فصل

۲ مثلثات

انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به‌هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

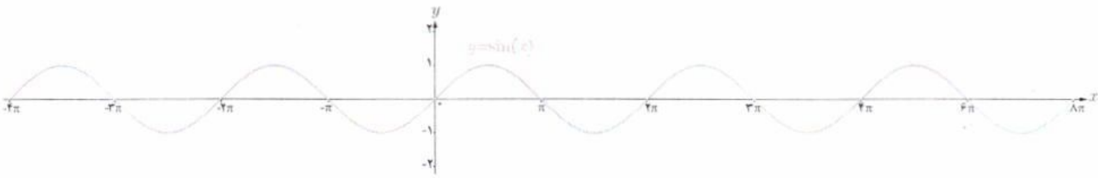
درس اوّل — تناوب و تانژانت

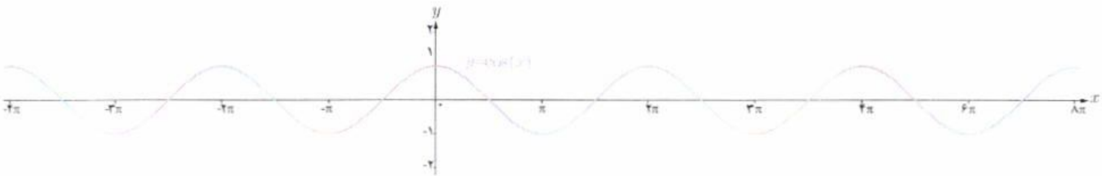
درس دوم — معادلات مثلثاتی

درس اول

تناوب و تانژانت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها یکسان است ($\sin(x \pm ۲k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm ۲k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول ۲π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



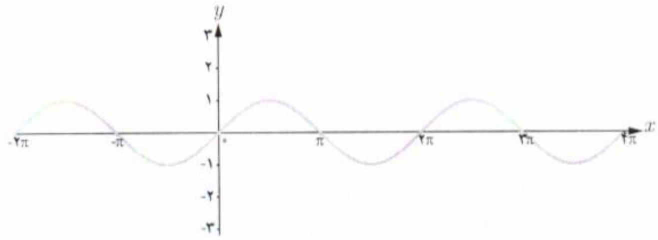
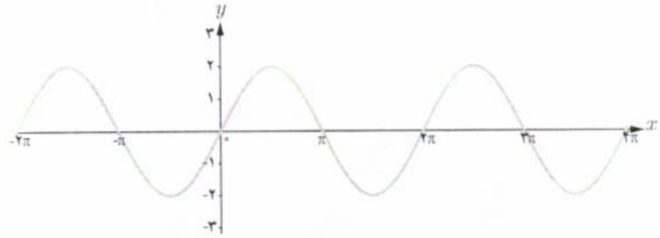
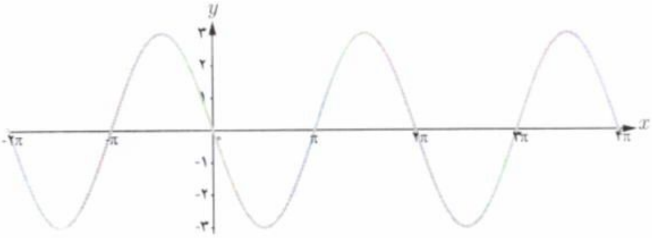
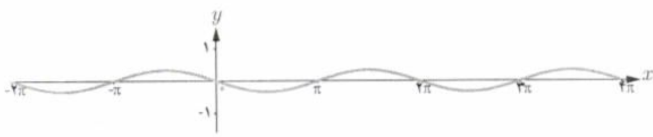


با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان ۲π است. چنین توابعی را توابع متناوب و ۲π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف : تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$.
کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin x$ $(f(x) = \cos x)$ برابر ۲π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و ۱- است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y=\sin x$		۱	-۱	۲π
$y=۲\sin x$		۲	-۲	۲π
$y=-۳\sin x$		۳	-۳	۲π
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$		$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۲π
$y=-\frac{۱}{۳}\sin x$		$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۲π

با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید.

$y=a\sin x$: $a>0 \rightarrow Max=a\ ,\ Min=-a$; $a<0 \rightarrow Max=-a\ ,\ Min=a$ $\xRightarrow{\text{به طور کلی}}$ $Max=|a|\ ,\ Min=-|a|$, دوره تناوب $=T=۲\pi$

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است.
با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

میدانیم در این معادلات نمودار تابع به اندازه c واحد در راستای محور yها بالا یا پایین می رود $\Rightarrow$ پس c روی مقادیر y تاثیر می گذارد و روی مقادیر x تاثیر ندارد $\Rightarrow Max=|a|+c\ ,\ Min=-|a|+c$, دوره تناوب $=T=۲\pi$

$$y=a\cos x \Rightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow Max=a(1)=a\ ,\ Min=a(-1)=-a \\ a<0 \Rightarrow Max=a(-1)=-a\ ,\ Min=a(1)=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Max=|a| \\ Min=-|a| \end{cases}$$

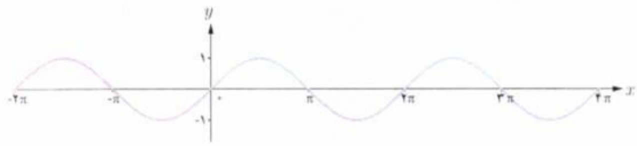
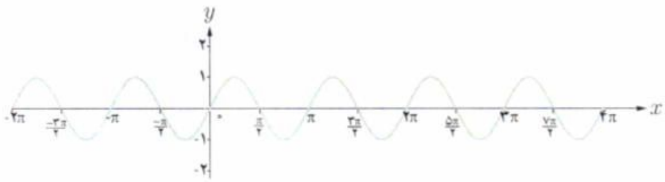
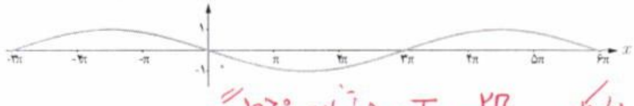
دوره تناوب $=T=۲\pi$

$$y=a\sin x+c \rightarrow Max=|a|+c\ ,\ Min=-|a|+c$$

دوره تناوب $T=۲\pi$

فعالیت

با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شدهٔ زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y=\sin x$		۱	-۱	۲π
$y=\sin ۲x$		1	-1	π
$y=\sin(-۳x)$		1	-1	$\frac{2\pi}{3}$
$y=\sin\frac{x}{۲}$		1	-1	4π
$y=\sin(-\frac{x}{۳})$		1	-1	6π

$y=\sin bx \Rightarrow \max=1\ ,\ \min=-1\ ,$ اگر $b>0$ دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{b}$ بطور کلی $\Longrightarrow$ دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}$
~~اگر~~ $b<0$ دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{-b}$

با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ را مشخص نمایید.

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx+c$ چگونه است.
با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=\cos bx$ و $y=\cos bx+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

$y=\sin bx+c \longrightarrow$ مقدار C همانطور که قبلاً گفته شد روی y تأثیر می‌گذارد $\Longrightarrow \max=1+c\ ,\ \min=-1+c$ دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}$

$y=\cos bx \Rightarrow \max=1,\ \min=-1,$ دوره تناوب $\Rightarrow \begin{cases} b>0 \rightarrow T=\frac{2\pi}{b} \\ b<0 \rightarrow T=\frac{2\pi}{-b} \end{cases} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$

$y=\cos bx+c \Rightarrow \max=1+c\ ,\ \min=-1+c\ ,$ دوره تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}$

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$

و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال : دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3\sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4}\cos(\pi x)$

پ) $y = \pi\sin(-x) + 1$

ت) $y = 8\cos(\frac{x}{3})$

حل :

الف) $\max = |3| - 2 = 1 \qquad \min = -|3| - 2 = -5 \qquad T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

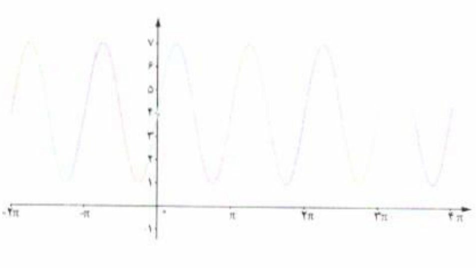
ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \qquad \min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4} \qquad T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1 \qquad \min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi \qquad T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

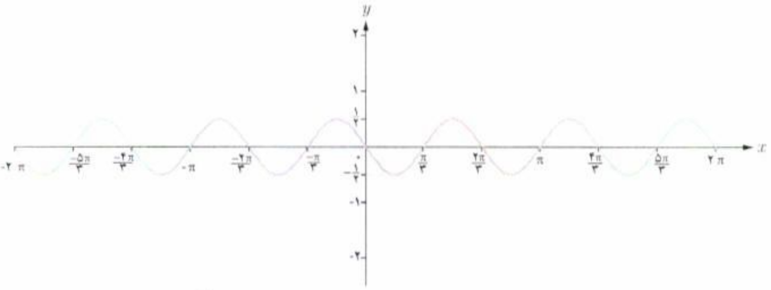
ت) $\max = |8| = 8 \qquad \min = -|8| = -8 \qquad T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

مثال : هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.

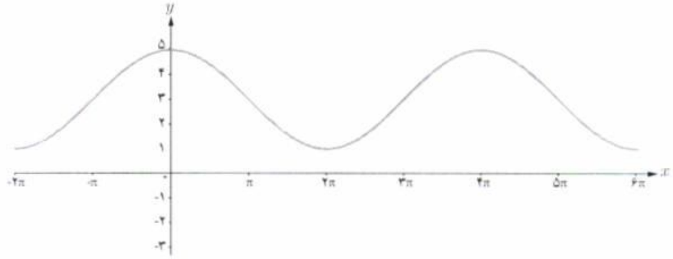
الف)



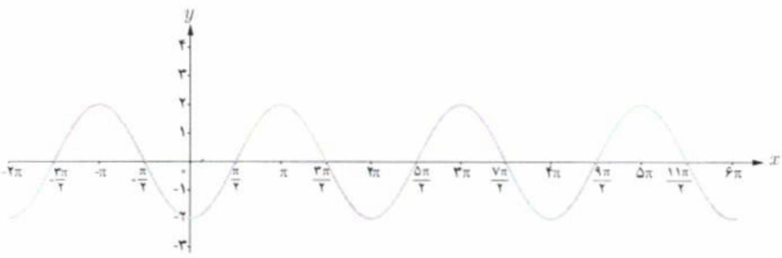
ب)



پ)



ت)



حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\pi$ و بنابراین $|b|=۲$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a|+c$ و $-|a|+c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c=۴$ و در نتیجه $|a|=۳$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است : $y=۳\sin(۲x)+۴$

ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c=۰$ و $|a|=\frac{۱}{۲}$ و $|b|=۳$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y=-\frac{۱}{۲}\sin ۳x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر ۴π است. بنابراین $c=۳$ و $|b|=\frac{۱}{۲}$ و $|a|=۲$. لذا $a=۲$ و $b=\frac{۱}{۲}$ و بنابراین داریم $y=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳$.

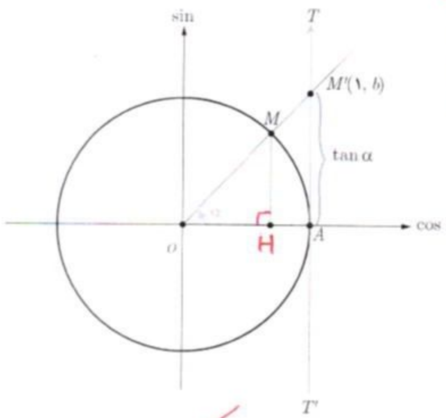
ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = ۰$ و $|a| = ۲$ و $|b| = ۱$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -۲\cos x$

تانژانت

$\overset{\triangle}{OMH} \sim \overset{\triangle}{OM'A}$ به حالت تشابه دو زاویه $\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{MH}{M'A} = \frac{OH}{OA} \xrightarrow{\text{وسطین تعویض}} \frac{MH}{OH} = \frac{M'A}{OA=1} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = M'A = b$

$\sin\alpha = MH$
$\cos\alpha = OH$

فعالیت



در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید :

$\tan\alpha = AM' = b$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟ زیرا امتداد ضلع دوم زاویه در ربع اول و سوم در بالای نقطه A، محور TAT' (جهت مثبت) قطع می‌کند ـ اما در ربع دوم و چهارم امتداد ضلع دوم زاویه در پایین نقطه A، محور TAT' (جهت منفی) را قطع می‌کند.

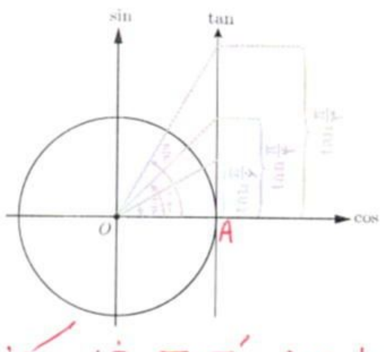
پ) آیا مقدار $\tan\frac{\pi}{۲}$ عددی حقیقی است؟ $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

خیر — خیر

با توجه به شکل انتهای زاویه‌های $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ روی محور sin قرار دارند که این محور با محور تانژانت موازی است پس همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس نمی‌توانند متناظر با عددی روی محور باشند.

تغییرات تانژانت

فعالیت



با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = ۰$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{۲}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟ بسیار بسیار بزرگ می‌شود $(+\infty)$

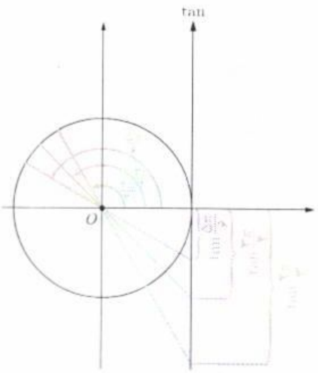
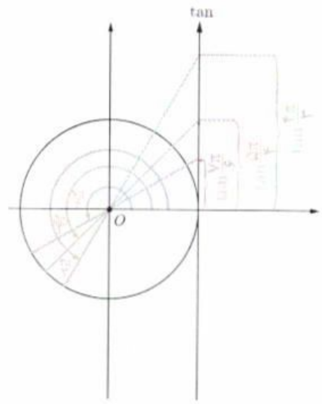
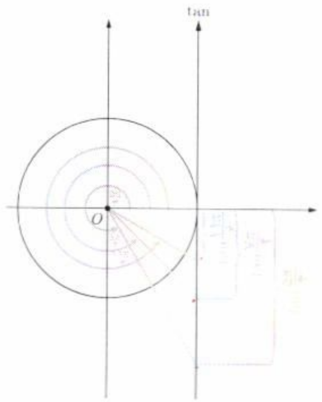
ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.

ابتدا عدد حقیقی و مثبت a که متناظر با نقطه‌ای روی محور است، را روی محور TAT' مشخص می‌کنیم سپس از آن نقطه به مبدأ مختصات (نقطه O) وصل می‌کنیم. محل تقاطع آن با دایره مثلثاتی، نقطه انتهایی زاویه‌ای است (M) که ضلع ابتدایی آن OA می‌باشد. لذا زاویه $A\hat{O}M = \alpha$، زاویه‌ایست که تانژانت آن برابر a می‌شود.

$\tan(A\hat{O}M) = \tan\alpha = a$

کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟
ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوایا			
افزایشی یا کاهشی	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازهٔ تغییرات	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↗ به معنی افزایش یافتن و علامت ↙ به معنی کاهش یافتن است.)

	ربع اول				ربع دوم				ربع سوم				ربع چهارم			
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	1 ↗	$\sqrt{3}$ ↗	$+\infty$ نامعین	$-\sqrt{3}$ ↗	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	1 ↗	$\sqrt{3}$	نامعین	$-\sqrt{3}$ ↗	-1 ↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	0

تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} , k \in \mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است[1] و دوره تناوب آن π است، زیرا :

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

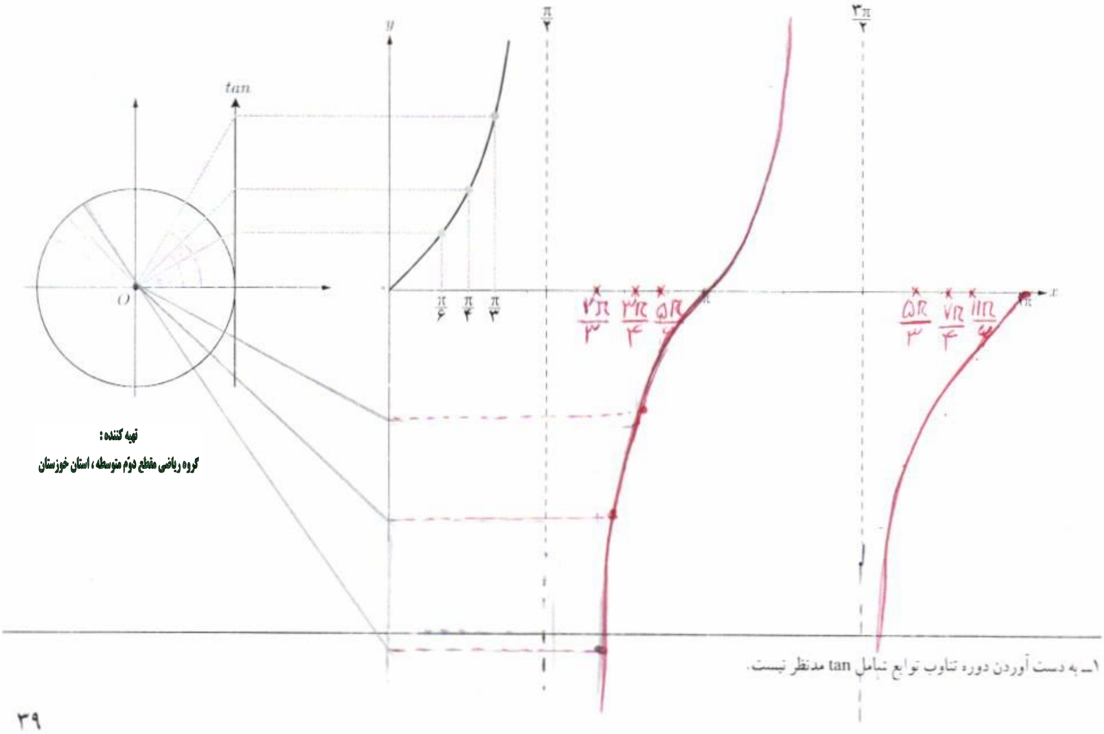
کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan\alpha$ را در بازه $[\circ , ۲\pi]$ بررسی کنید.

تابع \ ربع مثلثاتی	۰ اول $\frac{\pi}{2}$	دوم π	سوم $\frac{3\pi}{2}$	چهارم 2π
تابع تانژانت	صعودی ↗	صعودی ↗	صعودی ↗	صعودی ↗

رسم تابع $y = \tan\alpha$

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan\alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



۱ــ به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل tan مدنظر نیست.

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x \longrightarrow Max = ۲+۱ = ۳ ,\ Min = -۲+۱ = -۱ ,\ T = \frac{۲\pi}{۷}$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x \longrightarrow Max = \sqrt{۳}+۱ ,\ Min = \sqrt{۳}-۱ ,\ T = ۴$

پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲ \longrightarrow Max = \pi - ۲ ,\ Min = -\pi - ۲ ,\ T = ۴\pi$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x \longrightarrow Max = \frac{۳}{۴} ,\ Min = -\frac{۳}{۴} ,\ T = \frac{۲\pi}{۳}$

۲) هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

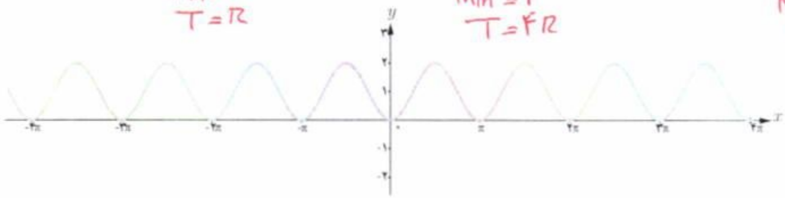
الف) $y = \sin \pi x$ — $Max = ۱$ ، $Min = -۱$ ، $T = ۲$

ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x$ — $Max = ۳$ ، $Min = ۱$ ، $T = ۴\pi$

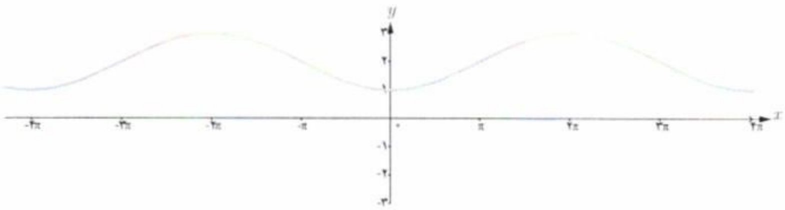
پ) $y = \sin ۲x$ — $Max = ۱$ ، $Min = -۱$ ، $T = \pi$

ت) $y = ۱ - \cos ۲x$ — $Max = ۲$ ، $Min = ۰$ ، $T = \pi$

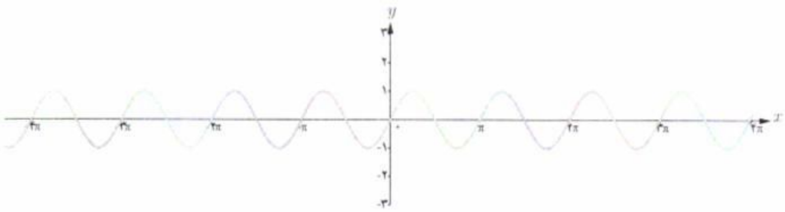
$y = ۱ - \cos ۲x \longleftarrow$ ۱)



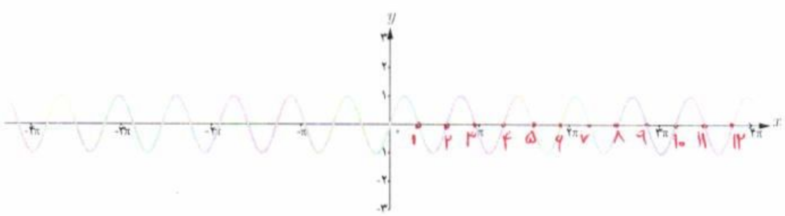
$y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x \longleftarrow$ ۲)



$y = \sin ۲x \longleftarrow$ ۳)



$y = \sin \pi x \longleftarrow$ ۴)



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

ت) $y=\pm \sin(\pm 4x)$ یا $\boxed{y=\pm \sin(4x)}$

یا $y=\pm\cos(\pm 4x) \Rightarrow \boxed{y=\pm\cos(4x)}$

پ) $y=\pm 3\sin(\pm\frac{1}{2}x)-4$ یا $\boxed{y=\pm 3\sin(\frac{1}{2}x)-4}$

یا $y=\pm 3\cos(\pm\frac{1}{2}x)-4$ یا $\boxed{y=\pm 3\cos(\frac{1}{2}x)-4}$

ب) $y=\pm 3\sin(\pm\frac{2\pi}{3}x)+6$ یا $\boxed{y=\pm 3\sin(\pm\frac{2\pi}{3}x)+6}$

یا $y=\pm 3\cos(\pm\frac{2\pi}{3}x)+6$ یا $\boxed{y=\pm 3\cos(\frac{2\pi}{3}x)+6}$

۳- در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

بهتر است برای سؤال قید می شد که معادله سینوسی مورد نظر است یا کسینوسی

الف) $T=\pi$, $\max=3$, $\min=-3 \Rightarrow c=\frac{Max+Min}{2}=0$, $a=\pm 3$, $b=\pm 2 \Rightarrow y=\begin{cases}\pm 3\sin(\pm 2x)=\pm 3\sin(2x)\\ \pm 3\cos(\pm 2x)=\pm 3\cos(2x)\end{cases}$

ب) $T=3$, $\max=9$, $\min=3 \Rightarrow c=\frac{Max+Min}{2}=6$, $a=\pm 3$, $b=\pm\frac{2\pi}{3}$ جواب در بالا است

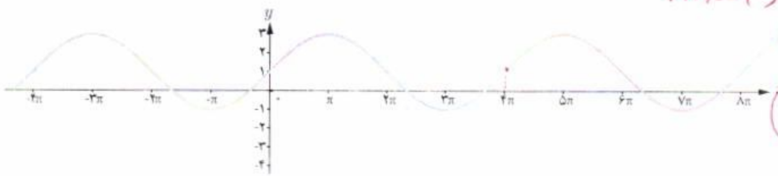
پ) $T=4\pi$, $\max=-1$, $\min=-7 \Rightarrow c=\frac{Max+Min}{2}=-4$, $a=\pm 3$, $b=\pm\frac{1}{2}$

ت) $T=\frac{\pi}{2}$, $\max=1$, $\min=-1 \Rightarrow c=\frac{Max+Min}{2}=0$, $a=\pm 1$, $b=\pm 4$

قید یک جواب کافی است.

۴- ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)

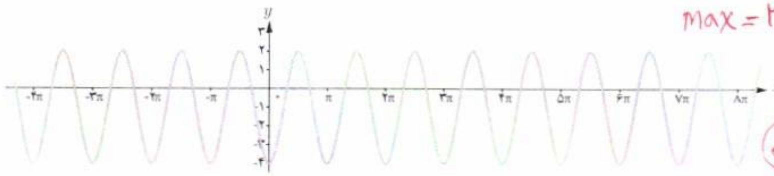


$Max=3$, $Min=-1$, $T=4\pi$

$c=\frac{Max+Min}{2}=1$, $b=\frac{1}{2}$

$\boxed{y=+2\sin(\frac{1}{2}x)+1}$

ب)



$Max=2$, $Min=-4$, $T=\pi$

$c=\frac{Max+Min}{2}=-1$, $b=2$

$\boxed{y=-3\cos(2x)-1}$

۵- کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. نادرست

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. نادرست

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. نادرست

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. درست

۶- با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$: ربع اول $\Rightarrow$ سینوس در ربع اول صعودی است

تانژانت در ربع اول صعودی است.

زاویه / نسبت مثلثاتی	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
Sin	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1
tan	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	1	↗	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$ تعریف نشده

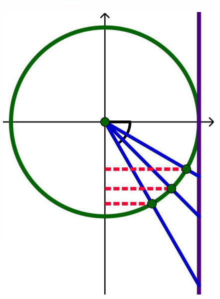
ب) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

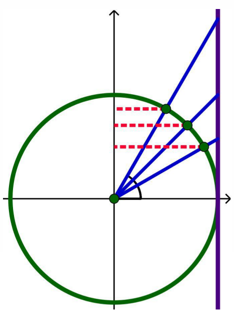
$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$: ربع چهارم $\Rightarrow$ سینوس در ربع چهارم صعودی است

تانژانت در ربع چهارم صعودی است

زاویه / نسبت مثلثاتی	$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
Sin	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0
tanα	تعریف نشده $-\infty$	↗	$-\sqrt{3}$	↗	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان



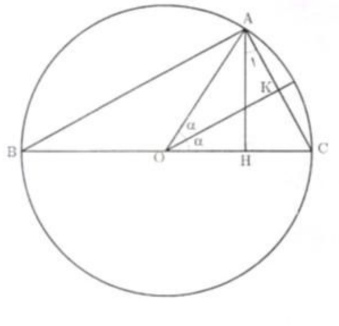


درس دوم

معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به‌دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.[1]



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث $O\overset{\Delta}{A}K$ داریم:

$$AK = \sin\alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2\sin\alpha \qquad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\widehat{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$

همچنین از مجموع زوایای $A\overset{\Delta}{B}C$ به‌دست می‌آید:

$$A\overset{\Delta}{B}C : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $A\overset{\Delta}{H}C$ داریم:

$$A\overset{\Delta}{H}C : \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $O\overset{\Delta}{A}C$ و $A\overset{\Delta}{H}C$ به‌دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\Delta}{A}C : AH = \sin 2\alpha \\ A\overset{\Delta}{H}C : \cos\hat{A}_1 = \cos\alpha = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC\cos\alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین در $O\overset{\Delta}{A}H$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $A\overset{\Delta}{H}C$ داریم:

$$\sin\hat{A}_1 = \sin\alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin\alpha \times AC = \sin\alpha(2\sin\alpha) = 2\sin^2\alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

[1]ـ این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

مثال : مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ \qquad \cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,\cos 15^\circ \qquad \sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

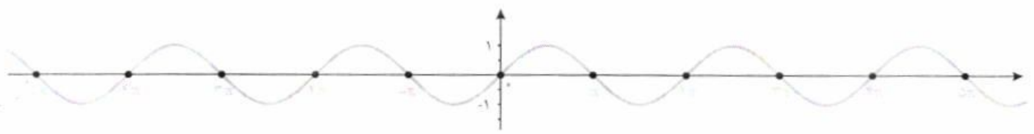
$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$ (۱۵° در ربع اول است.)

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ (۱۵° در ربع اول است.)

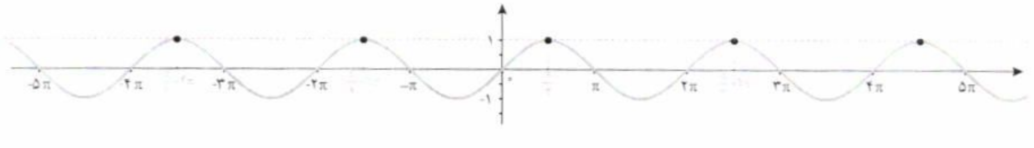
معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

مثال : تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x = \ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محور xها) و تابع $y=\sin x$ است.
این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=1$ و $y=\sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به‌صورت

$$x = \quad , \frac{\pi}{2} - 4\pi \; , \; \frac{\pi}{2} - 2\pi \; , \; \frac{\pi}{2} \; , \; \frac{\pi}{2} + 2\pi \; , \; \cdots$$

می‌باشند که به‌صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

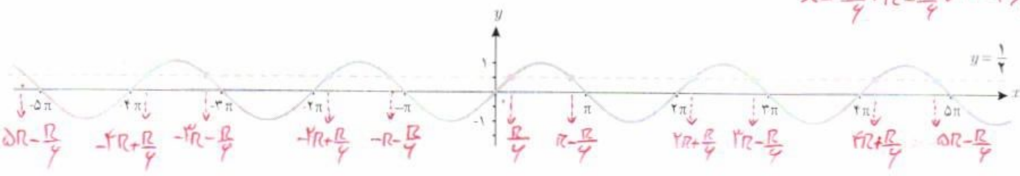
فعالیت

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید. $\leftarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{6} \; , \; \frac{5\pi}{6} \; , \; \ldots$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \; , \; \sin\left(\underbrace{\pi - \frac{\pi}{6}}_{\frac{5\pi}{6}}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

۲ خط $y = \frac{1}{2}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ بله

$x = \frac{\pi}{6} \; , \; \pi - \frac{\pi}{6} \; , \; 2\pi + \frac{\pi}{6} \; , \; 3\pi - \frac{\pi}{6} \; , \; \cdots$

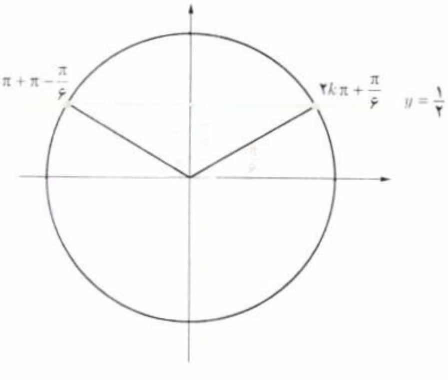


۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{1}{2}$ و $y = \sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **معادله ی $\sin x = \frac{1}{2}$ بی شمار جواب دارد.**

$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ✓

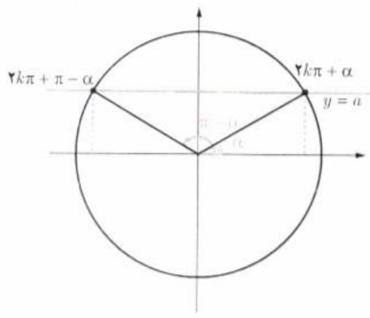
$x = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓ ، $x = -\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = +\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $-4\pi + \frac{\pi}{6} \; , \; -2\pi + \frac{\pi}{6} \; , \; \frac{\pi}{6} \; , \; 2\pi + \frac{\pi}{6} \; , \; 4\pi + \frac{\pi}{6}$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $-3\pi - \frac{\pi}{6} \; , \; -\pi - \frac{\pi}{6} \; , \; \pi - \frac{\pi}{6} \; , \; 3\pi - \frac{\pi}{6} \; , \; 5\pi - \frac{\pi}{6}$



برای عدد حقیقی $-۱ \leq a \leq ۱$ که $\sin x = a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \alpha$ و $x = (۲k+۱)\pi - \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi + \alpha$ و $x = (۲k+۱)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادلهٔ $\sin x = -\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{۱}{۲}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$\begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} & , \; k \in \mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} & , \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

$\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) \Rightarrow$

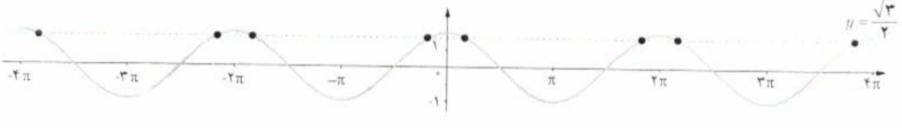
$\begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \; , \; k \in \mathbb{Z}$

ب) $۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$

$\sin x = -\frac{\sqrt{۸}}{۴} = \frac{-۲\sqrt{۲}}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

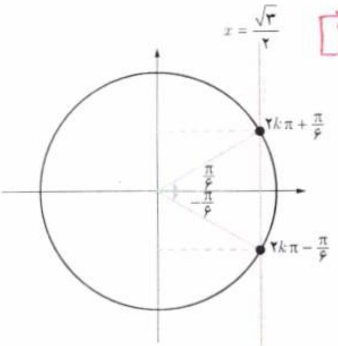
$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \end{cases} \; , \; k \in \mathbb{Z}$

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بیابید.



با توجه به دایره مثلثاتی، زاویه‌های هم انتها با $\frac{\pi}{6}$ ⇐ $\frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{6}, -2\pi+\frac{\pi}{6}, 4\pi+\frac{\pi}{6}, \ldots \xRightarrow{\text{نظر کلی}} x=2k\pi+\frac{\pi}{6}, \quad k\in\mathbb{Z}$

" " " " با $-\frac{\pi}{6}$ ⇐ $-\frac{\pi}{6}, -2\pi-\frac{\pi}{6}, 2\pi-\frac{\pi}{6}, -4\pi-\frac{\pi}{6}, \ldots \xRightarrow{\text{نظر کلی}} x=2k\pi-\frac{\pi}{6}, \quad k\in\mathbb{Z}$

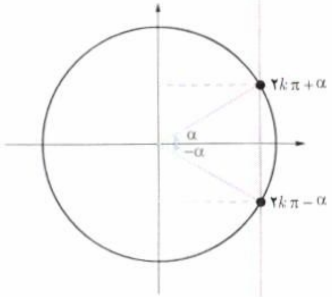


$x=\frac{\pi}{6}, \; x=2\pi-\frac{\pi}{6}, \; x=2\pi+\frac{\pi}{6}, \; x=-\frac{\pi}{6}, \; x=-2\pi+\frac{\pi}{6}, \ldots$

الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1\leq a\leq 1$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha$ و $x=2k\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : جواب‌های معادله $\cos x=\frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi,\pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ پس معادله به‌صورت $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند :

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-2\pi-\frac{\pi}{3}, -2\pi+\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال : معادله $\sin 2x=\sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+3x \Rightarrow x=2k\pi & , \; k\in\mathbb{Z} \\ 2x=(2k+1)\pi-3x \Rightarrow x=\dfrac{(2k+1)\pi}{5} & , \; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

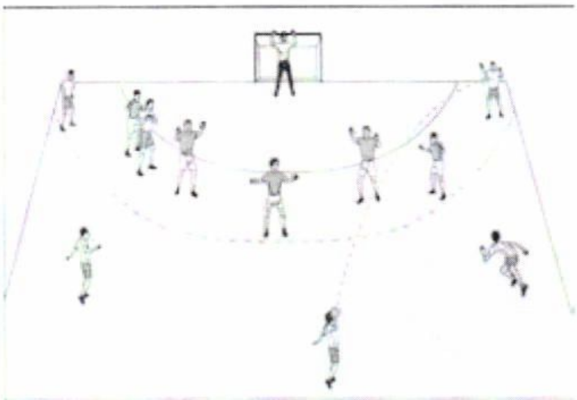
مثال : معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$
$$۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۳}\pi - \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$



از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$۱۲/۸ = \frac{(۱۶)^۲ \sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow \sin ۲\theta = \frac{۱۲/۸ \times ۱۰}{۲۵۶} \Rightarrow \sin ۲\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲\theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲\theta = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

مثال : جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x \cos x = ۲\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos 45° = 1 - 2\sin^2(22/5°) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2(22/5°) \Rightarrow \sin^2(22/5°) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \xrightarrow[\text{حاده است}]{\alpha = 22/5°} \sin(22/5°) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin 45° = 2 \times \sin(22/5°) \times \cos(22/5°) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \cos(22/5°) \Rightarrow \cos(22/5°) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

مثال : معادله $\cos x\,(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

زیرا مقادیر کسینوس همواره بین $-1 \leq \cos x \leq +1$ قرار دارد.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

$\cos\alpha = \frac{5}{13} \xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

$\rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$

ادامه در بالا

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5°$ به‌دست آورید.

توجه : $2(22/5°) = 45° \Leftarrow$ اگر $\alpha = 22/5° \Leftarrow 2\alpha = 45°$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$ ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$ ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \sin x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$

$x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin\theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 30°$ یا $\theta = 150°$

پس دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

جواب (۳) :

الف) $\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

پ) $2x = 2k\pi \pm x$

$\rightarrow x = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow t = \sin x = \frac{1 \pm 3}{-4}$

$\rightarrow \sin x = -1$, $\sin x = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ، $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = 4 \Rightarrow t = \sin x = \frac{1 \pm 2}{2}$

$\sin x = \frac{3}{2}$ غیرممکن ، $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ ، $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان