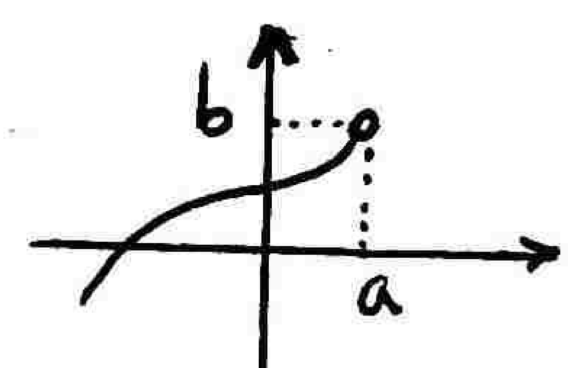
۳- حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده و با نزدیک شدن متغیر x به a مقدار تابع به L_1 نزدیک شود، در این صورت گوییم حد راست تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a برابر L_1 است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$

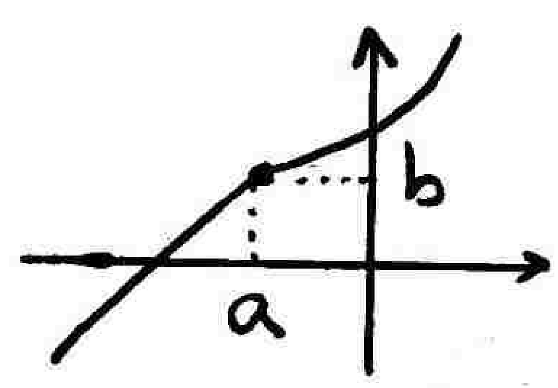
همچنین اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده و با نزدیک شدن متغیر x به a، مقدار تابع به L_2 نزدیک شود، گوییم حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a برابر L_2 است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$

مثال: در هر یک از توابع زیر، حدهای راست و چپ را در نقطه‌ی a (درصورت وجود) تعیین کنید.



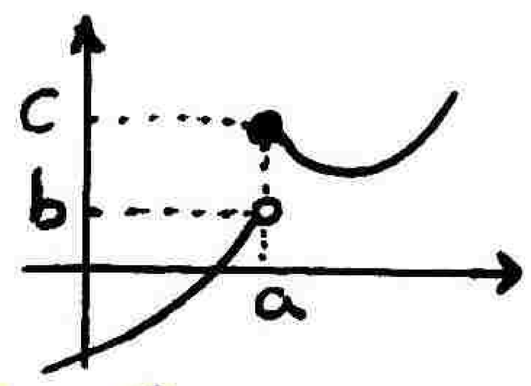
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \to$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=c$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$

نکته مهم: حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع در a موجود و برابر باشند.

مثال: با رسم جدول، حد تابع $f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 2 \\ 1-x & , x<2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	$\longrightarrow$ ۲ $\longleftarrow$	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱
$f(x)$	۰٫۹-	۰٫۹۹-	۰٫۹۹۹-	$\longrightarrow$ ۱- ۲ $\longleftarrow$	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱

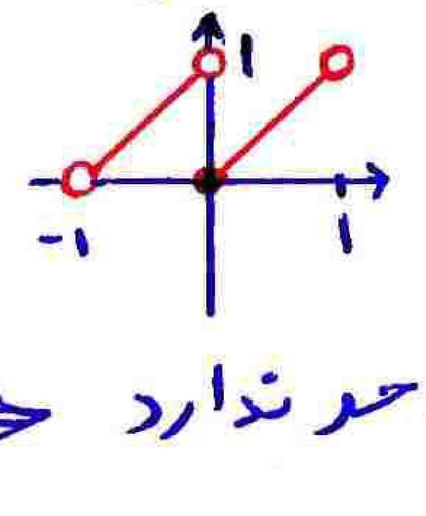
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2 \Rightarrow$ تابع f در $x=2$ حد ندارد

مثال: به کمک رسم نمودار، حد تابع $f(x)=x-[x]$ را در $x=0$ بررسی نمایید.

نمودار تابع را در یک همسایگی صفر مثلاً بازه $(-1,1)$ رسم می‌کنیم:

$-1<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=x+1$

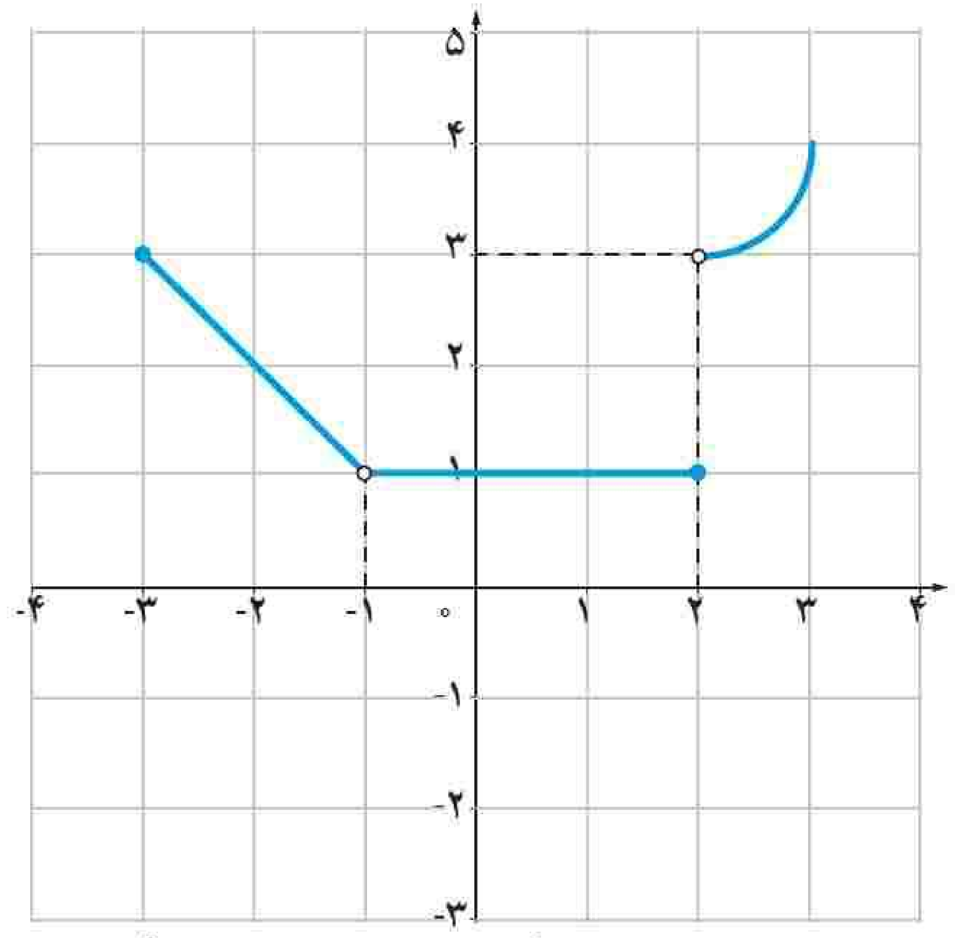
$0<x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=x$



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\Longrightarrow$ تابع در $x=0$ حد ندارد

مثال: با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را ، در صورت وجود ، به دست آورید.



$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \to$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) \to$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x) \to$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x)=3$

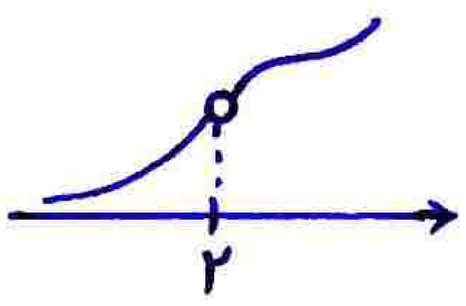
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

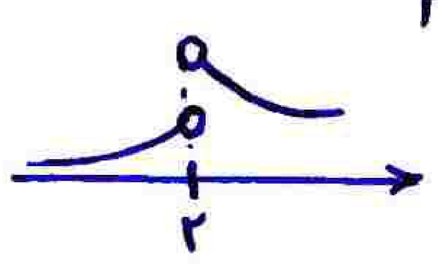
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$

مثال: نمودار از یک تابع رسم کنید که:

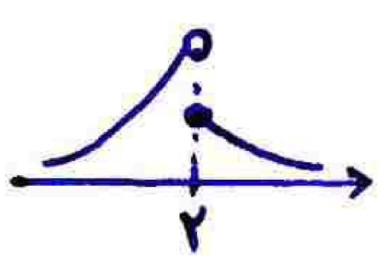
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد داشته باشد.



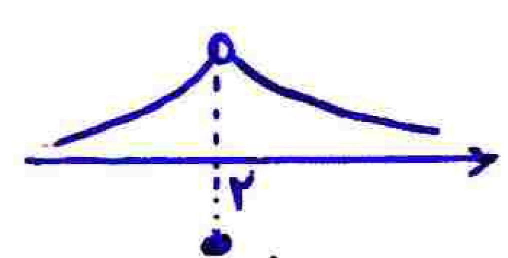
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد نداشته باشد.



ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه‌ی ۲ یکسان نباشد.



نکته: اگر دو تابع در یک همسایگی محذوف a با هم برابر باشند، مقدار حد آنها در نقطه‌ی a ، دارای وضعیت یکسان است. یعنی اگر یکی دارای حد باشد، دیگری نیز دارای حد است و اگر یکی از آنها دارای حد نباشد دیگری نیز حد ندارد.

* این نکته برای حدهای راست و چپ نیز صادق است *

مثال: مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ را در نقطه‌ی $x=0$ به دست آورید.

همسایگی راست صفر را به صورت بازه‌ی $(0,1)$ در نظر می‌گیریم، می‌دانیم در این بازه $[x]=0$ است و در نتیجه تابع f با تابع ثابت $y=0$ برابر است، بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$$

۱- تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید.

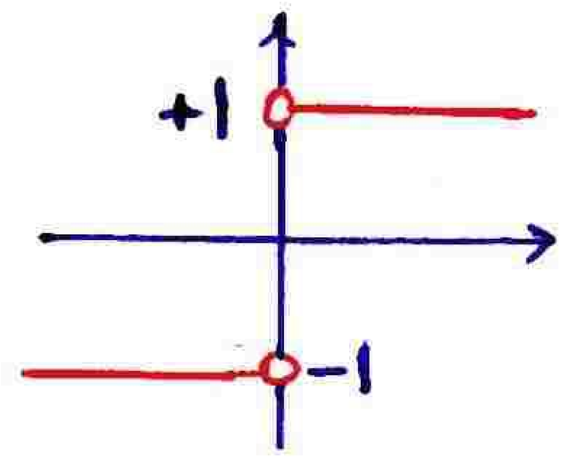
الف) با استفاده از جدول حد تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\to 0 \leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$f(x)$	-1	-1	$-1 \to -1$		$1 \leftarrow 1$	1	1

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\to$ وجود ندارد

ب) نمودار تابع f را رسم کرده و به کمک آن، حد تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>0\\ \frac{-x}{x} & x<0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



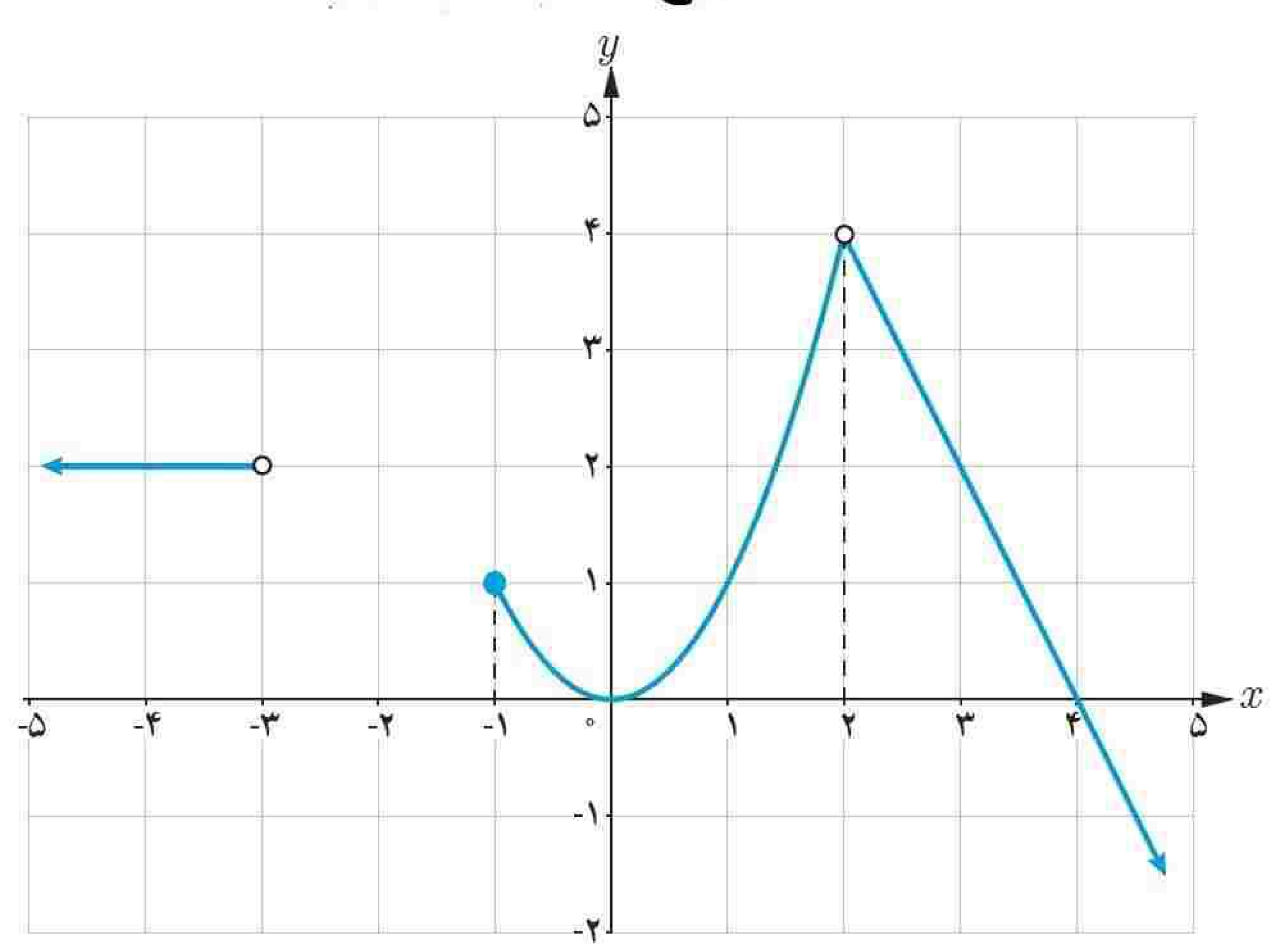
طبق شکل $\rightsquigarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\to$ وجود ندارد

۲- نمودار تابع f با ضابطه‌ی زیر را رسم کرده و به کمک آن مقادیر خواسته شده‌ی زیر را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+8 & , x>2\\ x^2 & , -1\leqslant x<2\\ 2 & , x<-3\end{cases}$$

x	2	3
y	4	2

x	-1	0	2
y	1	0	4



الف) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ ، $f(0)=0$ ، $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$ ، $f(2)=$ تعریف نشده

$f(-1)=1$ ، $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=$ وجود ندارد ، $\lim\limits_{x\to (-1)^-}f(x)=$ وجود ندارد ، $\lim\limits_{x\to (-1)^+}f(x)=1$

$f(-3)=$ تعریف نشده ، $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=$ وجود ندارد ، $\lim\limits_{x\to (-3)^-}f(x)=2$ ، $\lim\limits_{x\to (-3)^+}f(x)=$ وجود ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to 4^+}[f(x)]=-1 \longleftarrow$ در همسایگی راست ۴، مقدار تابع بین ۱- و صفر است، بنابراین جزء صحیح آن ۱- می باشد.

$\lim\limits_{x\to 4^-}[f(x)]=0 \longleftarrow$ در همسایگی چپ ۴، مقدار تابع بین صفر و ۱ است، بنابراین جزء صحیح آن صفر می باشد.

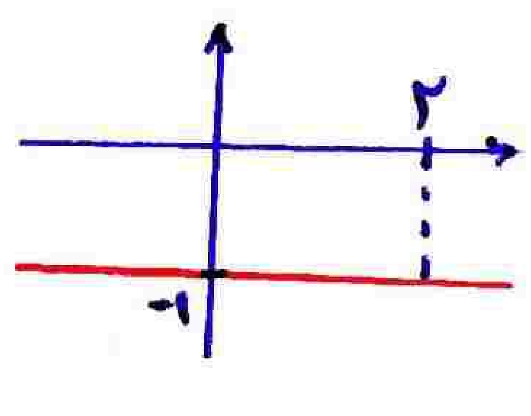
$\lim\limits_{x\to 4}[f(x)]=$ وجود ندارد

ب) $\lim\limits_{x\to(-4)}[f(x)]=2$ ⟵ درهمسایگی ۴- ، مقدار تابع ثابت و برابر ۲ می‌باشد، لذا جزءصحیح آن ۲ است.

$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]=0$ ⟵ درهمسایگی صفر، مقدار تابع بین دو عدد صفر و یک می‌باشد که جزءصحیح آن صفر است.

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)]=3$ ⟵ درهمسایگی ۲ ، مقدار تابع بین دو عدد ۳ و ۴ می‌باشد که جزءصحیح آن ۳ است.

۳- مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه‌ی ۲ مساوی ۱- باشد.



تابع ثابت $f(x)=-1$ در نقطه‌ی $x=2$ دارای حد ۱- است به عبارت دیگر $\lim\limits_{x\to 2} -1=-1$.

۴- در هر یک از توابع زیر، با توجه به دامنه‌ی تابع، وجود یا عدم وجود حد تابع را در نقطه‌ی داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ (نقطه‌ی $x=1$)

دامنه تابع: $x^2-x\geq 0$ $\quad \begin{array}{ccccc} -\infty & 0 & & 1 & +\infty \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

همسایگی چپ ۱ برای تابع f تعریف نشده بنابراین تابع f در $x=1$ حد ندارد.

ب) $g(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ (نقطه‌ی $x=2$)

دامنه تابع: $[x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\leq x<3 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-[2,3)$

همسایگی راست ۲ ، برای تابع g تعریف نشده بنابراین تابع g در $x=2$ حد ندارد.

۵- $\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]$ به چه معنی است؟

وقتی $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ آنگاه $\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]=[L]$ است و هیچ معنی و مفهوم دیگری ندارد.

به عنوان نمونه:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=5 \Rightarrow \left[\lim_{x\to 2}f(x)\right]=[5]=5$$

$$\lim_{x\to 2}g(x)=5.3 \Rightarrow \left[\lim_{x\to 2}g(x)\right]=[5.3]=5$$