجموعه‌ی A، فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا می‌گویند.

مثلاً تابع $f(x)=x+|x|$ در $\mathbb{R}$ یکنواست به جهت صعودی بودن و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ نیز در فاصله‌ی $(0,+\infty)$ یکنواست به جهت نزولی بودن.

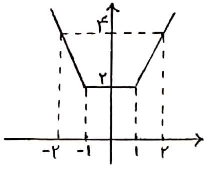
④ تعریف تابع ثابت: تابع f را در یک مجموعه مانند A، ثابت می‌نامند هرگاه: $\forall x \in A;\ f(x)=c$

مثال: با رسم نمودار تابع $f(x)=|x+1|+|x-1|$، معین کنید f در چه فاصله‌ای صعودی، نزولی و یا ثابت است.

جواب:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	2	2	2	4

$\Rightarrow$



f در فاصله‌ی $(-\infty,-1]$، نزولی است.

f در فاصله‌ی $[-1,1]$، ثابت است.

f در فاصله‌ی $[1,+\infty)$، صعودی است.

★ f در دامنه‌ی تعریفش یعنی $\mathbb{R}$، یکنوا نیست.

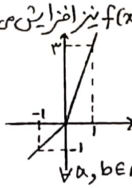
⑤ تعریف تابع اکیداً صعودی: تابع f را در یک مجموعه مانند A، اکیداً صعودی می‌نامند هرگاه: $\forall a,b \in A;\ a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$

به زبان فارسی هرگاه تابع f در فاصله‌ای اکیداً صعودی باشد، آنگاه با افزایش x در این فاصله، مقدار تابع یعنی $f(x)$ نیز افزایش می‌یابد. از نظر شهودی نیز با حرکت روی نمودار تابع در دستگاه مختصات از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.

مثلاً تابع $f(x)=2x+|x|$ در $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی است.

x	-1	0	1
$f(x)$	-1	0	3

$\Leftarrow$



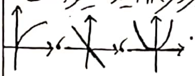
⑥ تعریف تابع اکیداً نزولی: تابع f را در یک مجموعه مانند A، اکیداً نزولی می‌نامند، هرگاه: $\forall a,b \in A;\ a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$

به زبان فارسی هرگاه تابع f در فاصله‌ای اکیداً نزولی باشد آنگاه با افزایش x در این فاصله، مقدار تابع، یعنی $f(x)$ کاهش می‌یابد. از نظر شهودی نیز با حرکت روی نمودار تابع در دستگاه مختصات از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.

- مثلاً تابع $f(x)=-x^3$، در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

(۷) تعریف تابع اکیداً یکنوا: به تابعی که در یک مجموعه، فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا گویند.

مثلاً: تابع $y=\sqrt{x}$ در فاصله‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً یکنواست، به جهت اکیداً صعودی بودن، و تابع $y=-x$ نیز در $\mathbb{R}$ اکیداً یکنواست به جهت اکیداً نزولی بودن، ولی تابع $f(x)=x^2$ در دامنه‌ی تعریفش یعنی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا نیست.



* چند نکته:

۱- تابع ثابت $f(x)=c$، در هر فاصله‌ای که تعریف شده باشد، هم صعودی است و هم نزولی.

۲- هر تابع اکیداً صعودی، تابعی صعودی نیز هست ولی عکس این مطلب همواره درست نیست.

۳- هر تابع اکیداً نزولی تابعی نزولی نیز هست، ولی عکس این مطلب همواره درست نیست.

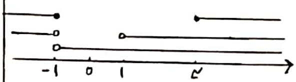
۴- هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر نیز می‌باشد.

۵- اگر f تابعی اکیداً صعودی بوده و $f(a)<f(b)$، آنگاه خواهیم داشت: $a<b$، زیرا (برهان خُلف) اگر حکم برقرار نباشد، خواهیم داشت $a\geq b$ و چون f اکیداً صعودی است پس طبق تعریف $f(a)\geq f(b)$ که این نتیجه خلاف فرض می‌باشد.

* بنابراین نکته چون تابع $f(x)=\log_a x$ $(a>1)$ تابعی اکیداً صعودی است، برای حل نامعادله‌ی $\log_a u > \log_a v$ $(a>1)$ کافی است نامعادلات $u>0$ و $v>0$ و $u>v$ را حل نمود، مجموعه‌ی جواب این سه نامعادله یعنی اشتراک مجموعه‌ی جواب‌های این سه نامعادله، جواب نامعادله داده شده می‌باشد.

همچنین چون تابع $f(x)=a^x$ $(a>1)$ تابعی اکیداً صعودی است، کافی است برای حل نامعادله‌ی $a^u > a^v$ با فرض $a>1$، نامعادله‌ی $u>v$ را حل نمود. **مثال**: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_2(2x+2)\geq\log_2(x^2-1) \Rightarrow \begin{cases} 2x+2>0 \Rightarrow x>-1 \\ x^2-1>0 \Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>1 \\ 2x+2\leq x^2-1 \Rightarrow x^2-2x-3\geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1)\geq 0 \Rightarrow x\leq -1 \text{ یا } x\geq 3 \end{cases}$



$\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب نامعادله: $[3,+\infty)$

ب) $4^{x+1}\geq 2^{x^2-1} \Rightarrow (2^2)^{x+1}\geq 2^{x^2-1} \Rightarrow 2^{2x+2}\geq 2^{x^2-1} \Rightarrow 2x+2\geq x^2-1 \Rightarrow x^2-2x-3\geq 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1)\geq 0 \Rightarrow x\leq -1$ یا $x\geq 3 \Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب نامعادله: $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

۶- اگر f تابعی اکیداً نزولی بوده و $f(a)<f(b)$، آنگاه خواهیم داشت: $a>b$، زیرا (برهان خُلف) اگر حکم برقرار نباشد، پس $a\leq b$ و چون f اکیداً نزولی است بنا بر تعریف $f(a)\geq f(b)$، و این نتیجه خلاف فرض می‌باشد.

* بنابراین نکته چون تابع $f(x)=\log_a x$ $(0<a<1)$ تابعی اکیداً نزولی است، برای حل نامعادله‌ی $\log_a u \leq \log_a v$ $(0<a<1)$ کافی است اشتراک مجموعه‌ی جواب نامعادلات: $u>0$ و $v>0$ و $u\geq v$ را معین نمود.

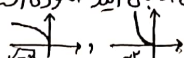
همچنین چون تابع $f(x)=a^x$ $(0<a<1)$، تابعی اکیداً نزولی است، برای حل نامعادله‌ی $a^u\leq a^v$ با فرض $0<a<1$، کافی است نامعادله‌ی $u\geq v$ حل شود. **مثال**: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{0/1}(x+1)\leq\log_{0/1}(2x-3)$

$\Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1$ ، $2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$ و $x+1\geq 2x-3 \Rightarrow x\leq 4 \Longrightarrow$ مجموعه جواب نامعادله: $(\frac{3}{2},4]$

ب) $(\frac{1}{2})^{3x-2}\leq\frac{1}{64} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{3x-2}\leq(\frac{1}{2})^6 \Rightarrow 3x-2\geq 6 \Rightarrow x\geq\frac{8}{3} \Rightarrow$ مجموعه جواب نامعادله: $[\frac{8}{3},+\infty)$

(۷) مجموع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است و مجموع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است.

مثال: الف) $y=x^3+x$ (در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی) ، ب) $y=x^2+\sqrt{-x} \Rightarrow$  $\Rightarrow$ در فاصله‌ی $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی

★ **تقسیم و بخش‌پذیری:** مقدمه: می‌دانیم در تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای، اولاً: مقسوم و مقسوم علیه باید استاندارد باشند. ثانیاً: عمل تقسیم تا آنجا ادامه دارد که درجه‌ی باقیمانده از درجه‌ی "مقسوم علیه" کمتر گردد. لذا اگر باقی‌مانده صفر شود می‌گویند مقسوم بر مقسوم علیه بخش‌پذیر است. ثالثاً: برای هر تقسیم یک تساوی به صورت: باقیمانده + (خارج قسمت)(مقسوم علیه) = مقسوم می‌توان نوشت که در آن چند جمله‌ای های خارج قسمت و باقی مانده منحصر بفردند و این تساوی در حکم یک اتحاد است.

مثال: در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)=x^3-3x+1$ بر $(x-2)$، اولاً خارج قسمت و باقی‌مانده را معین کنید. ثانیاً: تساوی تقسیم مربوطه را بنویسید.

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x+1 & x-2 \\ \hline -x^3+2x^2 & x^2+2x+1 \\ \quad 2x^2-3x & \\ \quad -2x^2+4x & \\ \qquad x+1 & \\ \qquad -x+2 & \\ \qquad\quad 3 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ خارج قسمت $=x^2+2x+1$ و باقی‌مانده $=3$

تساوی تقسیم: $\boxed{x^3-3x+1=(x-2)(x^2+2x+1)+3}$ $(*)$

تساوی $(*)$ در حکم یک اتحاد است، یعنی به ازای هر مقدار برای x، حاصل عبارت‌های سمت چپ و سمت راست تساوی با هم برابرند.

حال می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم یک چند جمله‌ای مانند $f(x)$ را بر $(x-a)$، بدون عمل تقسیم تعیین کنیم. هرگاه خارج قسمت را $q(x)$ و باقی‌مانده را r بنامیم، خواهیم داشت: $f(x)=(x-a)q(x)+r$، با توجه به این که این تساوی یک اتحاد است به ازای $x=a$ (ریشه‌ی مقسوم علیه) خواهیم داشت: $\boxed{f(a)=r}$ ★★ یعنی برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بدون عمل تقسیم، کافی است ریشه‌ی مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم، یعنی $f(a)$ را حساب کنیم.
واضح است که اگر $f(a)=0$ شود، آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)=x^3-3x+1$ را بر $x-2$، بدون عمل تقسیم حساب کنید. $x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow r=f(2)=3$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)=2x^4+x^3+2x+1$ را بر $x+1$، حساب کنید. $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow r=f(-1)=2-1-2+1=0$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)=x^3+2$ را بر $2x-1$، حساب کنید. $2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow r=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}+2=\frac{17}{8}$

مثال: مقدار a را چنان حساب کنید که $f(x)=x^3+ax+1$ در تقسیم بر $x-2$، باقی‌مانده‌ای برابر ۳ داشته باشد.

$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=3\Rightarrow 8+2a+1=3\Rightarrow 2a=-6\Rightarrow \boxed{a=-3}$

مثال: مقادیر a و b را چنان حساب کنید که چند جمله‌ای $f(x)=2x^4+x^3+ax+b$ در تقسیم بر $x-1$، باقی‌مانده‌ای برابر ۶ داشته و بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

$$\begin{cases}x-1=0\\ x+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=6\\ f(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+1+a+b=6\\ 2-1-a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\ -a+b=-1\end{cases}\Rightarrow 2b=2\Rightarrow \underline{b=1}\Rightarrow a=2$$

مثال: هرگاه چند جمله‌ای‌های $f(x)=2x^3+kx^2-1$ و $g(x)=3x^2+5x+1$، در تقسیم بر $x+2$ هم باقی‌مانده باشند، مقدار k را حساب کنید.

$x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow g(-2)=12-10+1=3\Rightarrow f(-2)=3\Rightarrow -16+4k-1=3\Rightarrow \boxed{k=5}$

مثال: هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-2)$ برابر ۵ و بر $(x+1)$ برابر (-1) باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ را بر x^2-x-2، حساب کنید. جواب: برای تعیین باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر x^2-x-2، باقی مانده را باید به صورت $R=ax+b$ در نظر گرفت. (درجه‌ی باقیمانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر است.) لذا خواهیم داشت: $f(x)=(x^2-x-2)q(x)+ax+b$

$$\begin{cases}x-2=0\\ x+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(2)=5\\ f(-1)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(4-2-2)\times q(2)+2a+b=5\\ (1+1-2)\times q(-1)-a+b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=5\\ -a+b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=5\\ a-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$$

$\Rightarrow\boxed{R=2x+1}$ جواب مسأله

مثال: اگر چند جمله‌ای x^2+ax-2 بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

$x-a=0\Rightarrow x=a\Rightarrow a^2+a^2-2=0\Rightarrow 2a^2=2\Rightarrow a^2=1\Rightarrow\boxed{a=\pm1}$

★ **تجزیه‌ی چند عبارت جبری:** ۱- دو جمله‌ای $f(x)=x^n-a^n$ به ازای هر عدد طبیعی n، بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است، زیرا $f(a)=a^n-a^n=0$

لذا تجزیه‌ی x^n-a^n برحسب $x-a$، بدون عمل تقسیم عبارت است از: $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\dots+a^{n-1})$

مثال: دو جمله‌ای x^4-16 را برحسب $x-2$ تجزیه کنید. $x^4-16=x^4-2^4=(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$

۲- دو جمله‌ای $f(x)=x^n-a^n$ به ازای هر عدد طبیعی زوج n، بر $x+a$ بخش‌پذیر است، زیرا: $f(-a)=(-a)^n-a^n=a^n-a^n=0$

لذا تجزیه‌ی x^n-a^n، وقتیکه n طبیعی و زوج است برحسب $x+a$، بدون عمل تقسیم عبارت است از:

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots-a^{n-1})$$

مثال: دو جمله‌ای x^4-16 را برحسب $x+2$ تجزیه کنید. $x^4-16=(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)$

۳- دو جمله‌ای $f(x)=x^n+a^n$ به ازای هر عدد طبیعی فرد n، بر $x+a$ بخش‌پذیر است، زیرا $f(-a)=(-a)^n+a^n=-a^n+a^n=0$

لذا تجزیه‌ی x^n+a^n وقتیکه n طبیعی و فرد است برحسب $x+a$، بدون عمل تقسیم عبارت است از:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots+a^{n-1})$$

مثال: دو جمله‌ای x^5+32 را برحسب $x+2$ تجزیه کنید. $x^5+32=x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

۴- دو جمله‌ای $f(x)=x^n+a^n$، به ازای هر عدد طبیعی n، بر $x-a$ بخش‌پذیر ~~نیست~~، زیرا: $f(a)=a^n+a^n=2a^n$

مثال: بدون عمل تقسیم، تساوی تقسیم را برای تقسیم $(x^6+1)\div(x-1)$ بنویسید.

$2=1^6+1=2$: باقیمانده و $x^6+1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)+2$

مثال: (کنکور ۹۷ - ریاضی - خارج کشور) - باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ و $x+3$ به ترتیب ۱ و ۴- است، باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-6، کدام است؟ ۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) $-x+2$ ۴) $2x-1$

جواب: $P(x)=(x^2+x-6)q(x)+(ax+b)$

$$\begin{cases}P(2)=1\\P(-3)=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=1\\-3a+b=-4\end{cases}\Rightarrow 5a=5\Rightarrow a=1\Rightarrow b=-1\Rightarrow \underline{R=x-1}$$

(گزینه‌ی اول)

مثال: (کنکور ۹۴ - ریاضی - داخل کشور) - به ازای مقداری از a، چندجمله‌ای $f(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، کوچکترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟ ۱) $1-\sqrt3$ ۲) $1-\sqrt5$ ۳) $-1-\sqrt3$ ۴) $-1-\sqrt5$

جواب: $f(-2)=0\Rightarrow 16-8a+16=0\Rightarrow -8a=-32\Rightarrow a=4\Rightarrow f(x)=x^4+4x^3-8x=x(x^3+4x^2-8)$

باتوجه به صورت سؤال چون $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیره، لذا سه جمله‌ای x^3+4x^2-8 نیز بر $x+2$ بخش‌پذیره، در تقسیم داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+4x^2-8 & x+2\\ \hline -x^3-2x^2 & x^2+2x-4\\ \quad 2x^2-8 & \\ \quad -2x^2-4x & \\ \qquad -4x-8 & \\ \qquad +4x+8 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}\Rightarrow f(x)=x(x+2)(x^2+2x-4)$$

$$f(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-2\\x^2+2x-4=0\Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+\sqrt5\simeq1/2\\x=-1-\sqrt5\simeq-3/2\end{cases}\end{cases}$$

پس کوچکترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$، $x=-1-\sqrt5$ (گزینه‌ی چهارم) می‌باشد.