

فصل ۲- الگوهای خطی

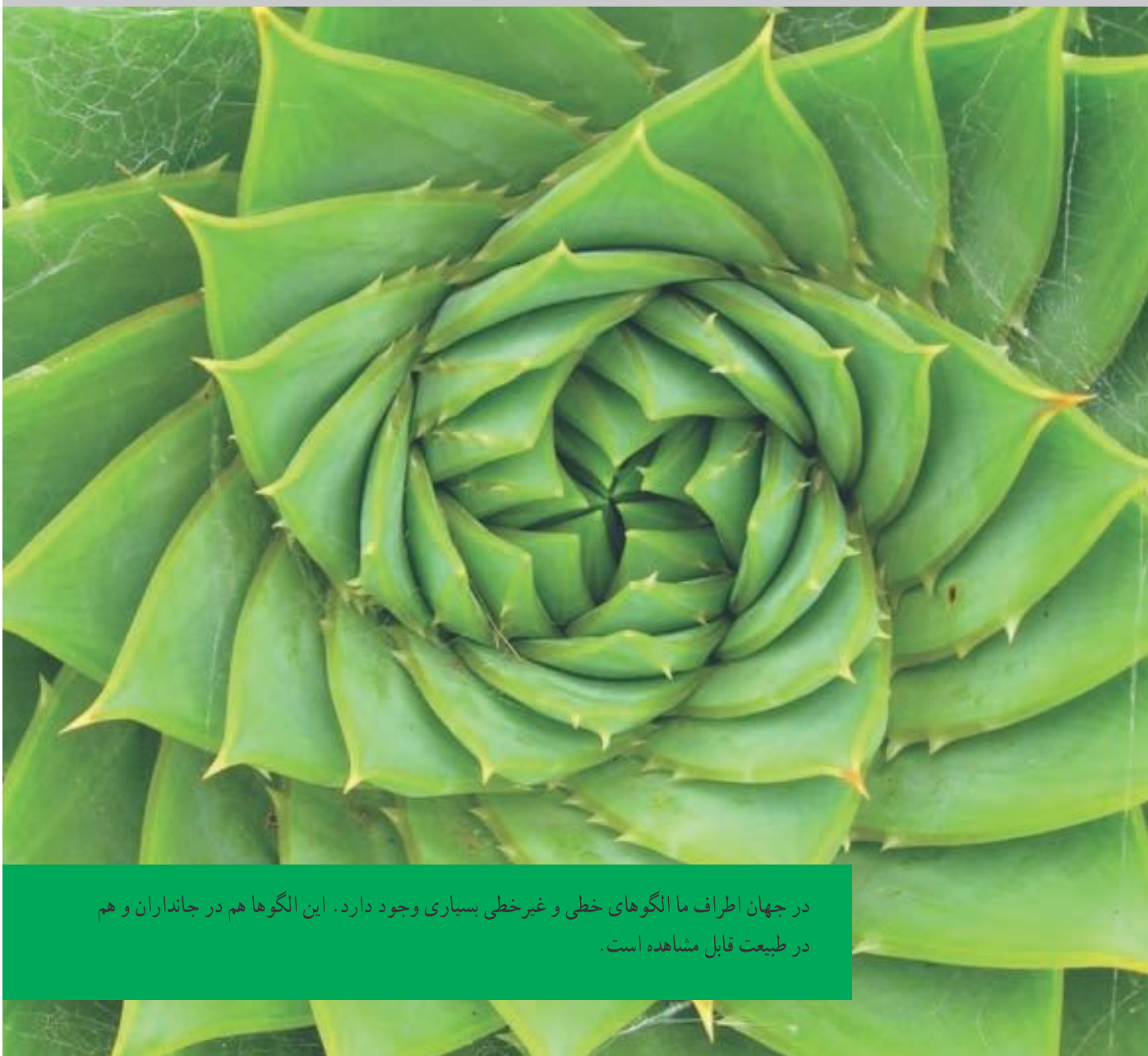
مدل سازی و دنباله

درس ۱

دنباله حسابی

درس ۲

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ (آیه ۱۹۰ سوره مبارکه آل عمران)
« و مسلماً در آفرینش آسمان‌ها و زمین و آمدورفت شب و روز نشانه‌های (روشنی) برای خردمندان است»



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

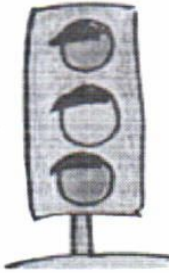
درس ۱

مدل سازی و دنباله

مدل سازی

در کتاب یازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبه قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده).

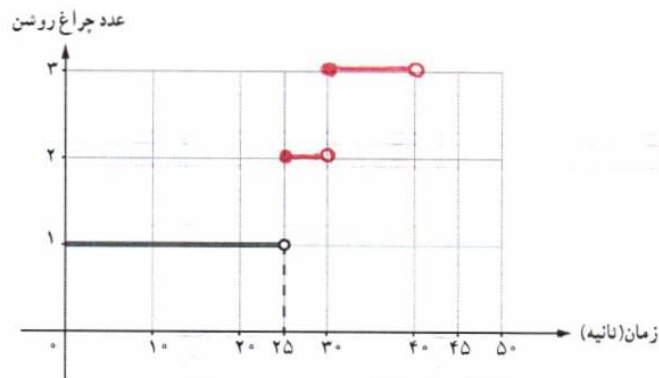
فعالیت



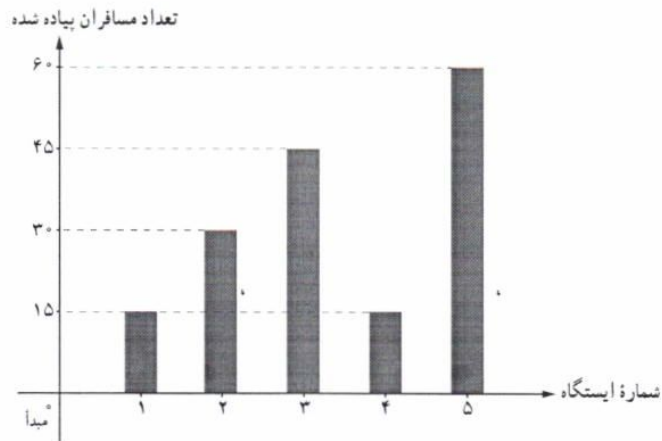
۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.
اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ام، با توجه به فرض:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases}$$

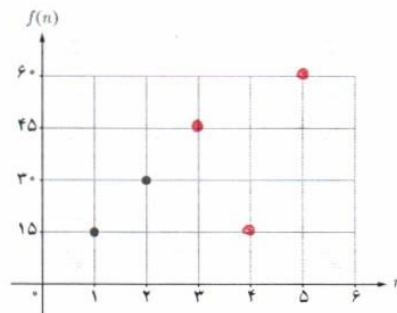
$$D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}, R_f = \{1, 2, 3\}$$



۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر Π ، شماره ایستگاه و $f(\Pi)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	۴۵	۱۵	۶۰



$$f(n) = \begin{cases} \dots 15 \cdot n \dots & 1 \leq n \leq 3 \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

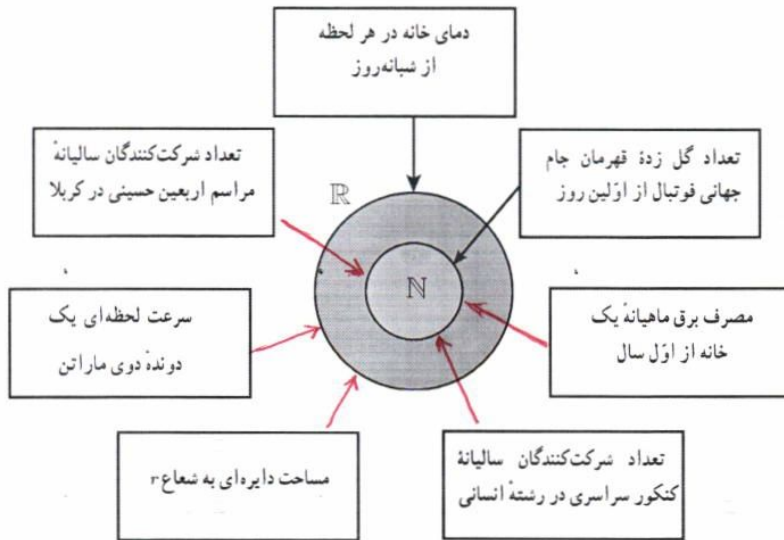
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 5\} \quad R_f = \{15, 30, 45, 15, 60\}$$

یکی از تفاوت‌های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵ام است و تابع در تمامی این زمان، قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

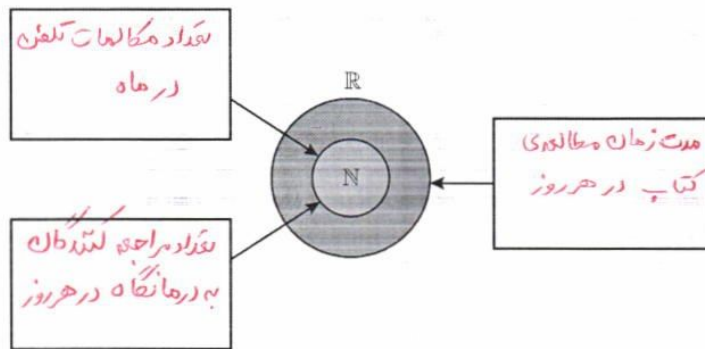
در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

کار در کلاس

۱. اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد:



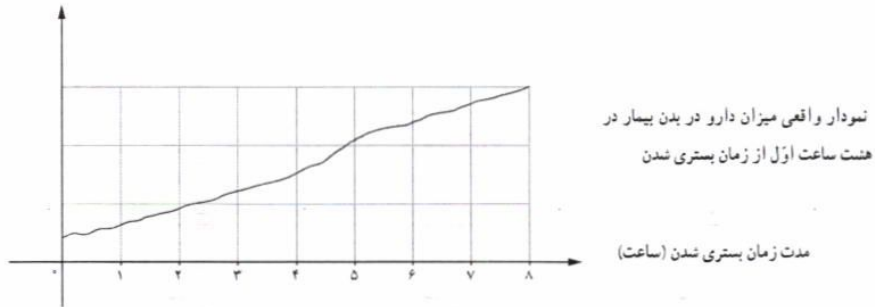
در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

کاربرد دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

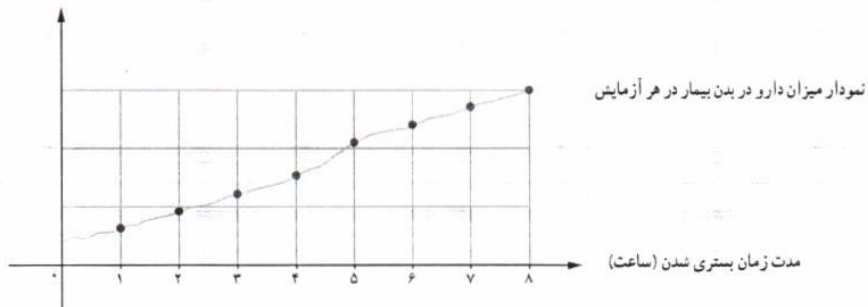
در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می‌کنیم. برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می‌تواند میزان دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه‌روز اندازه‌گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می‌کند.

به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می‌کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

میزان دارو در بدن بیمار (میلی‌گرم)



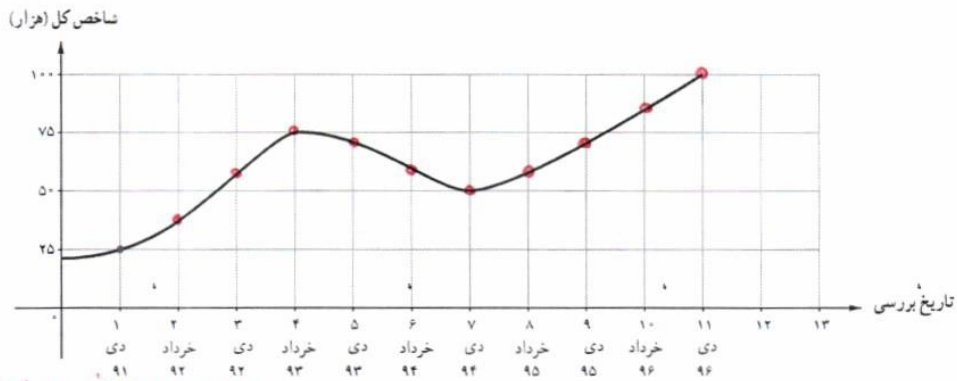
میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی‌گرم)



در فعالیت صفحه بعد، نمونه‌ای دیگر از همین کاربرد را می‌بینیم.

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران^۱ (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می دهد:



اصحیح

از دی ماه ۹۱ تا فروردین ۹۳ افزایش، از فروردین ۹۳ تا دی ۹۴
از دی ۹۴ تا فروردین ۹۵ افزایش
از فروردین ۹۵ تا دی ۹۶

الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ‌های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا $f(n)$ را مشخص کنید و در چه فاصله‌ای روند کاهشی و در چه فاصله‌ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟
ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

n (تاریخ بررسی)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$ مقدار شاخص کل (هزار)	۲۵	۳۰.۵	۶۰	۷۵	۷۰	۶۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۵	۱۰۰

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟

۸۵,۰۰۰ (۱) ۱۰۵,۰۰۰ (۲) ۱۱۲,۵۰۰ (۳) ۱۰۰,۰۰۰ (۴) ۱۲۵,۰۰۰ (۵) ✓

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰۰ واحد رسید»، «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت» اینها نمونه جملاتی است که بارها در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنایی دارند؟ بازار بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها - که در اخبار مطرح می‌شود - «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نمودار آن در فعالیت بیش بررسی شد. این شاخص از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شاخص کل سهام} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایه سهام}} \times ۱۰۰$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است.

منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در همان روز × تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایه سهام، نیز مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در روز پایه × تعداد سهام در روز بررسی»^۱ است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.

- فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

شرکت	تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۲۰ فروردین ۱۳۶۹)	قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه	تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶	قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶
A	۱۰۰۰	۴۵	۱۲۰۰	۶۰
B	۵۰۰	۳۰	۱۵۰۰	۸۰

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{۱۲۰۰ \times ۶۰ + ۱۵۰۰ \times ۸۰}{۱۲۰۰ \times ۴۵ + ۱۵۰۰ \times ۳۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۹۲۰۰۰}{۹۹۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۹۳ \times ۱۰۰ = ۱۹۳$$

عدد ۱۹۳ به معنای ۱۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فروردین ۱۳۶۹ است. توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تنهایی سود یا ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه تغییرات آن اهمیت دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰۰ به ۳۰۰۰ واحد برسد، یعنی ۵۰٪ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ۵۰٪ بوده است.

۱. فرمول بالا به روش محاسبه «لاسپیرز» (Laspeyres) معروف است.

در سال‌های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله n ام یک الگو آشنا شدیم. ^۱ عموماً این الگوها را نیز می‌توانیم به کمک تابعی با دامنه اعداد طبیعی مدل‌سازی کنیم.

فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام^۲، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می‌کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

$$a_4 = 32$$

$$a_5 = 64$$

الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

ب) بر اساس رابطه میان a_1, a_2 و رابطه میان a_2, a_3 و نیز a_3, a_4 می‌توان مقادیر a_5 و a_6 را مشخص کرد؟ چگونه؟

ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می‌آید؟ چرا؟

د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی^۳ می‌نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه‌ای معلوم کنید.

$$a_{n+1} = 2a_n \quad \& \quad a_1 = 1$$

ه) رابطه‌ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_n = 2^{n-1}$$

و) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «ج» دارد؟

در قسمت «ج» هر جمله به قبل وابسته است. در قسمت «د» هر جمله به یک جمله قبل وابسته است.

۱. کتاب ریاضی هفتم و هشتم

۲. خواندنی کتاب ریاضی دهم

الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سر هم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند. جملات دنباله عموماً به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می شوند. a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو صورت زیر بیان شود:

- (الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)
 (ب) رابطه ای برحسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

برای مثال، در دنباله

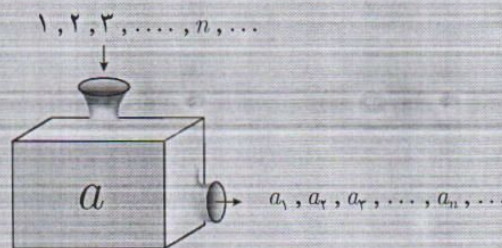
$$\begin{array}{ccccccccc} 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & \dots & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \dots & & & \end{array}$$

با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات دنباله با اضافه کردن عدد ثابت 3 به جمله پیشین به دست می آیند؛ یعنی:

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (\text{رابطه بازگشتی دنباله})$$

و یا می توان الگوی جملات دنباله را با ضابطه $a_n = 3n + 1$ نمایش داد که در این رابطه، n عددی طبیعی است و با جای گذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به طور مستقیم به دست می آید.

تعریف دنباله: همان طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد اعضای بُرد این تابع می تواند دنباله ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، جمله دوم را $a(2)$ ، جمله سوم را $a(3)$ ، ... و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می گیریم. معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می نامند.



کار در کلاس

با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳
$b_n = n^2 - 1$	۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$	$\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \dots$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$\dots, -\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -1, \dots$

مثال) برای جملات دنباله زیر:

۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳ و ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

الف) برای نوشتن رابطه بازگشتی در اولین دنباله، رابطه میان جملات دنباله را بررسی می‌کنیم:

$$a_1 = 3 \quad \text{و} \quad a_2 = 9 = 3a_1 \quad \text{و} \quad a_3 = 27 = 3 \times 9 = 3 \times 3^2 \quad \text{و} \quad a_4 = 81 = 3 \times 27$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

یعنی، هر جمله دنباله ۳ برابر جمله پیشین است. بدیهی است که تنها رابطه $a_{n+1} = 3a_n$ جملات دنباله را مشخص نمی‌کند و حتماً باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن یعنی $a_1 = 3$ نوشته شود.

ب) در نوشتن ضابطه تابعی دنباله باید رابطه میان a_n و n را مشخص کنیم:

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3^1$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 9 = 3^2$$

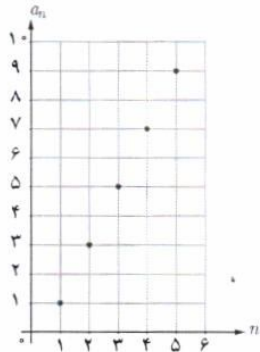
$$n=3 \rightarrow a_3 = 27 = 3^3$$

پس، ضابطه تابع به صورت $a_n = 3^n$ به دست می‌آید.

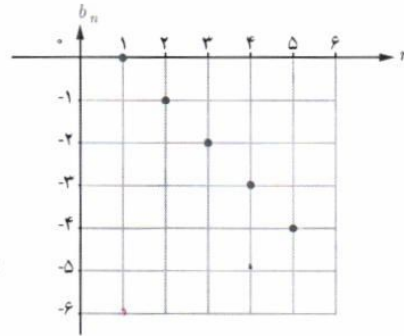
رسم دنباله

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می توان رسم کرد:

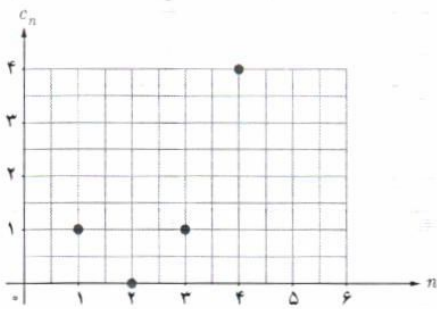
$$a_n = 2n - 1 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$



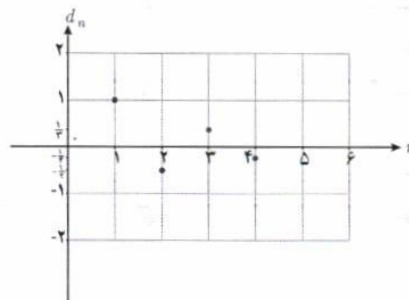
$$b_n = 1 - n \quad 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$



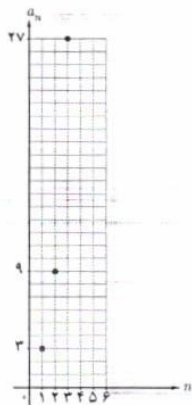
$$c_n = (n-2)^2 \quad 1, 0, 1, 4, \dots$$



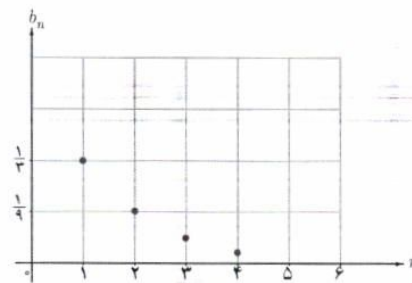
$$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$



$$e_n = 3^n$$



$$f_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$



جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	فرمول بازگشتی	ضابطه دنباله	نمودار دنباله
$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 9$	$a_n = 3^{r-n}$	
$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{4})^{n-1}$	
$3, 5, 7, 9, \dots$	$a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 3$	$a_n = 2n + 1$	
$1, 3, 6, 10, \dots$	$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$		
$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$		$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$	
$-1, -4, -9, -16, \dots$		$a_n = -n^2$	
$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$		

* دنباله فوق را دنباله فیبوناچی می نامند.

تمرین

۱. برای محاسبه قبض آب^۱ (آب بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب بها محاسبه می شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف \times میانگین مصرف = آب بها^۱

جدول ۱. محاسبه آب بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$0 \leq x < 5$	۱/۴۱۹	$25 \leq x < 30$	۸/۴۹۶
$5 \leq x < 10$	۲/۱۲۳	$30 \leq x < 35$	۱۱/۵۸۰
$10 \leq x < 15$	۲/۸۲۷	$35 \leq x < 40$	۱۵/۴۴۴
$15 \leq x < 20$	۳/۷۰۳	$40 \leq x < 50$	۳۳/۴۶۲
$20 \leq x < 25$	۵/۴۰۰	$x \geq 50$	۶۶/۹۲۴

الف) نمودار «طبقه مصرف – آب بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/49 \text{ m}^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب بها را مشخص می کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

\mathbb{N} \mathbb{R}

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

\mathbb{N} \mathbb{R}

ب) میزان استفاده دانش آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

\mathbb{N} \mathbb{R}

ج) حجم مکعبی به ضلع x

\mathbb{N} \mathbb{R}

د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

\mathbb{N} \mathbb{R}

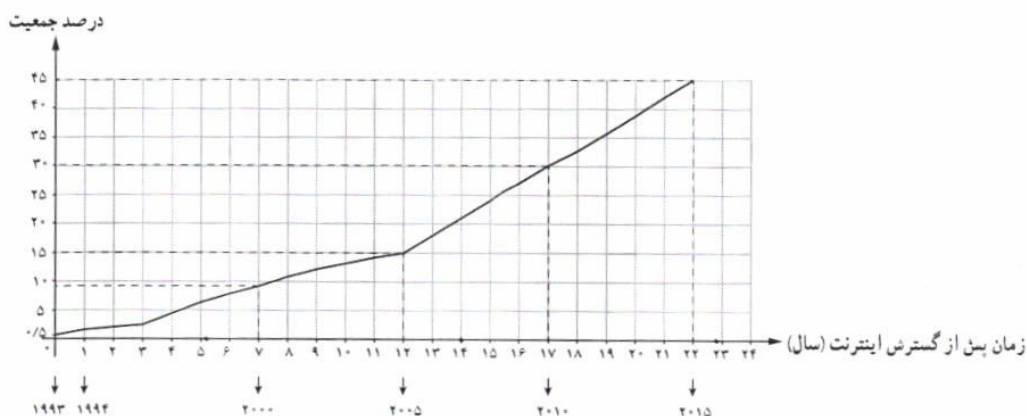
ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

۱. اطلاعات بالا از پایگاه www.tpww.ir استخراج شده است. در جدول واقعی پس از محاسبه حاصل ضرب گفته شده بر اساس طبقه مصرف عددی ثابت از عدد به دست آمده، کم می شود.

۲. با توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، مشترکان تقریباً $\frac{1}{3}$ هزینه واقعی تولید آب را می پردازند. هزینه آب در مقایسه با کشورهای منطقه و بسیاری از کشورهای جهان در ایران بسیار پایین است.

۳. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران 18 m^3 است.

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند^۱:



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(1)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_7 + b_7$

ب) $c_7 - d_7$

ج) $b_7 + d_7$

۶. جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ ، $a_1 = -2$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، $a_1 = 1$

ج) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$

^۱ . data.worldbank.org

۷. جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...			
۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...			
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$			
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$			

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

ب) $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2$

د) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی \sqrt{k} نزدیک شویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_1 را تقریبی برای \sqrt{k} در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

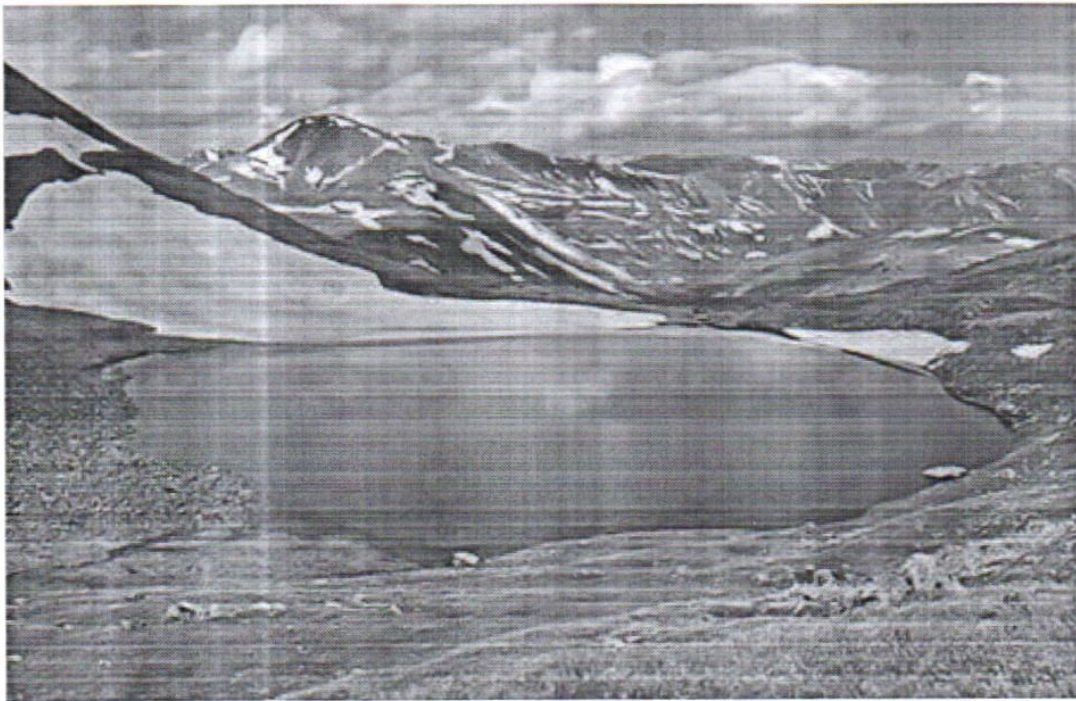
ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟



۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پَس مانده‌های صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالیانه ۱٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی‌اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است. اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.



دریاچه گنجر، لرستان

بازی و ریاضی

آیا می‌توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

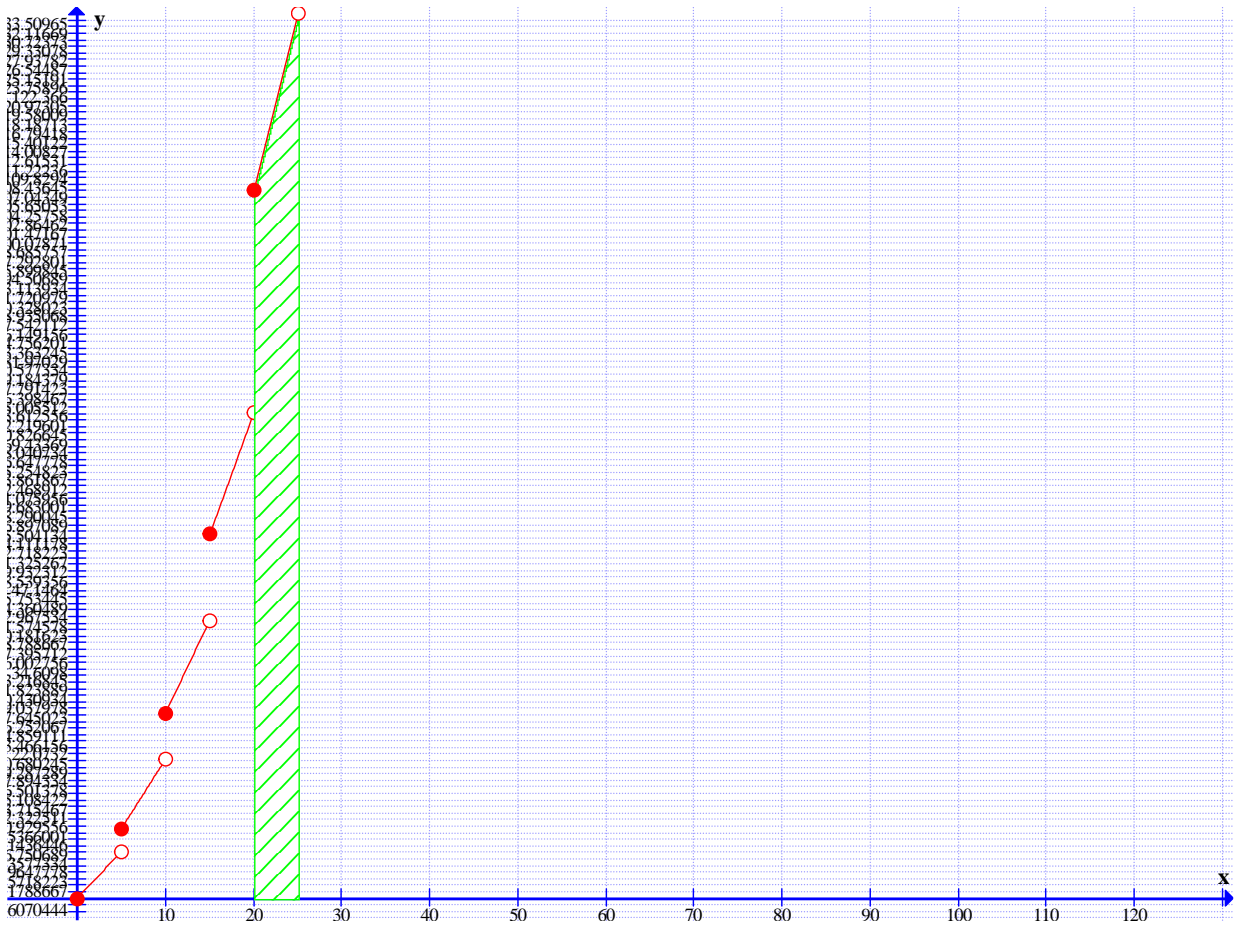
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_1 = a_2 = 1$$

۱، ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ۶، ۷، ...

حل تمرینهای صفحه ۵۷

تمرین ۱:

الف:



ضابطه:

طبقه ۱ $f(x) = 1/419x \quad 0 \leq x < 5$

طبقه ۲ $f(x) = 2/123x \quad 5 \leq x < 10$

.....

طبقه آخر $f(x) = 66/927x \quad x \geq 50$

برد = $[0, 7/0.95) \cup [10/615, 42/40.5) \cup \dots \cup [3346/2, +\infty)$

دامنه = $[0, +\infty)$

ب:

طبقه پنجم $f(20/49) = 5/400 \times 20/49 = 110/646$

تمرین ۲:

N	R	مورد
	✓	الف
✓		ب
	✓	ج
✓		د
✓		هـ

تمرین ۳:

الف:

$$f(1) = 0.5 \text{ و } f(7) = 9$$

درصد استفاده از اینترنت در سال اول و سال هفتم بعد از ۱۹۹۳ را نشان می دهند.

ب:

t	۲۰۰۵	۲۰۱۵
$f(t)$	۱۵	۴۵

$$m = \frac{45 - 15}{2015 - 2005} = \frac{30}{10} = 3$$

شیب خط

$$h = y_0 - mt_0 = 15 - 3(2005) = 15 - 6015 = -6000$$

$$y = mt + h \rightarrow y = 3t - 6000$$

$$f(t) = 3t - 6000$$

ضابطه‌ی تابع خطی

$$f(2020) = 3(2020) - 6000 = 6060 - 6000 = 60$$

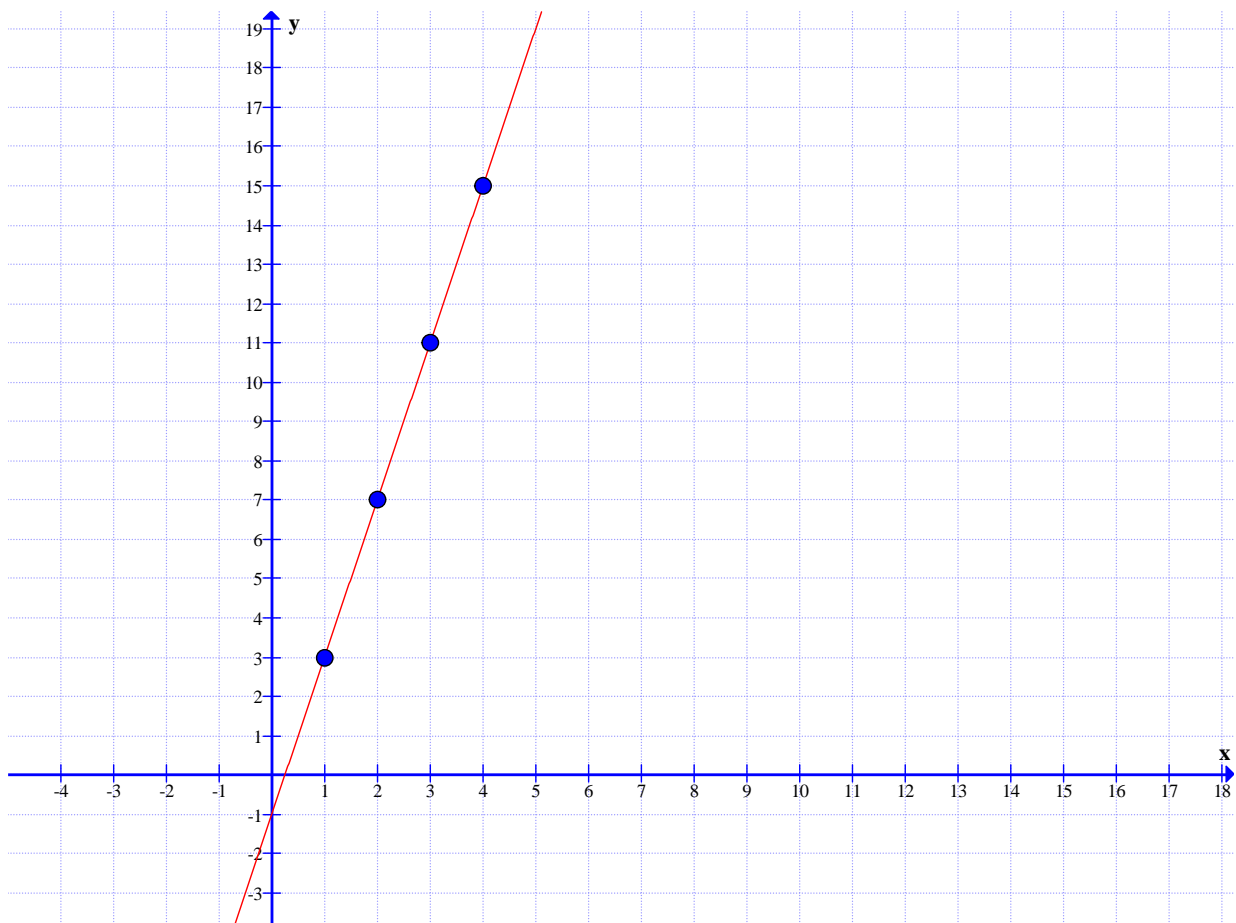
درصد استفاده از اینترنت در سال ۲۰۲۰

تمرین ۴:
الف: تابع خطی

$y = 4x - 1$		
x	۱	۲
y	۳	۷

دنباله

$a_n = 4n - 1$				
n	۱	۲	۳	۴
a_n	۳	۷	۱۱	۱۵



نمایش تابعی $a_n = 4n - 1$

ب: رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+1} = a_n + 4$

شیب خط برابر ۴ می باشد. به طور کلی (m شیب خط)

$$a_{n+1} = a_n + m$$

تمرین ۵:

$$\text{الف) } a_2 + b_1 = 3^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{1+1} = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$$

$$\text{ب) } c_2 - d_1 = \left(\frac{1}{3(2)-1}\right) - (2^2 - 1) = \frac{1}{5} - 3 = -\frac{14}{5}$$

$$\text{ج) } b_4 + d_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + (2^2 - 1) = \frac{1}{16} + 3 = \frac{49}{16}$$

تمرین ۶:

(الف)

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n ; a_1 = -2$$

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{2}{27}$$

$$a_5 = \frac{1}{3}a_4 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{27}\right) = -\frac{2}{81} \quad \text{جمله ی پنجم}$$

(ب)

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{1+a_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$a_5 = \frac{1}{1+a_4} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} \quad \text{جمله ی پنجم}$$

(ج)

$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} ; a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1$$

$$n=1 \rightarrow a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1+1+1=3$$

$$n=2 \rightarrow a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1+1+3=5 \quad \text{جمله ی پنجم}$$

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = a_1 + (-1)^1 = 1 + (-1) = 0$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = a_2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$$

$$n = 3 \rightarrow a_4 = a_3 + (-1)^3 = 1 + (-1) = 0$$

$$n = 4 \rightarrow a_5 = a_4 + (-1)^4 = 0 + 1 = 1 \quad \text{جمله ی پنجم}$$

تمرین ۷:

ردیف اول:

.... و ۱۷ و ۱۴ و ۱۱ و ۸ و ۵

$$a_{n+1} = a_n + 3 ; a_1 = 5$$

$$a_n = 3n + 2 \quad \text{ضابطه ی دنباله}$$

ردیف دوم:

.... و ۱ و ۴ و ۱ و ۴ و ۱ و ۴

$$a_{2n-1} = a_1 ; a_1 = 4 \quad \text{و} \quad a_{2n} = a_2 ; a_2 = 1$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ فرد} \\ 4 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

ردیف سوم:

.... و $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{4}$ و ۳ و $\frac{1}{2}$ و ۱

$$a_n = \begin{cases} n & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

ردیف چهارم:

.... و $\frac{4}{5}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{ضابطه ی دنباله}$$

تمرین ۸:

الف:

$$a_1 = 11$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3(11) + 1 = 34$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}(34) = 17$$

$$n = 3 \rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3(17) + 1 = 52$$

$$n = 4 \rightarrow a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}(52) = 26$$

$$n = 5 \rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3(26) + 1 = 79$$

.... و ۷۹ و ۲۶ و ۵۲ و ۱۷ و ۳۴ و ۱۱ دنباله

ب:

$$a_1 = 25$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3(25) + 1 = 76$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}(76) = 38$$

$$n = 3 \rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3(38) + 1 = 115$$

$$n = 4 \rightarrow a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}(115) = \frac{115}{2}$$

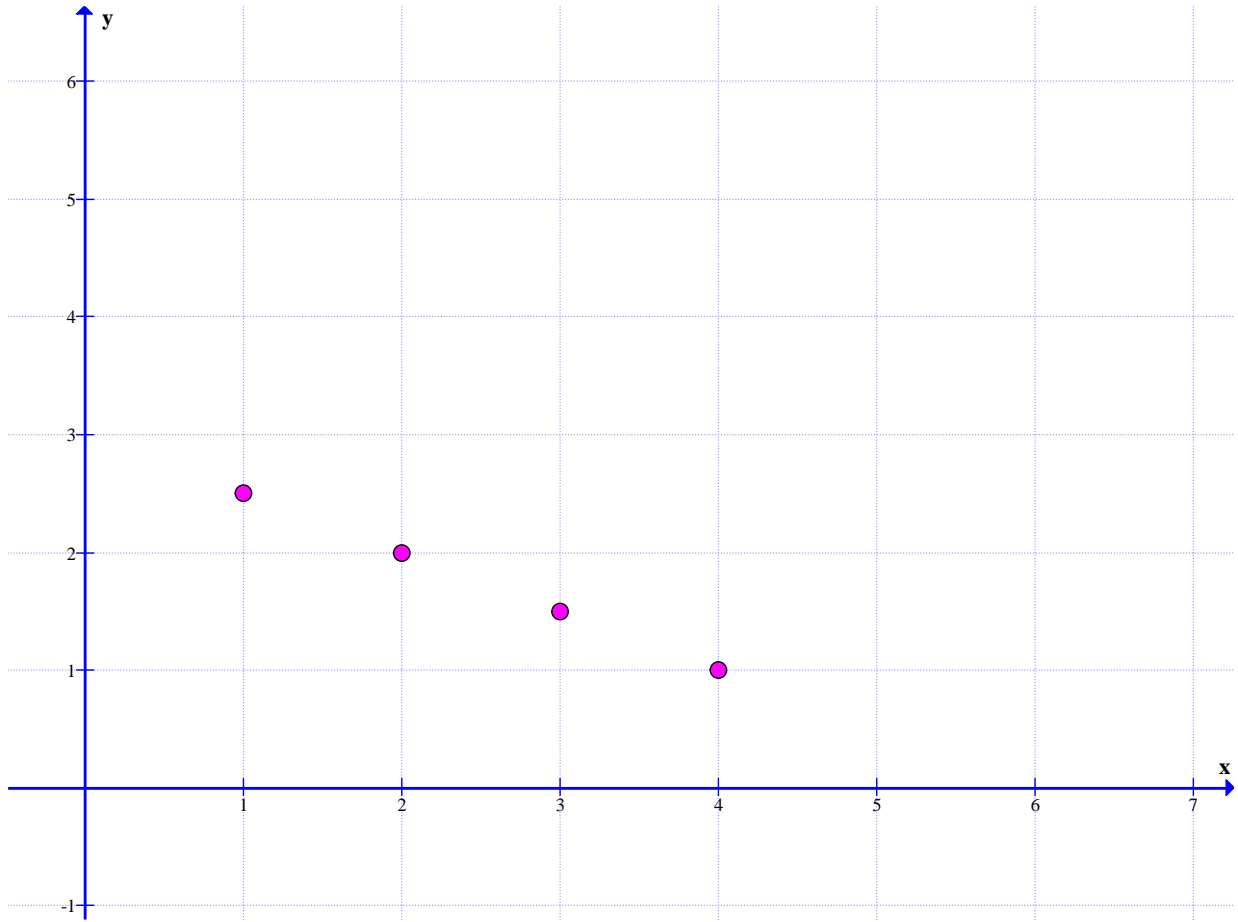
$$n = 5 \rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3\left(\frac{115}{2}\right) + 1 = \frac{123}{2}$$

.... و $\frac{123}{2}$ و $\frac{115}{2}$ و ۱۱۵ و ۳۸ و ۷۶ و ۲۵ دنباله

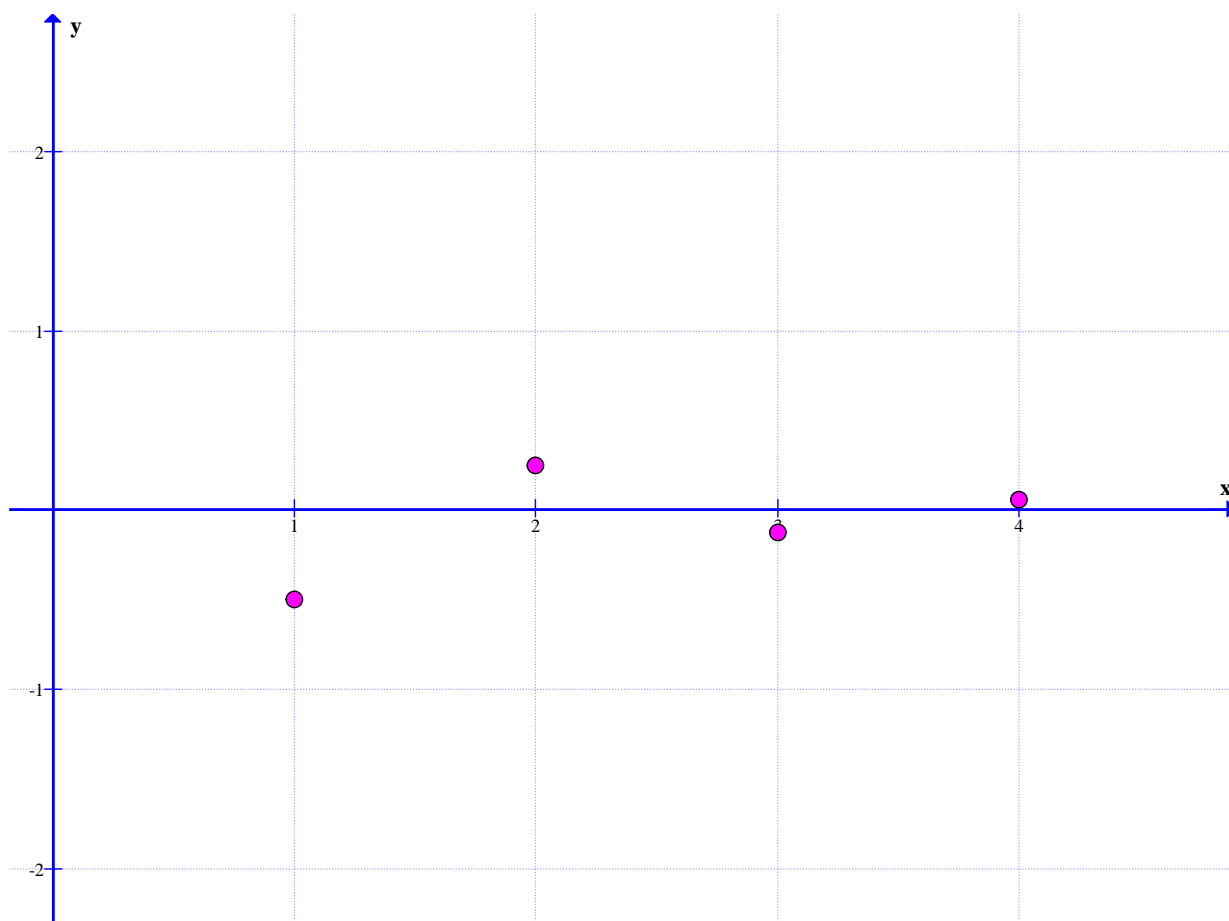
تمرین ۹:

الف:

$a_n = -\frac{1}{2}n + 3$				
n	۱	۲	۳	۴
a_n	$\frac{5}{2}$	۲	$\frac{3}{2}$	۱

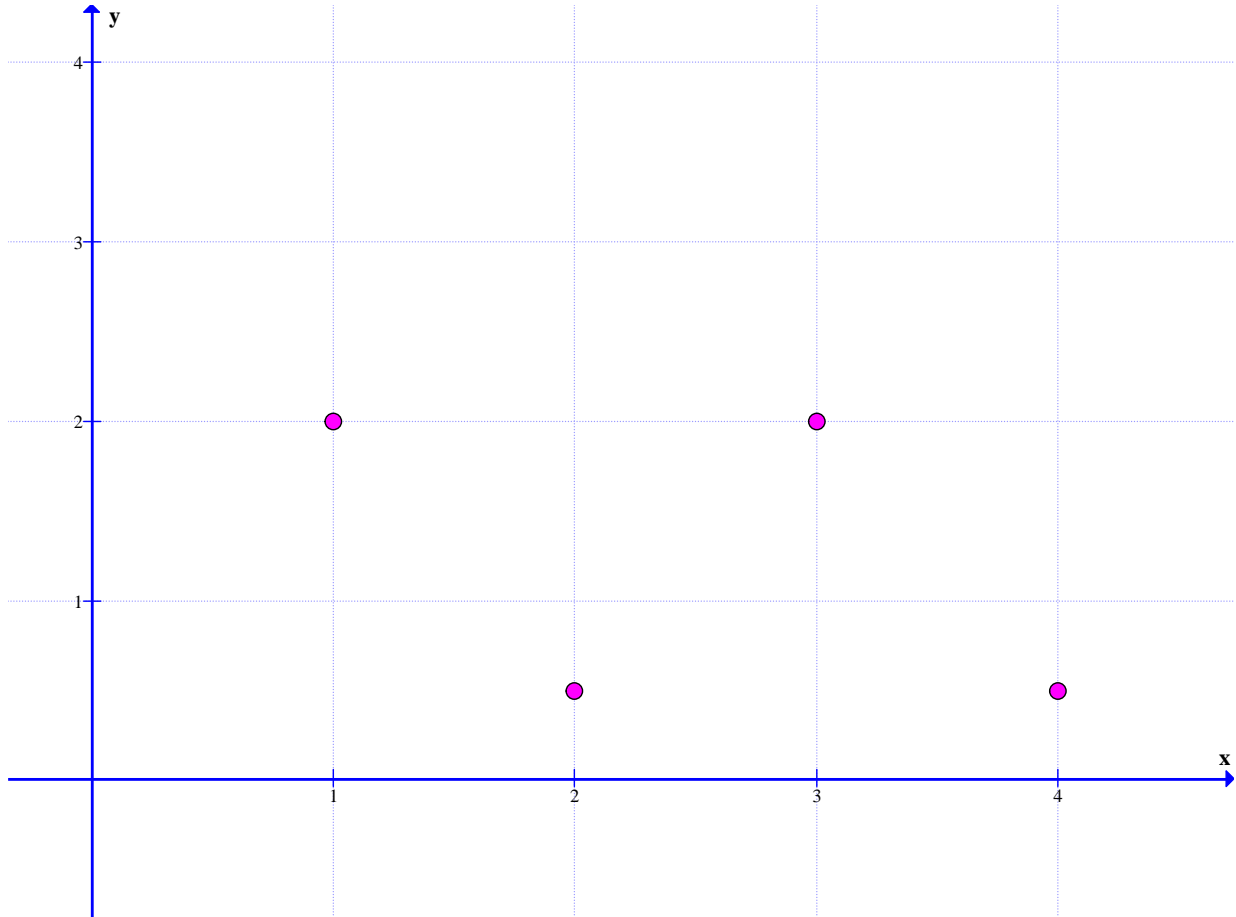


$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$				
n	۱	۲	۳	۴
a_n	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



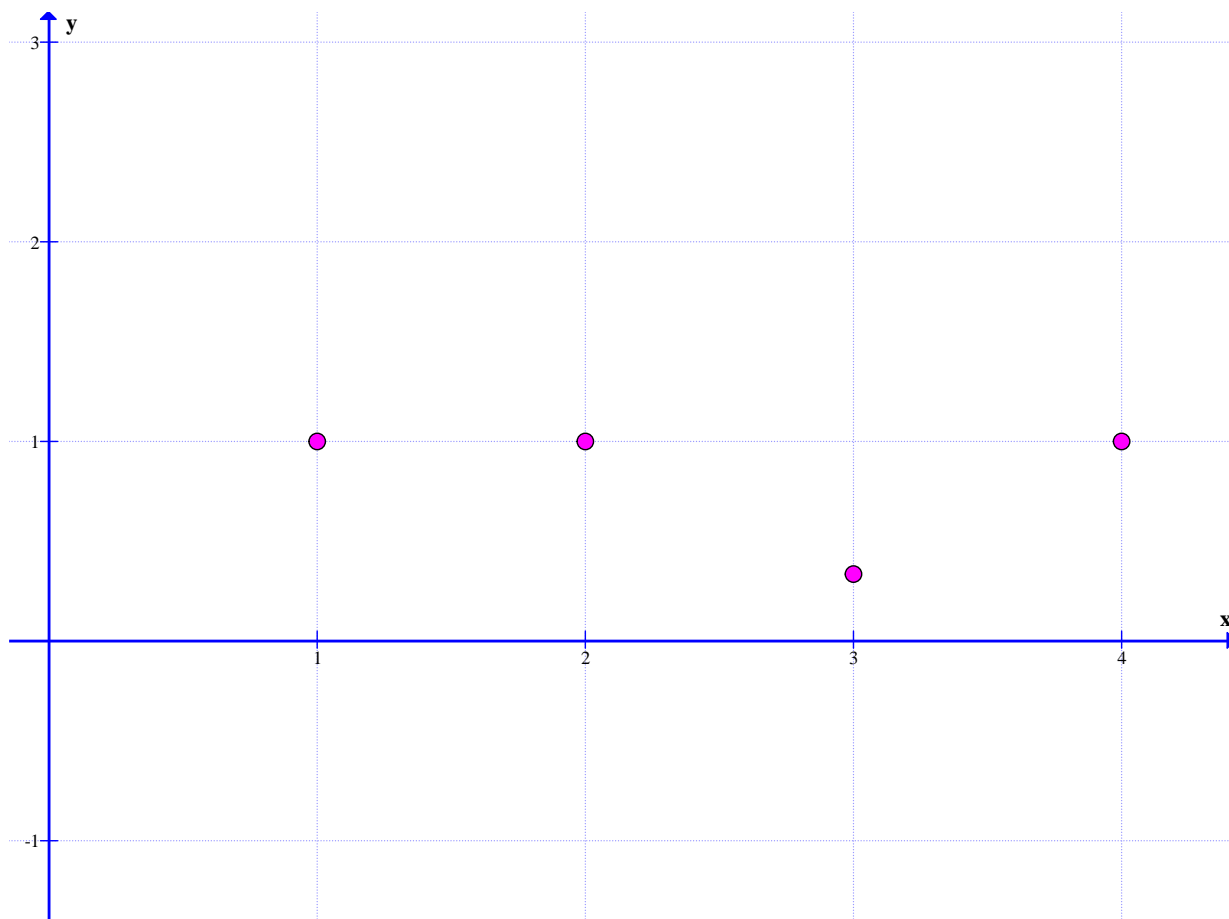
$$a_1 = 2 \text{ , } a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} \text{ , } a_3 = \frac{1}{a_2} = 2 \text{ , } a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

n	1	2	3	4
a_n	2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$



$$a_1 = 1 \text{ و } a_2 = 1 \text{ و } a_3 = \frac{1}{3} \text{ و } a_4 = 1$$

n	١	٢	٣	٤
a_n	١	١	$\frac{1}{3}$	١



تمرین ١٠:

الف: $k = 2$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) ; a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{2}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{17}{12} \approx 1.416$$

ب: $k = 3$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) ; a_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{3} \right) = \frac{1}{2} (3 + 1) = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{3}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4} \approx 1.75$$

ج: $k = 5$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right) ; a_1 = 5$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{5}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{5}{5} \right) = \frac{1}{2} (6) = 3$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{5}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33$$

مزیت این روش این است که در صورت عدم دسترسی به ماشین حساب، به راحتی

محاسبه‌ی مقدار تقریبی ریشه‌ی دوّم اعداد طبیعی را تعیین کرد.

تمرین ۱۱:

$$a_{n+1} = a_n + (n + 1) ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow a_2 = a_1 + (1 + 1) = 1 + 2 = 3$$

$$n = 2 \rightarrow a_3 = a_2 + (2 + 1) = 3 + 3 = 6$$

.... و ۶ و ۳ و ۱ دنباله

این دنباله با جملات الگوی الف مطابقت دارد.

تمرین ۱۲:

$$P_{n+1} = P_n - \frac{1}{10} P_n - 15 ; P_1 = 250$$

$$n = 1 \rightarrow P_2 = P_1 - \frac{1}{10} P_1 - 15 = 250 - \frac{1}{10}(250) - 15 = 250 - 25 - 15 = 210$$

پایان سال اول

$$n = 2 \rightarrow P_3 = P_2 - \frac{1}{10} P_2 - 15 = 210 - \frac{1}{10}(210) - 15 = 210 - 21 - 15 = 174$$

پایان سال دوم

$$n = 3 \rightarrow P_4 = P_3 - \frac{1}{10} P_3 - 15 = 174 - \frac{1}{10}(174) - 15 = 174 - 17.4 - 15 = 141.6$$

پایان سال سوم

$$\begin{aligned} n = 4 \rightarrow P_5 &= P_4 - \frac{1}{10} P_4 - 15 = 141.6 - \frac{1}{10}(141.6) - 15 \\ &= 141.6 - 14.16 - 15 = 112.44 \end{aligned}$$

پایان سال چهارم

$$\begin{aligned} n = 5 \rightarrow P_6 &= P_5 - \frac{1}{10} P_5 - 15 = 112.44 - \frac{1}{10}(112.44) - 15 \\ &= 112.44 - 11.244 - 15 = 86.196 \end{aligned}$$

پایان سال پنجم

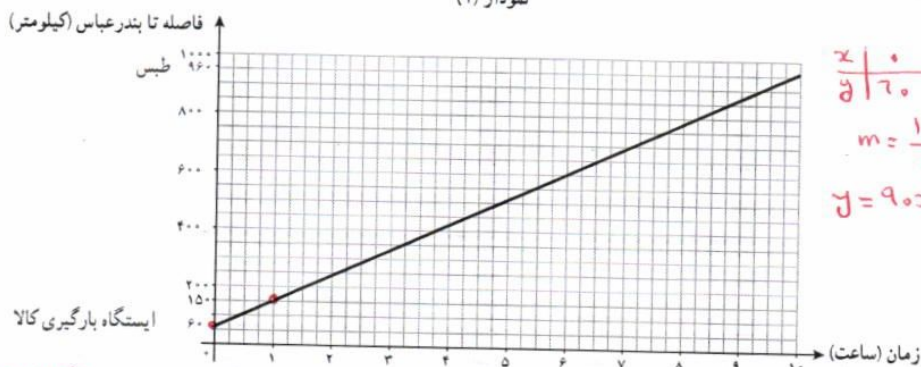
درس ۲

دنباله‌های حسابی

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان - زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می‌کند.

نمودار (۱)



$$\begin{array}{l} x \mid 0 \quad 1 \\ y \mid 60 \quad 150 \\ \hline m = \frac{150 - 60}{1 - 0} = 90 \\ y = 90x + 60 \end{array}$$

$$y = 90x + 60$$

ضابطه

$$0 \leq x \leq 10$$

دامنه

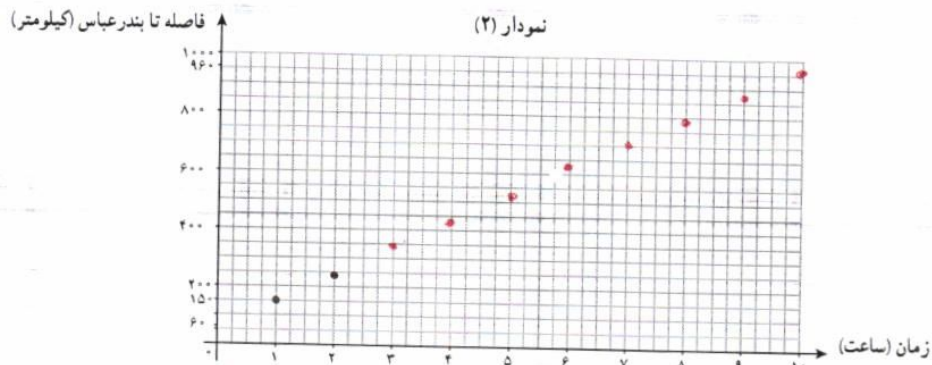
$$60 \leq y \leq 1000$$

برد

الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را به دست آورید.

ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

نمودار (۲)

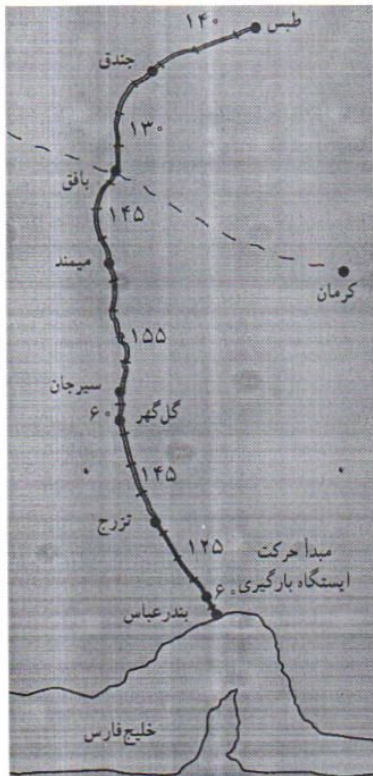


ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

۶۱

دامنه و برد نمودار (۱) زیر مجموعاً از اعداد صحیح
ولی دامنه و برد نمودار (۲) زیر مجموعاً از اعداد طبیعی است.

(د) جدول ۱ را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.



جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
تزرچ - گل گهر	۱۴۵	$۱۸۵ + ۱۴۵ = ۳۳۰$
گل گهر - سیرجان	۶۰	$۳۳۰ + ۶۰ = ۳۹۰$
سیرجان - میمند	۱۵۵	$۳۹۰ + ۱۵۵ = ۵۴۵$
میمند - بافق	۱۴۵	$۵۴۵ + ۱۴۵ = ۶۹۰$
باقف - جندق	۱۳۰	$۶۹۰ + ۱۳۰ = ۸۲۰$
جندق - طیس	۱۴۰	$۸۲۰ + ۱۴۰ = ۹۶۰$

(ه) با فرض اینکه a_n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = 60 + 90 = 150$	$a_2 = a_1 + 90 = 150 + 90 = 240$	$a_3 = a_2 + 90 = 240 + 90 = 330$	$a_4 = a_3 + 90 = 330 + 90 = 420$	$a_5 = a_4 + 90 = 420 + 90 = 510$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$a_6 = a_5 + 90 = 510 + 90 = 600$	$a_7 = a_6 + 90 = 600 + 90 = 690$	$a_8 = a_7 + 90 = 690 + 90 = 780$	$a_9 = a_8 + 90 = 780 + 90 = 870$	$a_{10} = a_9 + 90 = 870 + 90 = 960$

(و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاه ها محل تماس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

ایستگاه بافق مقایسه مسافت و فاصله

از دو جدول

۶۲

$a_7 = 790$
فاصله ۷۹۰ کیلومتری

ز) با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + \dots + 1 \cdot 9^\circ \\ a_3 = a_1 + \dots + 2 \cdot 9^\circ \\ a_4 = a_3 + \dots + 2 \cdot 9^\circ \\ a_4 = a_1 + \dots + 3 \cdot 9^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{10} + \dots + 9 \cdot 9^\circ \\ a_{11} = a_1 + \dots + 10 \cdot 9^\circ \\ a_8 = a_7 + \dots + 2 \cdot 9^\circ \\ a_8 = a_5 + \dots + 3 \cdot 9^\circ \end{cases}$$

(۸-۵)

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 9^\circ \quad (۱)$$

$$a_n - a_{n-1} = \dots + 9 \cdot 9^\circ \quad (\text{رابطه بازگشتی})$$

$$a_n - a_m = (n-m) \cdot 9^\circ$$

ح) کدام ویژگی دنباله a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟ **افزایش شدن 9° در هر جمله بر اساس جمله قبلی**
 ط) رابطه (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با ضابطه تابع به دست آمده در قسمت «الف» دارد؟

$$a_n = a_1 + (n-1)(9^\circ)$$

$$\rightarrow a_n = a_1 + 9^\circ n - 9^\circ$$

$$a_1 = 15^\circ \rightarrow a_n = 9^\circ n + 6^\circ$$

$$y = 9^\circ x + 6^\circ$$

دنباله حسابی^۱

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در فعالیت، یعنی دنباله «مسافت طی شده در هر گزارش»، این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه‌ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می‌شود. چنین دنباله‌هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از افزایش شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله‌های «حسابی» نامیده می‌شوند.

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جمله n ام این دنباله با

$$\text{رابطه } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ معرفی می‌شود.}$$

« d » را اختلاف مشترک^۱ دنباله حسابی می‌نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار

ثابت d است.

۱. Arithmetic Sequence

۲. Common Difference

کار در کلاس

۱. ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

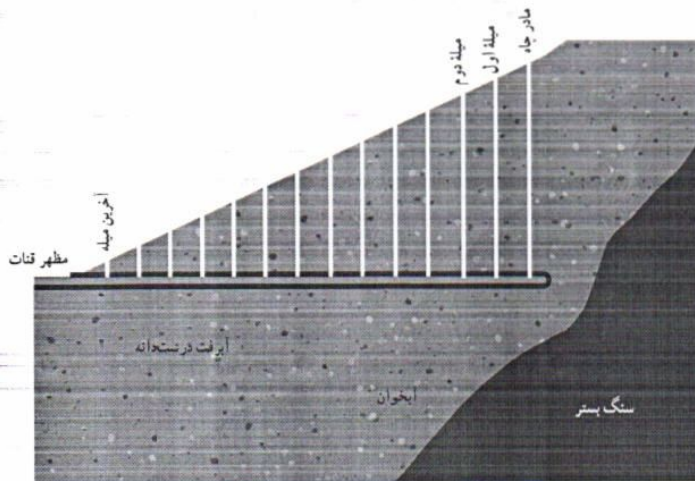
$$a_{n+1} - a_n = d$$

۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟
 اگر d مثبت باشد، هر چه d افزایش یابد، d منفی باشد، هر چه d کاهش یابد، d صفر باشد، هر چه d صفر باشد، هر چه d صفر باشد، هر چه d صفر باشد.

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
a	d	$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \dots$	$a_n = a + (n-1)d$
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...	$a_n = 2 + 3(n-1)$
۴	-۳	۴, ۱, -۲, -۵, -۸, ...	$a_n = 4 + (n-1)(-3)$
۴	$-\frac{1}{2}$	$4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2, \dots$	$a_n = 4 + (n-1)(-\frac{1}{2})$
-۳	۵	-۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ...	$a_n = -3 + 5(n-1)$

کار در کلاس

قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیرزمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنی در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می‌شوند.



در یک منطقه، مقنی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میله اول $\frac{29}{5}$ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله $\frac{1}{5}$ متر باشد، این مقنی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

عمق میله اول $\frac{29}{5}$ متر
 عمق میله آخر $\frac{1}{5}$ متر
 $a_1 = \frac{29}{5}, a_2 = 29, \dots, a_n = \frac{1}{5}$

۱. مقنی: به کسی می‌گویند که کانال را حفر می‌کند.

تعداد چاه‌ها = n

تعداد چاه‌ها

$$\rightarrow -29 = -\frac{1}{5}n \rightarrow n = 58$$

$$a_n = a_1 + (n-1)(-\frac{1}{5})$$

$$\rightarrow 1,5 = 30 + (n-1)(-\frac{1}{5}) \rightarrow 1,5 - 30 = -\frac{1}{5}n + \frac{1}{5} \rightarrow -28,5 - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}n$$

خواندنی

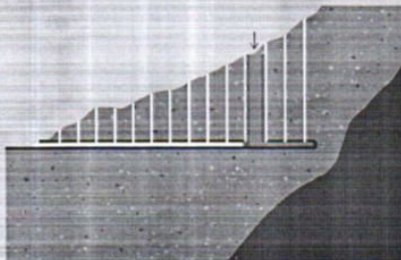
سدهی کهن در دل خاک

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نوبا، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشته سرزمینمان متوجه می‌شویم که چگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کاریز و قنات، به استفاده بهینه از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. چنان که در سفرنامه ناصرخسرو به قنات گناباد اشاره شده است: قناتی با عمق مادر چاه بیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج ۱۰۰ طبقه و با عمری سه هزارساله.

حفر صدها چاه و ایجاد هزاران متر کانال قنات برای انتقال آب حتی با وسایل امروزی، آن هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت فرسا، کاری بس عظیم و بی‌همتاست که نه تنها نشان از صبر و شکیبایی دارد، بلکه شاید بیش از هر چیز بیانگر عشق نیاکان ما به زندگی و تلاش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معضل عظیم بی‌آبی را نه تنها علتی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با دانش و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار متر مکعب خاک را از اعماق زمین جا به جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی‌شان فراهم سازند. تنها با نگاه به یکی از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارج یزد که برای ایجاد آن بیش از هشتاد هزار متر کانال و چاه در دل کویر حفر شده است و با دانستن اینکه یک مقنی شاید در طول یک روز بیش از دو یا سه متر حفاری انجام نمی‌داده است، مشخص می‌شود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وقفه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز و هر لحظه آن جدال مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا با ریزش خاک به ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق چندین ده متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زنده ماندن مقنی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کار هر روزه خود را با لباس سفید و اشهدگویان شروع می‌کرده‌اند.

فرهنگ ایجاد کاریز افزون بر موارد فوق، نشان از دیگر جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد شیبی ملایم هنگام حفر کانال و به کمک گرانز زمین‌نیزی به وجود پمپ برای انتقال آب نبوده است. با توجه به نبود وسایل مهندسی



امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویه حفر، انجام دادن این عمل در گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کاریز، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون چاه‌ها را ممکن می‌ساخته است. از آن رو که در سدهای آبی مقادیر زیادی از آب در معرض خورشید تبخیر می‌شود، پیشینیان ما با بستن آب در انتهای یکی از میله چاه‌ها، آب را توسط چاه‌های قنات در اعماق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کرده‌اند؛ به بیانی دیگر، قنات‌ها سدهایی زیرزمینی بوده‌اند^۱.

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی ملل متحد (فائو) با عنوان «اهمیت میراث سیستم‌های سنتی کشاورزی» سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نیل به توسعه پایدار، نوشته شده است: «قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کاریز، دست کم به ۸۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد و نزدیک به سه هزاره زنده مانده است. شبکه آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور پایدار، امنیت غذایی و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد.»

بیش از ۴۰ هزار قنات در ایران منابع پایدار با ارزشی هستند که توجه دوباره به آنها شاید بخشی از راه‌حل سازگاری با شرایط اقلیمی کشورمان در جهت تأمین منابع آب باشد؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوباره آنها نیاز به هزاران میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نیاکانمان با شکیبایی و عشق برای ما به یادگار گذاشته‌اند.

۱. طبق گزارش‌های رسمی، میانگین بارش جوی کشور ۴۱۳ میلیارد متر مکعب است که نزدیک به ۲۹۶ میلیارد متر مکعب آن در سال تبخیر می‌شود. اگر نفوذ منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن توسط قنات‌ها تنها ده درصد از تبخیر آب را کاهش دهد، به طور میانگین نزدیک به ۳۰ میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.

فعالیت

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3 + 2(1-1) = 3 + 0 = 3$$

$$n=6 \rightarrow a_6 = 9$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 3 + 2(2-1) = 3 + 2 = 5$$

دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

$$n=3 \rightarrow a_3 = 3 + 2(3-1) = 3 + 4 = 7$$

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق می‌کنند؟

$$m = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

بسط

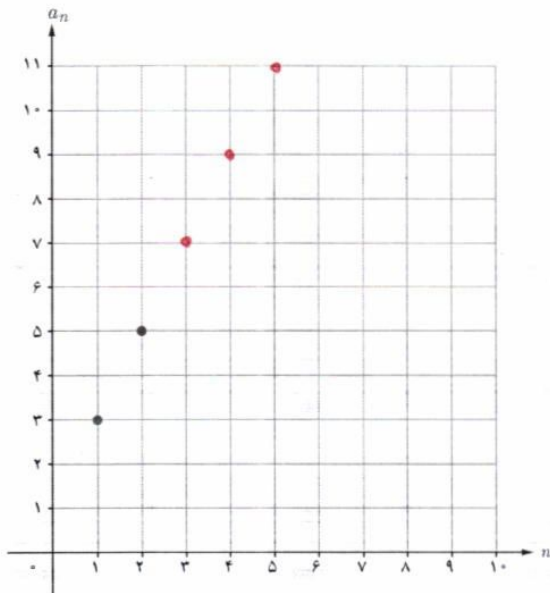
$$y = 2x + 1$$

معادله خط

ج) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟

$$d = m = 2$$

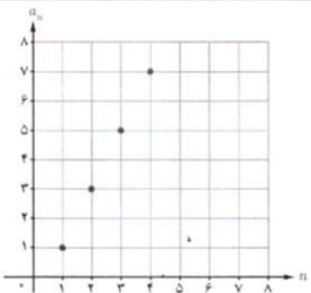
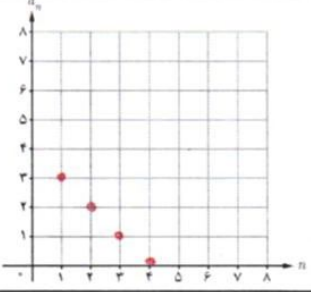
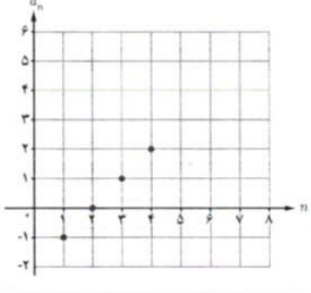
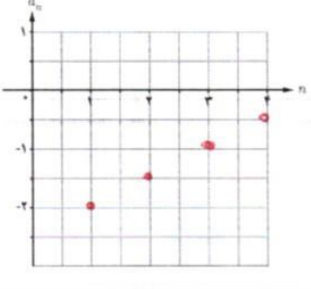
مساویند.



اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	1, 3, 5, 7	
$y = -x + 4$	$a_n = -n + 4$	3, 2, 1, 0, ...	
$y = x - 2$	$a_n = n - 2$	-1, 0, 1, 2, ...	
$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$	$a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	

خط

$y = mx + h$

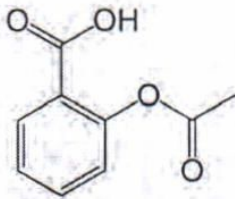
عرض از مبدأ

$h = y_1 - mx_1$

ضابطه

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

فعالیت



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود. اگر شخصی که سابقهٔ سکتهٔ قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، 25° میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونس کاهش یابد:

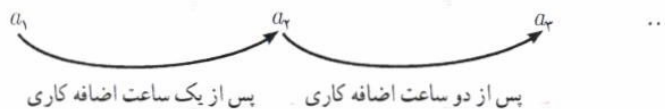
الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش 13° میلی‌گرم می‌شود؟

ب) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او 13° میلی‌گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهیانه $2,600,000$ تومان است که 10% آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانهٔ او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را 30 روزه در نظر بگیرید.)
با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۱۱ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنبالهٔ عددی پیروی می‌کند؛ زیرا:



بنابراین، اگر a_n میزان دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات باشد، جملهٔ آخر دنباله باید برابر با مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطه

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

باید

۱. این داروها را در داروشناسی Zero Order Kinetics می‌نامند.

حل فعالیت صفحه ی ۶۸

شروع	پایان ساعت اول	پایان ساعت دوم	پایان ساعت سوم	پایان ساعت چهارم	پایان ساعت پنجم	پایان ساعت ششم	پایان ساعت هفتم	پایان ساعت هشتم
۲۵۰	۲۳۵	۲۲۰	۲۰۵	۱۹۰	۱۷۵	۱۶۰	۱۴۵	۱۳۰

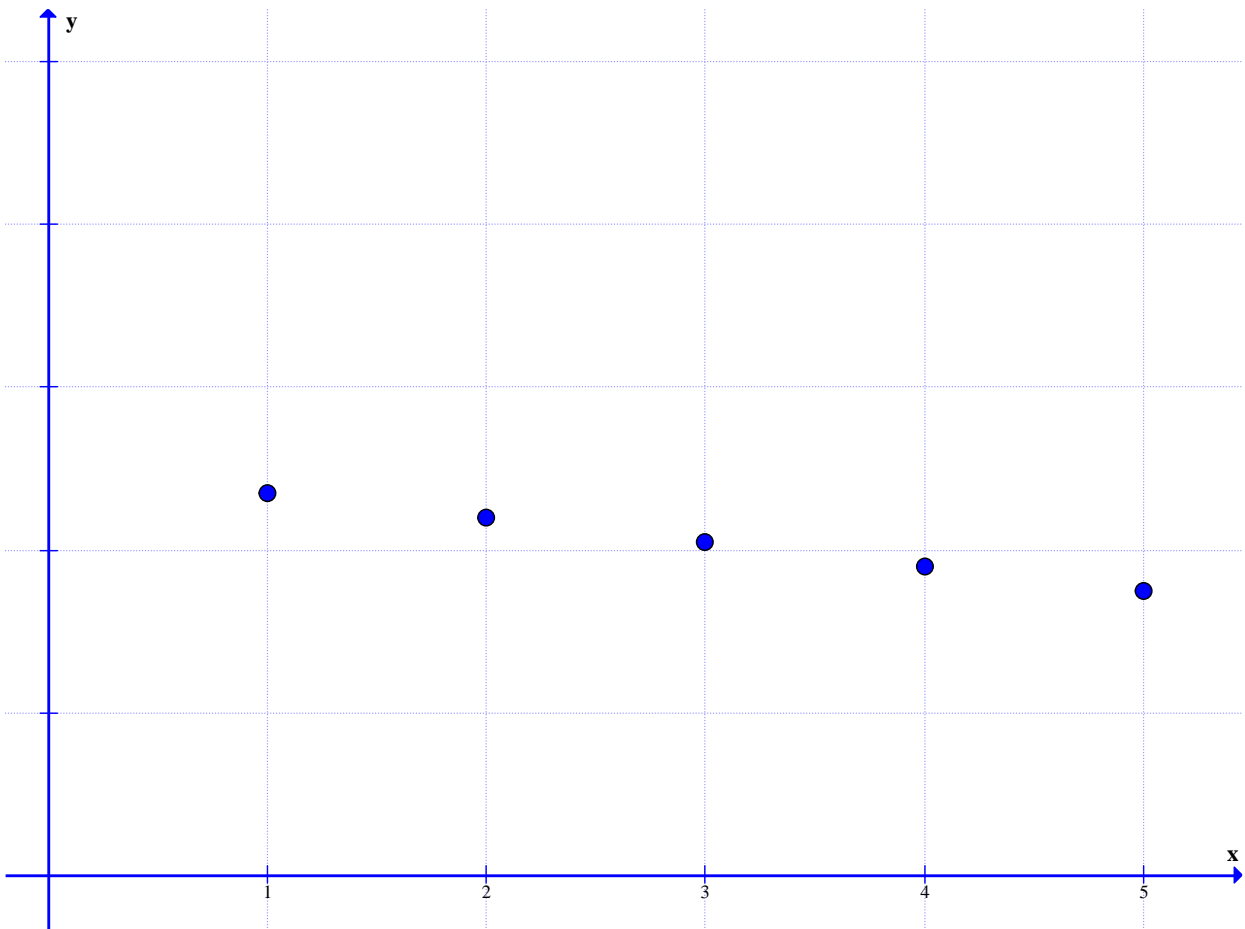
$$a_1 = 235 \text{ و } a_2 = 205 \text{ و } a_3 = 190 \text{ و } \dots$$

الف: در محاسبه از الگوی دنباله ی حسابی استفاده می کنیم.

$$a_n = -15n + 250 \xrightarrow{a_n = 130} -15n + 250 = 130 \rightarrow -15n = -120 \rightarrow n = 8$$

طبق جدول و الگوی پس از ۸ ساعت سطح دارو به ۱۳۰ میلی گرم می رسد.

ب:



شروع (n)	پایان ساعت اول	پایان ساعت دوم	پایان ساعت سوم	پایان ساعت چهارم	پایان ساعت پنجم	پایان ساعت ششم	پایان ساعت هفتم	پایان ساعت هشتم
۲۵۰	۲۳۵	۲۲۰	۲۰۵	۱۹۰	۱۷۵	۱۶۰	۱۴۵	۱۳۰
b_m	*	*	*	*	۴۲۵	۴۱۰	۳۹۵	۳۸۰
m	*	*	*	*	*	۱	۲	۳

$$b_1 = 410 \text{ و } b_2 = 395 \text{ و } b_3 = 380 \text{ و } \dots$$

$$b_n = -15m + 425 \xrightarrow{b_m=130} -15m + 425 = 130 \rightarrow -15m = -295 \rightarrow m = 19/66$$

لذا پس از $24/6 = 4 + 19/6 = 5$ ساعت (۲۴ ساعت و ۱۰ دقیقه) مجدداً میزان دارو به ۱۳۰ میلیگرم می

رسد.

حل کاردر کلاس صفحه ی ۶۸

$$260000 \times \frac{10}{100} = 260000 \quad \text{مالیات حقوق ثابت (تومان)}$$

$$260000 - 260000 = 2340000 \quad \text{دریافتی ثابت (تومان)}$$

$$3000000 = \text{دریافتی کل اضافه کاری + دریافتی ثابت}$$

$$2340000 + \text{دریافتی کل اضافه کاری} = 3000000 \quad \text{(تومان)}$$

$$\rightarrow \text{دریافتی کل اضافه کاری} = 660000 \quad \text{(تومان)}$$

این میزان اضافه کاری مورد نیاز است. حال چون دریافتی اضافه کاری برای هر ساعت برابر ۱۱۰۰۰ تومان است. لذا این شخص باید $660000 \div 11000 = 60$ ساعت کار کند.

و چون ماه را ۳۰ روزه فرض می کنیم. این شخص باید روزی $60 \div 30 = 2$ ساعت کار کند، تا دریافتی

وی به ۳ میلیون تومان برسد.

به کمک دنباله ی حسابی نیز می توان این محاسبه را انجام داد.

روز اول	روز دوم	روز سوم	...	روز n ام
۱۱۰۰۰	۲۲۰۰۰	۳۳۰۰۰	...	۱۱۰۰۰n

$$a_n = 11000n \xrightarrow{a_n=660000} 660000 = 11000n \rightarrow n = 60 \quad \text{تعداد ساعات اضافه کاری}$$

مجموع n جمله اول یک دنباله عددی

در فعالیت «محاسبه تعداد چاه‌های قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ چاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, \dots, 29/5, 30$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مفتی در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مفتی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع چاه‌های گفته شده را حفر کند.

الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق چاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمق‌ترین چاه و بار دیگر از کم عمق‌ترین تا عمیق‌ترین چاه با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$S_{58} = 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5$$

$$S_{58} = 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30$$

$$2S_{58} = 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

ب) با توجه به اینکه مفتی روزانه ۲ متر چاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/75 = \frac{913}{150}$$

بنابراین، مفتی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به دست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع چاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$

کار در کلاس

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به دست آورید.

a_1, a_2, \dots, a_n $d=5$

۱۹۹ و ۹ و ۴ و ۱- (الف)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$199 = -1 + (n-1)(5) \rightarrow 200 = 5n - 5 \rightarrow n = \frac{205}{5} = 41$$

$$S_{41} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{41}{2}(-1 + 199) = 4059$$

ب) $a_{n+1} = 5 + a_n, a_1 = -2$ $S_{10} = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

$-2, 3, 8, 13, 18, \dots$ $n=10$

$d=5$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(-2) + (10-1)(5)) = 5(-4 + 45) = 205$$

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

$a_1 = 1$ $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(2) = 2n-1$ $a_{30} = 2(30) - 1 = 59$

$$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15(1 + 59) = 900$$



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

$15, 18, 21, \dots$

$S_n = 870, d=3, a_1=15$
 $n=?$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow 870 = \frac{n}{2}(30 + 3n - 3) \xrightarrow{\times 2}$$

$$1740 = \frac{n}{2}(27 + 3n) \rightarrow 1740 = n(27 + 3n) \rightarrow 3n^2 + 27n - 1740 = 0$$

با توجه به معلوم بودن $S_n = 870$ برای به دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطه

با جای گذاری $d=3, a_1=15$ در رابطه بالا $n=20$ به دست می‌آید.

$$\xrightarrow{\div 3} n^2 + 9n - 580 = 0 \rightarrow (n-20)(n+29) = 0 \begin{cases} n=20 \\ n=-29 \end{cases}$$

۷۰

چون n باید عدد طبیعی باشد.

تمرین

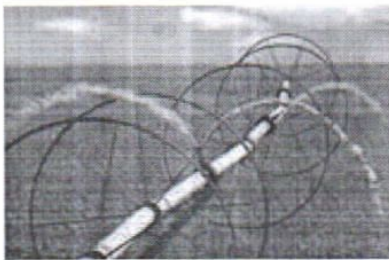
۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$ ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$ د) $a_{n+1} - a_n = n$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

۵. در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن 12500 گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین 1875 گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b عدد را به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{\frac{p}{m}+1}$ به‌دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۷. براساس رابطه به‌دست آمده در مسئله ۸، سه عدد را به‌گونه‌ای میان اعداد 1 و 18 قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۸. مجموع عددهای زیر را به‌دست آورید.

الف) 1 و 5 و 9 و و 401

ب) 13 و و 81 و 85 و 89



۹. باغداران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

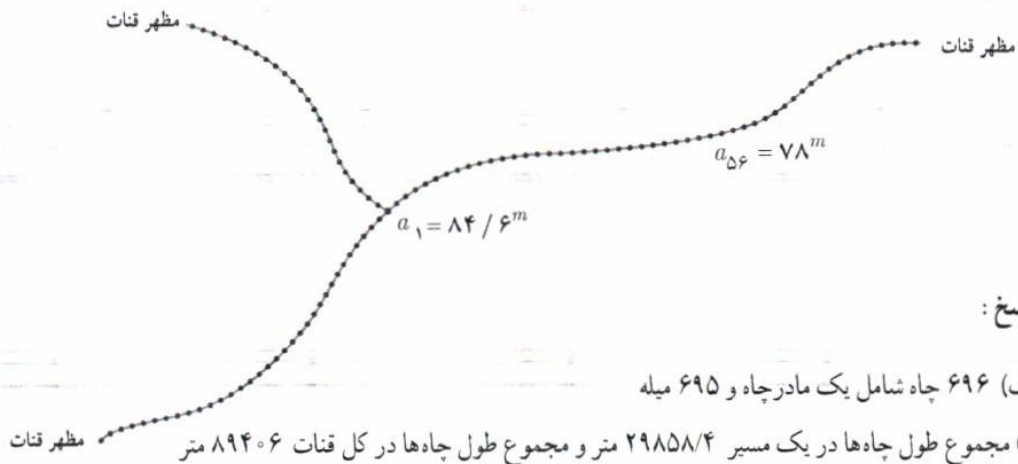
۱۰. ارزش امروزی قنات زارج، طولانی‌ترین قنات ایران — عمق مادرچاه قنات زارج $۸۴/۶$ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود):

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفرشده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفرشده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵ هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارج در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارج چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه n ام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



پاسخ:

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر $۲۹۸۵۸/۴$ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹۴۰۶ متر

ج) ۲۲,۳۵۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

د) ۴۷,۲۰۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

تمرین ۱:

..... و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ و ۲ (الف) و ۱۴ و ۹ و ۴ و -۱ (ب)

..... و -۱۹ و -۴ و -۱ (ج)

د)

$n = 1$	$a_2 - a_1 = 1$
$n = 2$	$a_3 - a_2 = 2$
$n = 3$	$a_4 - a_3 = 3$
$n = 4$	$a_5 - a_4 = 4$
$n = 5$	$a_6 - a_5 = 5$
.....

در این مسئله جمله‌ی اول تعریف نشده است. اگر قرار دهیم $a_1 = k$ این دنباله به شکل زیر در می آید.

..... و $k + 15$ و $k + 10$ و $k + 6$ و $k + 3$ و $k + 1$ و k

مثلاً برای $k = 1$ می شود.

..... و ۱۶ و ۱۱ و ۷ و ۴ و ۲ و ۱

دنباله بند **ب** یک دنباله‌ی حسابی است ولی بقیه‌ی دنباله‌ها نیستند.

تمرین ۲:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 555 = -5 + (n-1)(8) \rightarrow 560 = 8n - 8$$

$$\rightarrow 560 = 8n - 8 \rightarrow 568 = 8n \rightarrow n = \frac{568}{8} = 71$$

تمرین ۳:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_1=a} \begin{cases} a_{11} = a + 10d \rightarrow a + 10d = 52 \\ a_{19} = a + 18d \rightarrow a + 18d = 92 \end{cases}$$

$$\rightarrow (a + 18d) - (a + 10d) = 92 - 52 \rightarrow 8d = 40 \rightarrow d = 5$$

$$a + 10d = 52 \xrightarrow{d=5} a + 50 = 52 \rightarrow a = 2$$

اکنون برای تعیین جمله‌ی سوّم به شکل زیر عمل می کنیم.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{30} = 2 + (30-1)(5) = 147$$

تمرین ۴:

a_1	a_2	a_3		a_{12}
۳	۸	۱۳		؟

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{12} = 3 + (12-1)(5) = 58$$

فاصله‌ی دوازدهمین (آخرین) چرخ تا موتور برابر ۵۸ متر است که برابر شعاع دایره ای است که این میله آبیاری می‌کند.

$$\text{متر مربع } S = \pi (58)^2 \approx 10562/96 \text{ مساحت آبیاری شده}$$

تمرین ۵:

$$a_1 = 12500 - 1875 = 10625$$

$$a_2 = 10625 - 1875 = 8750$$

$$a_3 = 8750 - 1875 = 6875$$

$$a_4 = 6875 - 1875 = 5000$$

این دنباله یک دنباله حسابی است و در آن $a_1 = 10625$ و $d = 1875$ پس:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\rightarrow a_6 = 10625 + (6-1)(-1875) = 1250 \text{ (گرم) پس از ۶ هفته}$$

تمرین ۶: می‌توان دنباله ای حسابی در نظر گرفت که جمله‌ی اول آن a و جمله‌ی آخر آن b باشد. اگر قرار است بین b و a به تعداد m جمله قرار گیرد. در این صورت واضح است که این دنباله دارای $n = m + 2$ جمله است.

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = b \end{cases} \rightarrow a_n - a_1 = b - a \rightarrow (a_1 + (n-1)d) - a_1 = b - a$$

$$\rightarrow (n-1)d = b - a \rightarrow d = \frac{b-a}{n-1} \xrightarrow{n=m+2} d = \frac{b-a}{(m+2)-1} = \frac{b-a}{m+1}$$

تمرین ۷:

$$d = \frac{b-a}{m+1} \rightarrow d = \frac{18-10}{3+1} = 2$$

لذا دو دنباله‌ی زیر را می توان نوشت :

.... و ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰

.... و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و ۱۸

تمرین ۸:

الف) اگر b جمله‌ی آخر و a جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی باشد. در این صورت: $b = a + (n - 1)d$
لذا می توان نتیجه گرفت :

$$n = \frac{b - a}{d} + 1$$

در اینجا نیز می توان نوشت:

$$n = \frac{b - a}{d} + 1 = \frac{401 - 1}{4} + 1 = 101$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) = \frac{101}{2}(1 + 401) = 101 \times 201 = 20301$$
 مجموع جملات

(ب)

$$n = \frac{b - a}{d} + 1 = \frac{13 - 89}{-4} + 1 = 20$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) = \frac{20}{2}(89 + 13) = 10 \times 102 = 1020$$

تمرین ۹: می توان یک دنباله‌ی حسابی در نظر گرفت که در آن جمله‌ی اول ۱۲۵ و جمله‌ی آخر ۴۵ و اختلاف مشترک ۱۰ - باشد. در این مسئله تعداد جملات و مجموع جملات مورد نظر است.

$$n = \frac{b - a}{d} + 1 = \frac{125 - 45}{-10} + 1 = 9$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) = \frac{9}{2}(125 + 45) = 9 \times 85 = 765$$
 متر = ۷/۶۵ سانتی متر

