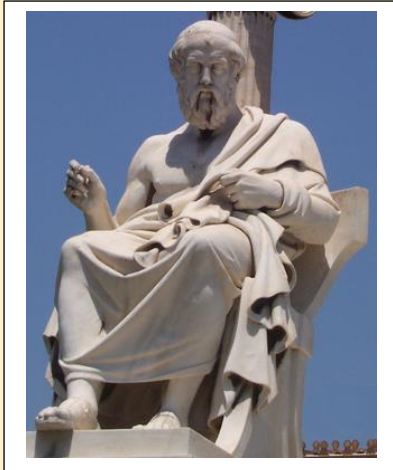


فعالیت :

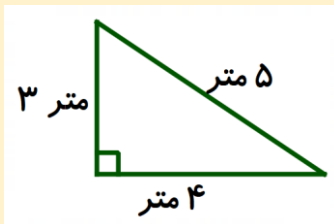


فیثاغورس در جزیره ساموس یونان، نزدیک کرانه های ایونی، به دنیا آمد. او در سال ۵۶۹ تا ۵۰۰ قبل از میلاد زندگی می کرد. در جوانی به سفرهای زیادی رفت و این امکان را پیدا کرد تا با افکار مصریان باستان، بابلیان و مغ های (روحانیان زرتشتی) ایران آشنا شود. تقریباً، ۲۲ سال در سرزمینهای خارج از یونان بود و چون پولوکراتوس (شاه یونان) برای او نزد فرعون مصر سفارش کرده بود به آمازیس رفته و توانست به سادگی به رازهای کاهنان

مصری دست یابد. سالها در مصر ساکن بود و در خدمت کاهنان و روحانیان مصری به شاگردی پرداخت و علوم مختلف آموخت. سپس از آنجا روانه بابل شد و شاگردی را از نو آغاز کرد. او در بابل به حالت اسارت زندگی می کرد تا اینکه به همراه داریوش اول به پارس آمد و از تخت جمشید که در حال ساخت بود دیدن کرد.

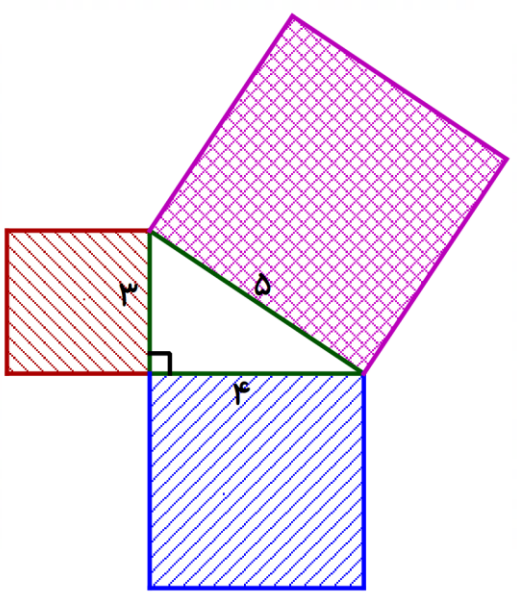
فیثاغورس در هندسه بسیار تبحر داشت. معروفترین کار او بررسی و کشف رابطه ای بین اضلاع مثلث قائم الزاویه بود. برای اینکه شما هم بتوانید مانند فیثاغورس این رابطه را کشف کنید، به توضیحات و شکل زیر دقت کنید.

همانطور که در خلاصه زندگی نامه فیثاغورس خواندید او به مصر هم رفته بود و در آنجا می دید که کاهنان مصر که وظیفه اندازه گیری زمین های کشاورزی برای گرفتن خراج را داشتند برای اینکه گوشه زمین را نود درجه در آوردند از نخ هایی به اندازه هایی خاص استفاده می کردند. وقتی سه نخ را کاملاً در کنار هم محکم می کردند زاویه قائمه ایجاد می شد.



البته از این روش هنوز هم در معماری استفاده می شود و بسیاری از استادکاران که حتی شاید سواد هم نداشته باشند از این قانون ریاضی استفاده می کنند.

آنها سه طناب به اندازه های ۳ متر و ۴ متر و ۵ متر دارند و هر زمان بخواهند زاویه ای قائمه



ایجاد کنند. طناب ها را مانند شکل مقابل روی زمین با میخ محکم می کنند.

فیثاغورس وقتی این مورد را دید به دنبال یافتن رابطه ای برای این اتفاق بود.

او بسیار فکر کرد. روش ها و قواعد بسیاری را آزمایش کرد. و در نهایت به

کمک مربع هایی که روی اضلاع ساخت توانست رابطه بین آنها را کشف کند.

شما هم کمی فکر کنید و ببینید آیا می توانید رابطه فیثاغورس را به کمک

مساحت این مربع ها کشف کنید.

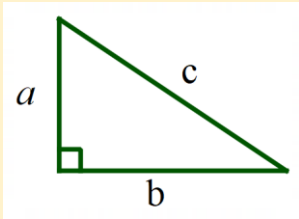
همه چیز به مساحت مربع‌ها ارتباط دارد.

$$3 \times 3 = 9$$

$$4 \times 4 = 16$$

$$5 \times 5 = 25$$

همانطور که مشاهده می‌کنید مجموع مساحت مربع‌های ساخته شده روی دو ضلع اطراف زاویه قائمه که آن‌ها را ضلع قائم می‌نامند با مساحت مربعی که روی بزرگترین ضلع مثلث که آن را وتر می‌نامند، ساخته شده، برابر است.



$$9 + 16 = 25$$

$$(3 \times 3) + (4 \times 4) = (5 \times 5)$$

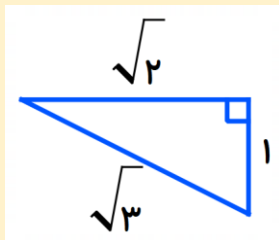
حال بیاییم این رابطه را به صورت کلی بیان کنیم.

$$(a \times a) + (b \times b) = (c \times c)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

« در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است. »

برای مثال می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا در مثلث قائم الزاویه زیر هم رابطه فیثاغورس برقرار است؟



$$1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow (1 \times 1) + (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = (\sqrt{3} \times \sqrt{3})$$

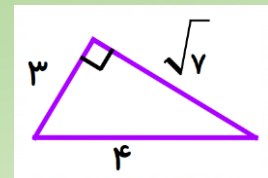
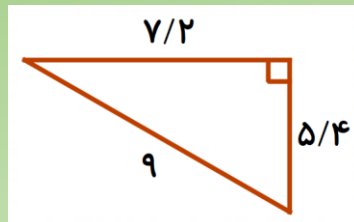
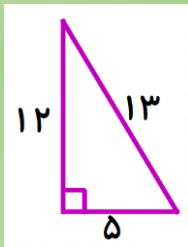
$$\Rightarrow 1 + \sqrt{4} = \sqrt{9} \Rightarrow 1 + 2 = 3$$

مشاهده می‌کنید که در نهایت یک تساوی درست به دست آمد.

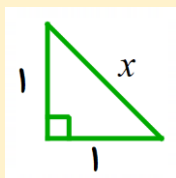
ضمناً می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه رابطه فیثاغورس در مثلثی برقرار بود آن مثلث قائم الزاویه است.

تمرین (۱):

درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم الزاویه زیر بررسی کنید.



فعالیت:

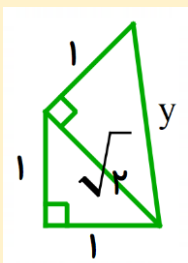


می‌خواهیم اندازه وتر مثلث قائم الزاویه روبرو را به دست آوریم.

طبق قانون فیثاغورس مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.

$$1^2 + 1^2 = x^2 \Rightarrow (1 \times 1) + (1 \times 1) = x^2 \Rightarrow 1 + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

دقت کنید که برای به دست آوردن مقدار مجهول باید جذر بگیریم، زیرا این عدد توان دوم اندازه وتر است.



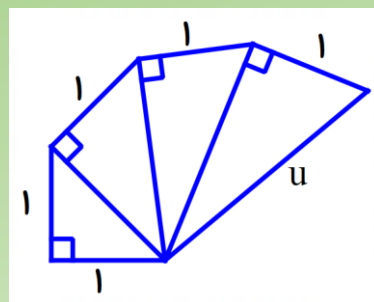
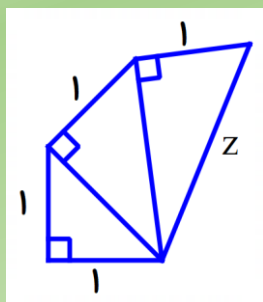
دوباره می‌خواهیم اندازه وتر مثلث قائم الزاویه رو برو را به دست آوریم.

$$(\sqrt{2})^2 + 1^2 = y^2 \Rightarrow (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) + (1 \times 1) = y^2 \Rightarrow \sqrt{4} + 1 = y^2$$

$$\Rightarrow 2 + 1 = y^2 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

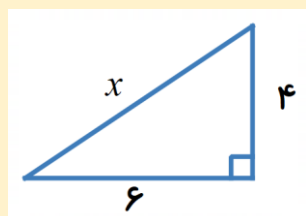
تمرین (۲):

در شکل های زیر مقادیر Z و u را به دست آورید.



فعالیت :

هر گاه در یک مثلث قائم الزاویه اندازه دو ضلع را بدانیم، می توانیم با استفاده از رابطه فیثاغورس اندازه ضلع سوم را به دست آوریم. فقط نکته مهم تشخیص وتر است که آن هم کار ساده ای است. بزرگترین ضلع مثلث قائم الزاویه وتر نامیده می شود. به مثال های زیر دقت کنید.

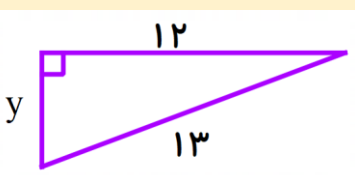


$$4^2 + 6^2 = x^2$$

$$16 + 36 = x^2$$

$$x^2 = 52 \Rightarrow x = \sqrt{52} = 7/2$$

(برای جذر می توانید از ماشین حساب کمک بگیرید.)



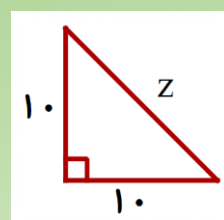
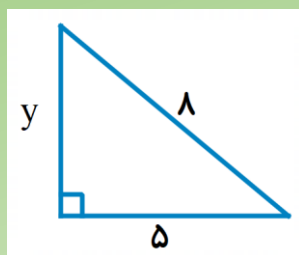
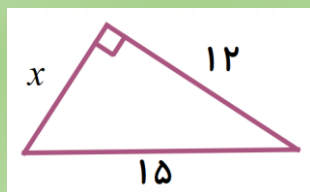
$$12^2 + y^2 = 13^2$$

$$144 + y^2 = 169$$

$$y^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25} = 5$$

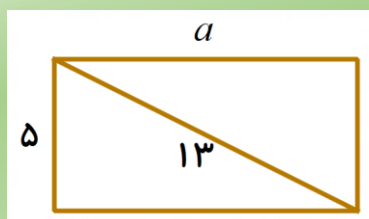
تمرین (۳):

در هر مثلث قائم الزاویه ، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را پیدا کنید. (برای جذر می توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

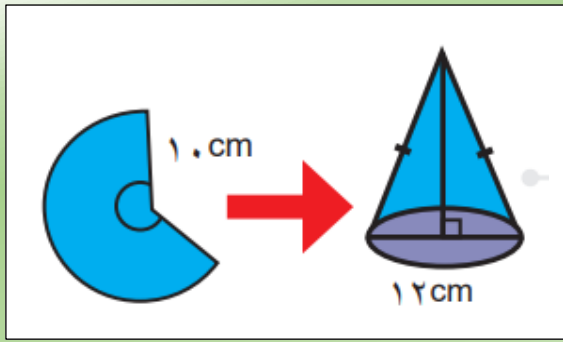


تمرین (۴):

در مستطیل زیر اندازه طول را با توجه به اندازه های داده شده بدست آورید.



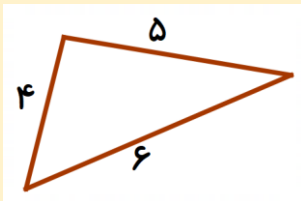
تمرین (۵):



علی با قسمتی از دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی به قطر قاعده ۱۲ سانتیمتر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟ (ارتفاع، قاعده ۱۲ سانتی متری را نصف می کند.)

فعالیت :

با توجه به رابطه فیثاغورس، می توانیم با کمک اندازه اضلاع و بدون استفاده از مقاله بفهمیم که آیا مثلث قائم الزاویه هست یا خیر، کافی است مجموع مجذورات دو ضلع کوچکتر را به دست آورده و با مجذور ضلع بزرگتر مقایسه کنیم. اگر یکسان بود که مثلث قائم الزاویه است ولی اگر یکسان نبود مثلث قائم الزاویه نیست. به این مثال دقت کنید.



$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

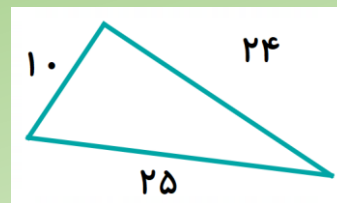
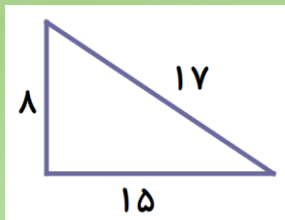
$$6^2 = 36$$

$$41 \neq 36$$

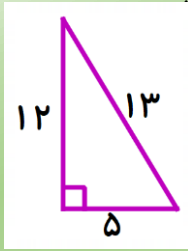
این مثلث قائم الزاویه نیست.

تمرین (۶):

مشخص کنید، کدام یک از مثلث های زیر قائم الزاویه است؟ (می توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)



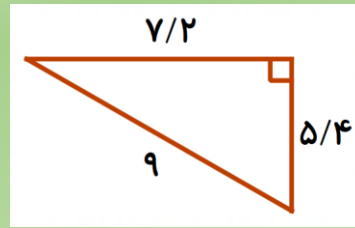
تمرین (۱): درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث های قائم الزاویه زیر بررسی کنید.



$$12^2 + 5^2 = 13^2$$

$$144 + 25 = 169$$

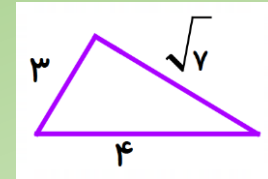
$$169 = 169$$



$$7/2^2 + 5/4^2 = 9^2$$

$$51/84 + 29/16 = 81$$

$$81 = 81$$



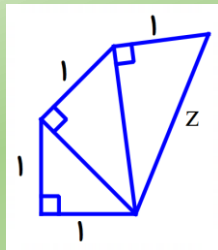
$$3^2 + \sqrt{7}^2 = 4^2$$

$$9 + 7 = 16$$

$$16 = 16$$

تمرین (۲):

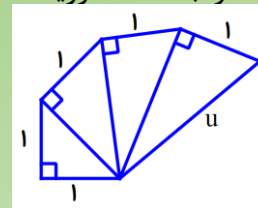
در شکل های زیر مقادیر Z و u را به دست آورید.



$$(\sqrt{3})^2 + 1^2 = z^2$$

$$\sqrt{9} + 1 = z^2$$

$$z^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow z = \sqrt{4} = 2$$



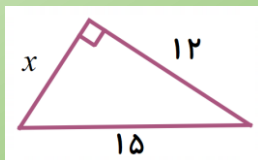
$$2^2 + 1^2 = u^2$$

$$4 + 1 = u^2$$

$$u^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow u = \sqrt{5}$$

تمرین (۳):

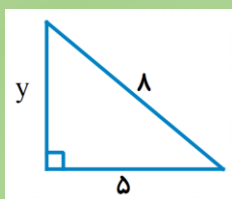
در هر مثلث قائم الزاویه ، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را پیدا کنید. (برای جذر می توانید از ماشین حساب استفاده کنید).



$$12^2 + x^2 = 15^2$$

$$144 + x^2 = 225$$

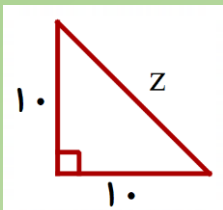
$$x^2 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow x = \sqrt{81} = 9$$



$$5^2 + y^2 = 8^2$$

$$25 + y^2 = 64$$

$$y^2 = 64 - 25 = 39 \Rightarrow y = \sqrt{39} = 6/2$$

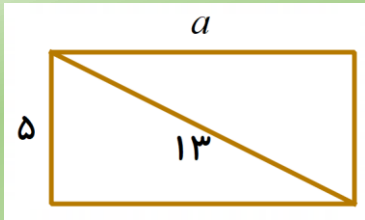


$$1.0^2 + 1.0^2 = z^2$$

$$1.00 + 1.00 = z^2$$

$$z^2 = 2.00 \Rightarrow z = \sqrt{2.00} \approx 1.4/1$$

تمرین (۴):



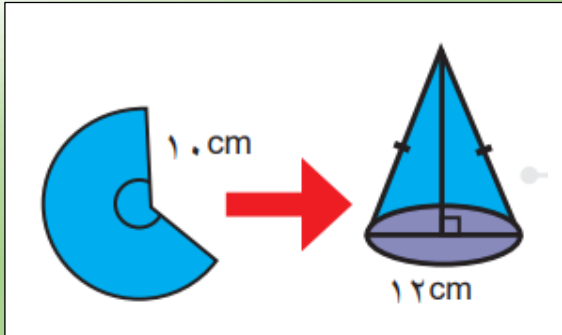
در مستطیل زیر اندازه طول را با توجه به اندازه های داده شده بدست آورید.

$$5^2 + a^2 = 13^2$$

$$25 + a^2 = 169$$

$$a^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow a = \sqrt{144} = 12$$

تمرین (۵):



علی با قسمتی از دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی به قطر قاعده ۱۲ سانتیمتر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

(ارتفاع، قاعده ۱۲ سانتی متری را نصف می کند.)

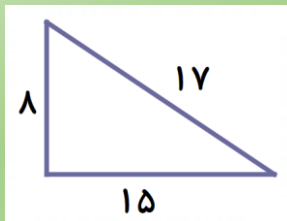
$$6^2 + h^2 = 10^2$$

$$36 + h^2 = 100$$

$$h^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$$

تمرین (۶):

مشخص کنید، کدام یک از مثلث های زیر قائم الزاویه است؟ (می توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

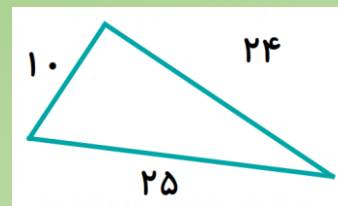


$$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$

$$17^2 = 289$$

$$289 = 289$$

قائم الزاویه هست.



$$10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676$$

$$25^2 = 625$$

$$676 \neq 625$$

قائم الزاویه نیست

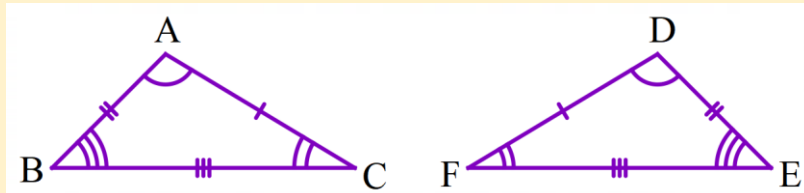
فعالیت :

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم نهشت اند.

دو شکل وقتی با یکدیگر هم نهشت هستند تمام اجزای آنها نیز با هم برابرند. به دو مثلث زیر دقت کنید. همان طور که می بینید مثلث DEF تقارن یافته مثلث ABC است. این دو مثلث هم نهشت هستند که این موضوع را به صورت زیر

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

نشان می دهیم.



علامت گذاری در این مبحث بسیار مهم است. این علامت ها به ما نشان می دهد که کدام ضلع ها در دو شکل با هم برابرند و همچنین کدام زاویه ها نیز با هم برابرند. با توجه به این علامت گذاری می توان تساوی های زیر را نوشت.

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$

$$\overline{AC} = \overline{DF}$$

$$\overline{BC} = \overline{EF}$$

تساوی بین اضلاع متناظر:

$$A = D$$

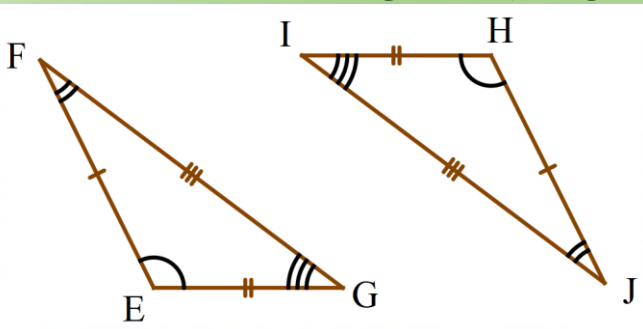
$$B = E$$

$$C = F$$

تساوی بین زاویه های متناظر:

تمرین (۱):

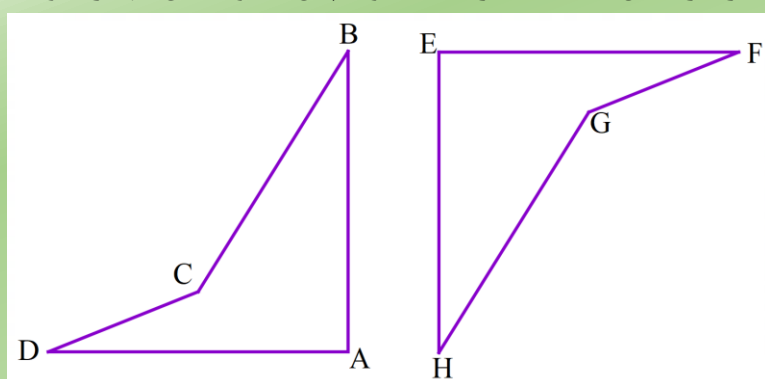
دو مثلث زیر با یکدیگر هم نهشت می باشند. این دو مثلث با چه تبدیلی بر هم منطبق می شوند؟



با توجه به علامت ها تساوی بین اجزای متناظر آنها را بنویسید.

تمرین (۲):

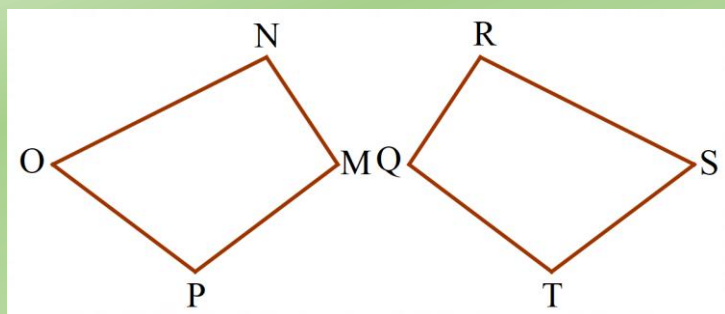
دو شکل زیر با یکدیگر هم نهشت هستند. اضلاع مساوی را در شکل علامت گذاری کنید و سپس تساوی بین آنها را بنویسید.



$$ABCD \cong EFGH$$

تمرین (۳):

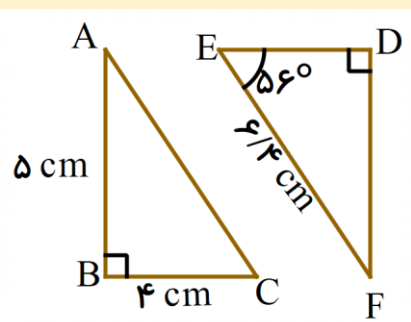
دو شکل زیر با یکدیگر هم نهشت هستند. زاویه های مساوی را علامت گذاری کرده و تساوی بین آنها را بنویسید.



$$MNOP \cong QRST$$

فعالیت :

با توجه به هم نهشتی در دو شکل می توان اندازه ضلع ها و زاویه های یک شکل را با توجه به اندازه های شکل دیگر مشخص کرد. به عنوان مثال دو مثلث زیر با یکدیگر هم نهشت هستند. می خواهیم اندازه ضلع ها و زاویه های متناظر را پیدا کنیم.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

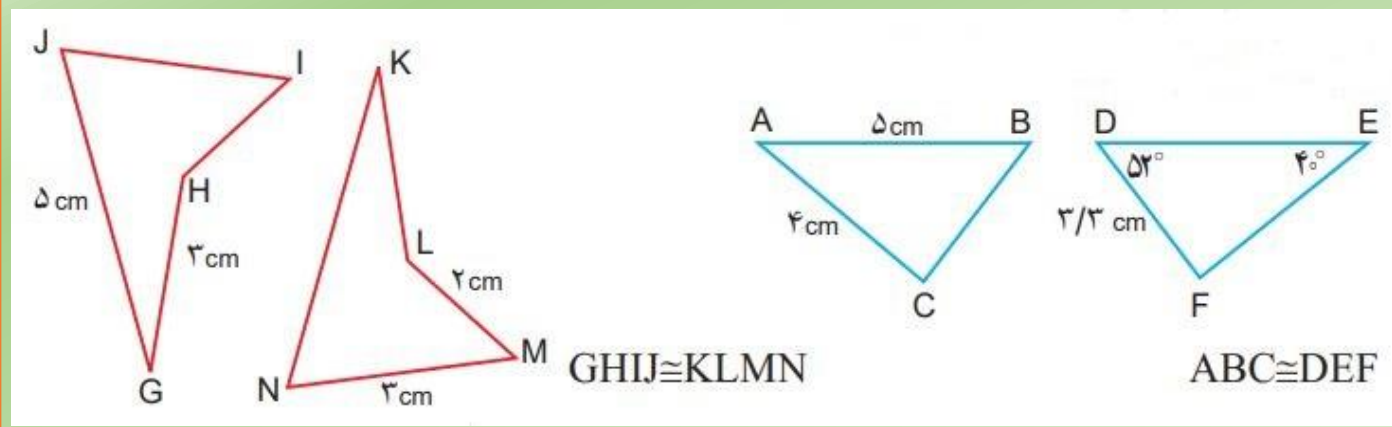
$$\overline{AC} = 6.4 \text{ cm} \quad \overline{ED} = 4 \text{ cm} \quad \overline{DF} = 5 \text{ cm}$$

$$D = 90^\circ \quad F = 180 - (56 + 90) = 34^\circ$$

$$A = 34^\circ \quad B = 90^\circ \quad C = 56^\circ$$

تمرین (۴):

با توجه به هم نهشتی شکل های هر قسمت در صورت امکان اندازه ضلع ها و زاویه های متناظر را پیدا کنید و بنویسید.



$$GHIJ \cong KLMN$$

$$ABC \cong DEF$$

فعالیت :

گاهی اوقات برای به دست آوردن اندازه اضلاع در شکل ها باید از قواعدی که قبلاً آموخته ایم ، کمک بگیریم . مانند فیثاغورس یا مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی ها و به مسئله زیر دقت کنید.

چهار ضلعی DEFG را نسبت به خطی افقی قرینه کرده ایم و چهار ضلعی HIJK را به دست آورده ایم. اندازه برخی از ضلع ها و زاویه ها معلوم است. اندازه ضلع ها و زاویه های دیگر این چهار ضلعی را به دست آورید.

در شکل بالا تنها ضلعی که اندازه ندارد GF است. برای به دست آوردن اندازه این ضلع ابتدا باید اندازه وتر DF را در مثلث قائم الزویه EDF با استفاده از فیثاغورس به دست آوریم و به کمک آن باز هم با فیثاغورس در مثلث DGF اندازه GF را محاسبه کنیم.

در مثلث EDF:

$$3^2 + 4^2 = DF^2$$

$$DF^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow DF = \sqrt{25} = 5$$

در مثلث DGF:

$$GF^2 + (\sqrt{5})^2 = 5^2$$

$$GF^2 = 25 - 5 = 20 \Rightarrow GF = \sqrt{20}$$

پس در تساوی اضلاع داریم:

$$\overline{DE} = \overline{HI} = 3\text{cm} \quad \overline{DG} = \overline{HK} = \sqrt{5}\text{cm}$$

$$\overline{GF} = \overline{KJ} = \sqrt{20}\text{cm} \quad \overline{EF} = \overline{IJ} = 4\text{cm}$$

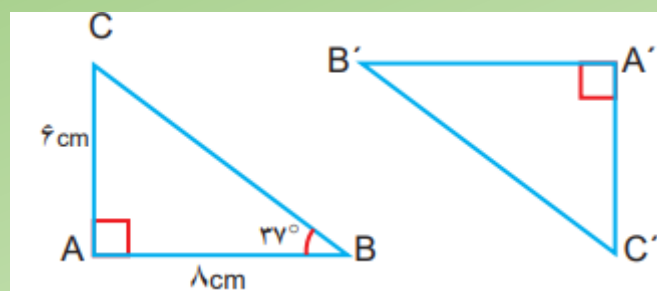
همچنین برای یافتن مقدار زاویه ها می توان از مجموع زاویه های داخلی چهار ضلعی ها کمک گرفت.

$$G = K = 90^\circ \quad D = H = 117^\circ \quad E = \hat{I} = 90^\circ$$

$$F = J = 360 - (90 + 90 + 117) = 63^\circ$$

تمرین (5):

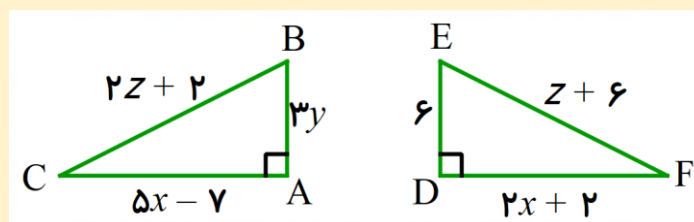
در شکل مقابل $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ اندازه برخی ضلع ها و زاویه ها نوشته شده است. اندازه ضلع ها و زاویه های دیگر را به دست آورید.



فعالیت :

در بعضی از مسائل هم با تشکیل معادله و حل آن می توان مقدار مورد نظر را به دست آورد.

دو مثلث زیر با یکدیگر هم نهشت هستند. ابتدا مقادیر مجهول را به دست آورده و سپس اندازه هر ضلع را محاسبه کنید.



کافی است اندازه ضلع هایی که با هم برابرند را در یک تساوی بنویسیم. معادله ای تشکیل می شود و با حل آن مقدار مجهول به دست می آید. سپس با جایگذاری این مقدار در یکی از عبارت ها اندازه ضلع نیز به دست می آید.

$$5x - 7 = 2x + 2$$

$$5x - 2x = 7 + 2$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

$$\overline{AC} = 5x - 7 = 5 \times 3 - 7 = 8$$

$$\overline{DF} = 2x + 2 = 2 \times 3 + 2 = 8$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3} = 2$$

$$\overline{AB} = 3y = 3 \times 2 = 6$$

$$\overline{DE} = 6$$

$$2z + 2 = z + 6$$

$$2z - z = 6 - 2$$

$$z = 4$$

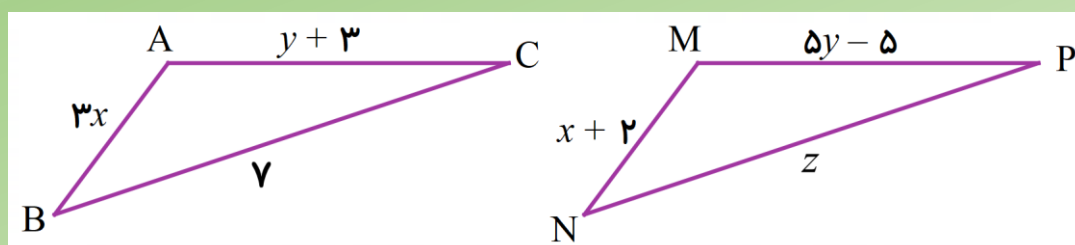
$$\overline{BC} = 2z + 2 = 2 \times 4 + 2 = 10$$

$$\overline{EF} = z + 6 = 4 + 6 = 10$$

تمرین (6):

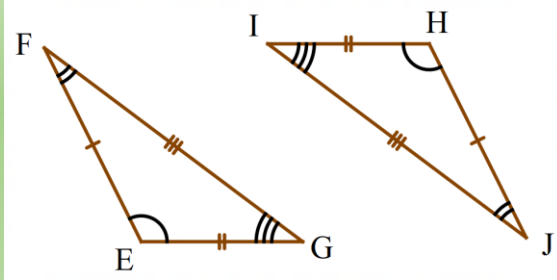
مثلث ABC را می توان با انتقال بر مثلث MNP منطبق کرد.

با تشکیل معادله و حل آن اندازه ضلع های مثلث را به دست آورید.



تمرین (۱):

دو مثلث زیر با یکدیگر هم نهشت می باشند. این دو مثلث با چه تبدیلی بر هم منطبق می شوند؟ دوران ۱۸۰ درجه



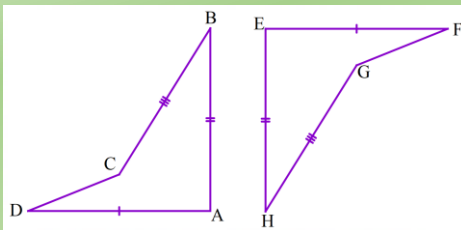
با توجه به علامت ها تساوی بین اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$$\overline{EF} = \overline{HI} \quad , \quad \overline{EG} = \overline{IJ} \quad , \quad \overline{FG} = \overline{HJ}$$

$$\hat{E} = \hat{H} \quad , \quad \hat{F} = \hat{I} \quad , \quad \hat{G} = \hat{J}$$

تمرین (۲):

دو شکل زیر با یکدیگر هم نهشت هستند. اضلاع مساوی را در شکل علامت گذاری کنید و سپس تساوی بین آنها را بنویسید.



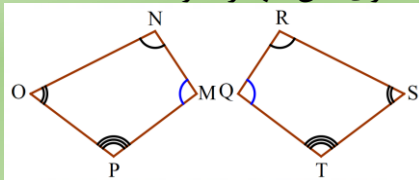
$$ABCD \cong EFGH$$

$$\overline{AD} = \overline{EH} \quad , \quad \overline{AB} = \overline{EH}$$

$$\overline{BC} = \overline{GH} \quad , \quad \overline{CD} = \overline{GF}$$

تمرین (۳):

دو شکل زیر با یکدیگر هم نهشت هستند. زاویه های مساوی را علامت گذاری کرده و تساوی بین آنها را بنویسید.

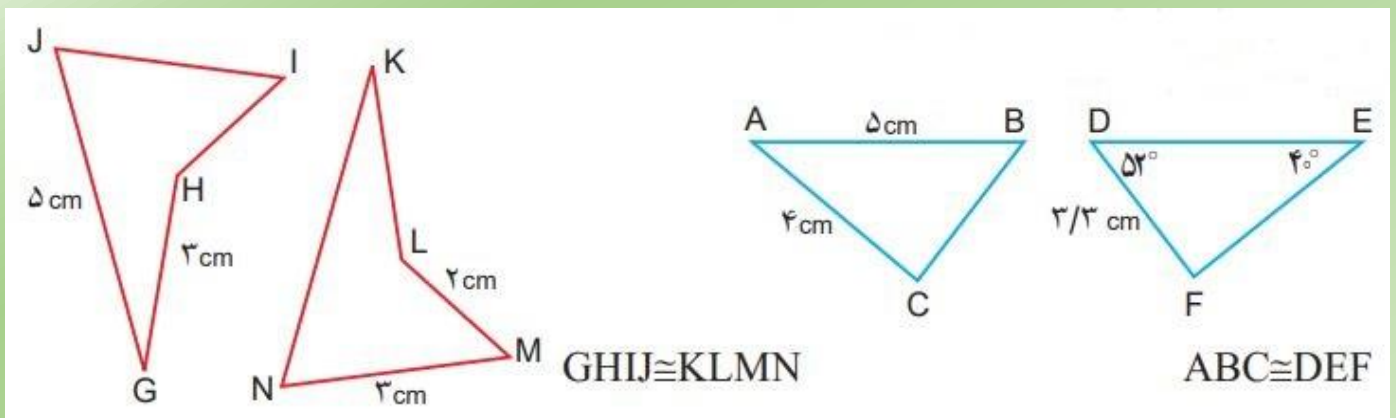


$$MNOP \cong QRST$$

$$M = Q \quad , \quad N = R \quad , \quad O = S \quad , \quad P = T$$

تمرین (۴):

با توجه به هم نهشتی شکل های هر قسمت در صورت امکان اندازه ضلع ها و زاویه های متناظر را پیدا کنید و بنویسید.



$$\overline{NK} = 5cm \quad , \quad \overline{JI} = 3cm$$

$$\overline{HI} = 3cm \quad , \quad \overline{KL} = 3cm$$

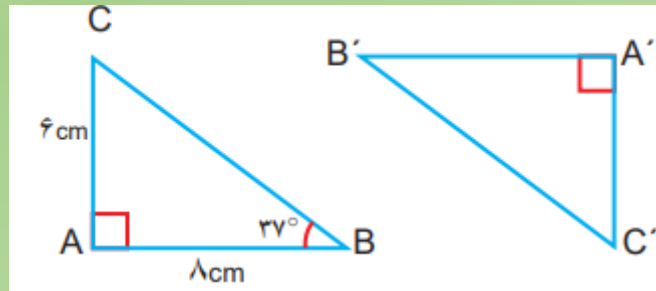
$$A = 40^\circ \quad , \quad B = 52^\circ$$

$$C = F = 180 - (52 + 40) = 88^\circ$$

$$\overline{BC} = 3/3cm \quad , \quad \overline{DE} = 5cm \quad , \quad \overline{EF} = 4cm$$

تمرین (۵):

در شکل مقابل $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ اندازه برخی ضلع ها و زاویه ها نوشته شده است. اندازه ضلع ها و زاویه های دیگر را به دست آورید.



$$6^2 + 8^2 = BC^2$$

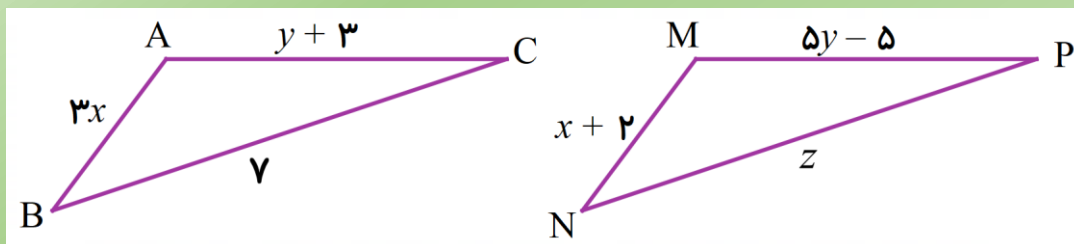
$$BC^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = \sqrt{100} = 10$$

$$\overline{A'B'} = 8 \text{ cm} \quad , \quad \overline{A'C'} = 6 \text{ cm} \quad , \quad \overline{B'C'} = 10 \text{ cm}$$

$$A' = 90^\circ \quad , \quad B' = 37^\circ \quad , \quad C = C' = 180 - (90 + 37) = 53^\circ$$

تمرین (۶):

مثلث ABC را می توان با انتقال بر مثلث MNP منطبق کرد. با تشکیل معادله و حل آن اندازه ضلع های مثلث را به دست آورید.



$$3x = x + 2$$

$$3x - x = 2$$

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

$$\overline{AB} = 3x = 3 \times 1 = 3$$

$$\overline{MN} = x + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$5y - 5 = y + 3$$

$$5y - y = 3 + 5$$

$$4y = 8$$

$$y = \frac{8}{4} = 2$$

$$\overline{AC} = y + 3 = 2 + 3 = 5$$

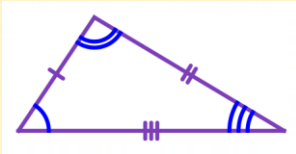
$$\overline{MN} = 5y - 5 = 5 \times 2 - 5 = 5$$

$$z = y$$

$$\overline{BC} = y$$

$$\overline{NP} = z = y$$

فعالیت :



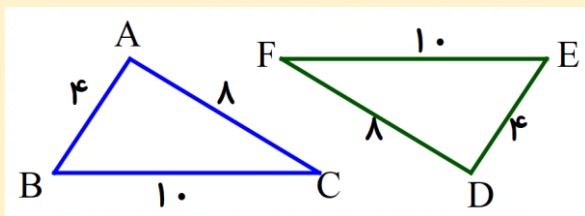
به مثلث مقابل نگاه کنید. آیا می توانید اجزای مثلث را نشان دهید؟
هر مثلث از سه ضلع و سه زاویه تشکیل شده است. به آنها خوب دقت کنید.

می خواهیم با استفاده از کاغذ شفاف و به کمک اجزای مثلث ، مثلثی هم نهشت با این مثلث ایجاد کنیم. پیشنهاد می کنم که ابتدا فقط ضلع ها را روی کاغذ پوستی بکشیم.



همانطور که مشاهده می کنید، اگر سه ضلع مثلثی را روی کاغذ شفاف بکشیم و آنها را در جایی دیگر دقیقاً کنار هم قرار دهیم مثلثی که ایجاد می شود با مثلث اولی هم نهشت است. پس نتیجه می گیریم.

« هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث هم نهشت هستند.»



مثال (۱): به دو مثلث مقابل و اندازه های آنها دقت کنید.

$$\overline{AB} = \overline{DE} = 4$$

$$\overline{AC} = \overline{DF} = 8$$

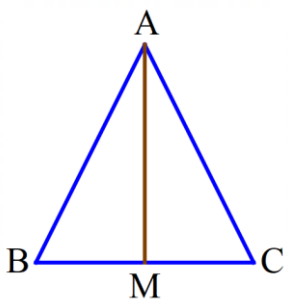
$$\overline{BC} = \overline{EF} = 10$$

مشاهده می کنید که اندازه سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF برابرند. پس مس توان نتیجه گرفت که این دو مثلث هم نهشت هستند.

مثال (۲):

در بعضی از شکل ها اندازه وجود ندارند و باید با توجه به شکل و صورت مسئله و مطالبی که از قبل می دانیم جهت نشان دادن برابری ها استفاده کنیم.

در شکل زیر نقطه M وسط ضلع BC است. مثلث ABC متساوی الساقین است. پاره خطی مانند AM، که راس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می کند، میانه می نامیم.



می خواهیم بررسی کنیم آیا دو مثلثی که در شکل می بینید (ABM و ACM) هم نهشت هستند؟
وقتی صورت مسئله بیان می کند که مثلث ABC متساوی الساقین است، می توان نتیجه گرفت که

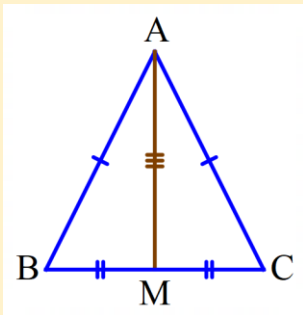
$$\overline{AC} = \overline{AB}$$

دو ضلع AB و AC با هم برابرند.

همچنین نقطه M وسط ضلع BC است، و این یعنی دو ضلع BM و CM با هم برابرند. $\overline{BM} = \overline{CM}$

از طرفی هر دو مثلث در ضلع AM به هم چسبیده اند، پس این ضلع بین دو مثلث مشترک است. پس می توان نتیجه گرفت

$$\overline{AM} = \overline{AM} \quad \text{که:}$$



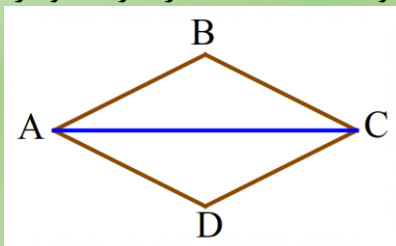
همانطور که مشاهده کردید با توجه به اطلاعات مسئله و هم چنین شکل دانستیم که سه ضلع مثلث ABM با سه ضلع از مثلث ACM برابرند. پس می توانیم نتیجه بگیریم که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت هستند.

این حالت را به اختصار (سه ضلع) می نامند و با علامت (ض ض ض) نشان می دهیم.

در شکل مقابل ضلع های مساوی علامت گذاری شده اند تا بهتر این موضوع را متوجه شوید.

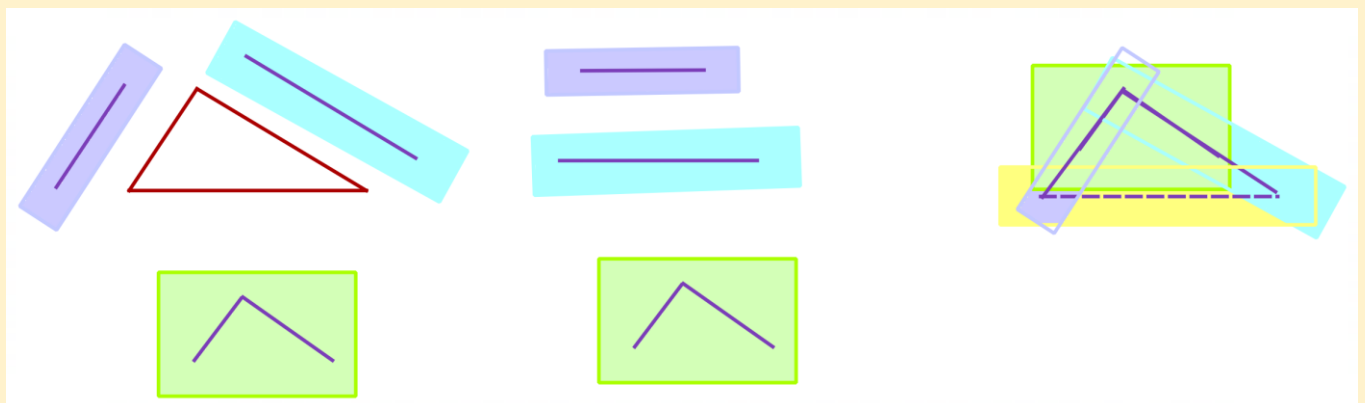
تمرین (۱):

شکل مقابل یک لوزی است. یکی از قطرهای آن رسم شده است. دلیل تساوی ضلع های دو مثلث ایجاد شده را بنویسد و در شکل علامت گذاری کنید. در نهایت بگویید با چه حالتی دو مثلث هم نهشت هستند.



فعالیت :

به همان مثلث فعالیت اول باز می گردیم. این بار دو ضلع و زاویه بین آنها را روی کاغذ شفاف رسم می کنیم.

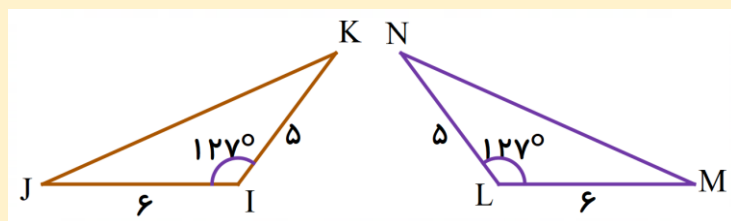


همانطور که مشاهده می کنید، هرگاه دو ضلع و زاویه بین آنها را روی کاغذ شفاف بکشیم و در جایی دیگر دقیقاً روی هم قرار دهیم، مثلثی ایجاد نمی شود ولی اگر انتهای دو ضلع را با خط چین به هم وصل کنیم، مثلثی که ایجاد می شود با مثلث اصلی هم نهشت است. در نتیجه:

« هرگاه دو ضلع و زاویه بین از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم نهشت هستند.»

مثال (۱):

به مثلث های زیر و اندازه های آنها توجه کنید.



$$\overline{IJ} = \overline{LM} = 6$$

$$\hat{I} = \hat{L} = 127^\circ$$

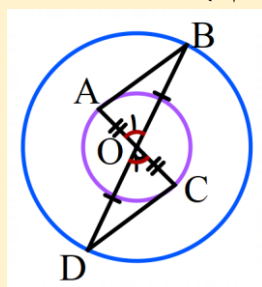
$$\overline{IK} = \overline{LN} = 5$$

مشاهده می کنید که دو ضلع و زاویه بین آن در مثلث IJK با دو ضلع و زاویه بین آن در مثلث NLM برابرند، پس می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث هم نهشت هستند.

مثال (۲):

در این مثال نیز از شکل و صورت مسئله و مواردی که قبلاً یاد گرفته ایم استفاده می کنیم.

در شکل مقابل نقطه O مرکز دایره ها است. می خواهیم بررسی کنیم که دو مثلث OAB و OCD هم نهشت هستند.



از دوره ابتدایی می دانید که در دایره شعاع ها با هم برابرند، در این شکل دو دایره هم مرکز

می بینید. پس می توان نتیجه گرفت که شعاع های هر دایره با هم برابرند.

$$\overline{OA} = \overline{OC}$$

دایره کوچک:

$$\overline{OB} = \overline{OD}$$

دایره بزرگ:

در پایه هفتم با زاویه های متقابل به راس آشنا شدید. همانجا یاد گرفتید که دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند.

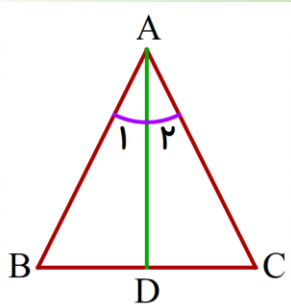
$$O_1 = O_2$$

همانطور که مشاهده می کنید، دو ضلع و زاویه بین آنها در مثلث OAB با دو ضلع و زاویه بین آنها در مثلث ODC

برابرند. پس می توان نتیجه گرفت این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت هستند.

$$\triangle OAB \cong \triangle OCD$$

تمرین (۲):

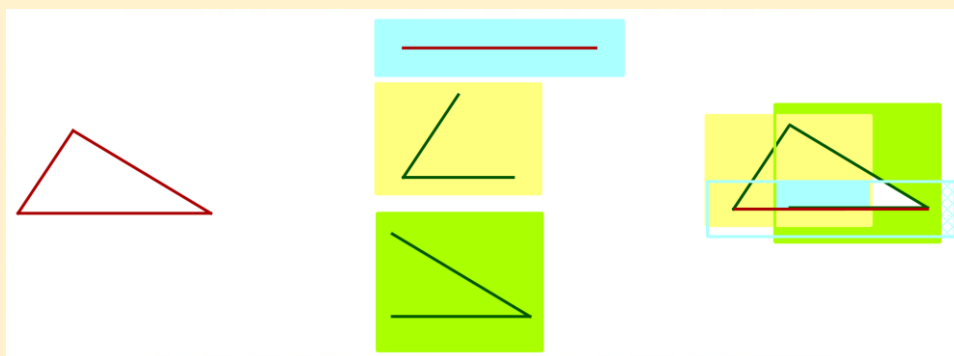


در شکل مقابل، نیمساز زاویه رو به رو به قاعده مثلث متساوی الساقین ABC را رسم کرده ایم.

نشان دهید که دو مثلث ABD و ACD با یک دیگر هم نهشت هستند.

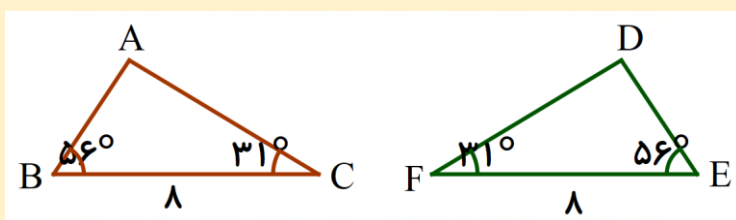
فعالیت :

در همان مثلث فعالیت اول، این بار دو زاویه و ضلع بین مثلث را روی کاغذ شفاف رسم می کنیم.



همانطور که در شکل بالا مشاهده می کنید. هر گاه دو زاویه و ضلع بین مثلثی را روی کاغذ شفاف کشیده و در جایی دیگر آنها را روی هم قرار دهیم، مثلثی که ایجاد می شود با مثلث اولیه هم نهشت است. در نتیجه:

« هر گاه دو زاویه و ضلع بین از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم نهشت هستند.»

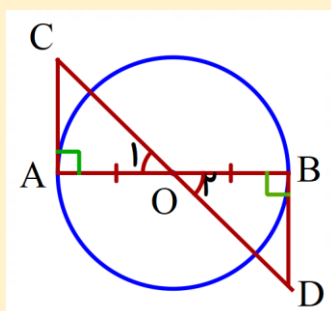


مثال (۱): به مثلث ها دقت کنید. $B = E = 56^\circ$

$$\overline{BC} = \overline{EF} = 8$$

$$C = F = 31^\circ$$

در این جا هم مشاهده می کنید دو زاویه و ضلع بین آن در مثلث ABC با دو زاویه و ضلع بین آن در مثلث DEF برابرند. پس می توان نتیجه گرفت دو مثلث هم نهشت هستند.



مثال (۲): در شکل مقابل می خواهیم بررسی کنیم که آیا دو مثلث AOC و BOD

با یکدیگر هم نهشت هستند؟

$$A = B = 90^\circ$$

با توجه به شکل مشاهده می کنید دو زاویه قائمه هستند.

$$\overline{OA} = \overline{OB}$$

همچنین در دایره شعاع ها با هم برابرند.

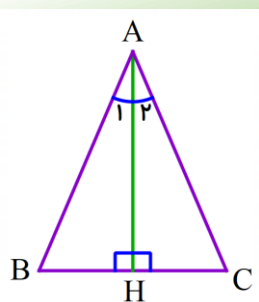
$$O_1 = O_2$$

و همچنین زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.

مشاهده می کنید که دو زاویه و ضلع بین آنها در مثلث OAC با دو زاویه و ضلع بین آنها در مثلث OBD با هم برابرند، در

$$\triangle OAC \cong \triangle OBD$$

نتیجه این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت هستند.



تمرین (۳):

در مثلث ABC نیمساز زاویه A ارتفاع وارد بر قاعده BC است.

بررسی کنید چرا دو مثلث ABH و ACH با یکدیگر هم نهشت هستند.

از اینکه این دو مثلث هم نهشت هستند چه نتیجه ای در باره مثلث ABC می توان گرفت؟

تمرین (۴):

یک مثلث دلخواه بر روی کاغذ رسم کنید، این بار هر سه زاویه آن را روی کاغذ شفاف بکشید، حالا این سه زاویه را در جایی دیگر کنار هم قرار دهید. آیا مثلثی که ایجاد می شود با مثلث اصلی هم نهشت است؟ علت را توضیح دهید.

فعالیت :

به طور کلی هم نهشتی دو مثلث، سه حالت دارد که به طور اختصار به صورت زیر است:

* برابری دو زاویه و ضلع بین

(ز ض ز)

* برابری دو ضلع و زاویه بین

(ض ز ض)

* برابری سه ضلع

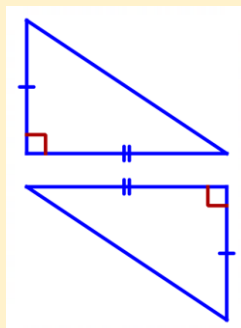
(ض ض ض)

برای تشخیص حالت هم نهشتی دو مثلث علامت هایی که روی شکل ها می گذاریم بسیار مهم هستند. در این مورد دو وضعیت وجود دارد:

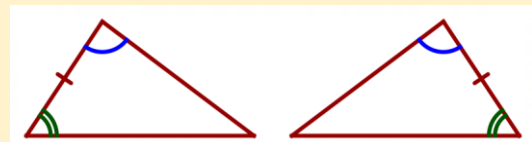
الف) شکل ها را با علامت ها به شما می دهند. در این حالت کافی است بررسی کنید که با کدام حالت با یکدیگر هم نهشت می شوند. باید دقت کنید که علامت گذاری ها برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی باشد. به مثال های زیر توجه کنید.



اطلاعات برای هم نهشتی کافی نیست

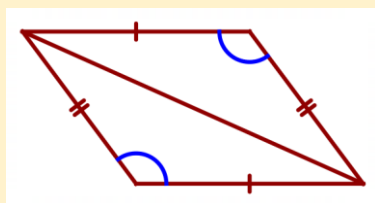


برابری دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)



برابری دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)

ب) با توجه به اطلاعات مسئله و دلایلی منطقی علامت گذاری می کنیم و حالت هم نهشتی را بیان می کنیم. به مثال زیر دقت کنید.



شکل مقابل متوازی الاضلاع است. دو مثلث بنا به چه حالتی هم نهشت هستند.

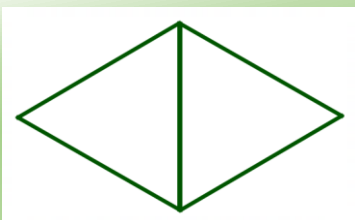
در درس مربوط به چهارضلعی ها یاد گرفتید که در متوازی الاضلاع، ضلع های رو به رو

دو به دو با هم برابرند، پس این ضلع ها را علامت گذاری می کنیم. ضمناً زاویه های

رو به رو نیز برابرند. در نتیجه: دو مثلث بنا به حالت برابری دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض) با یکدیگر هم نهشت هستند.

به نظر شما آیا می توان هم نهشتی این دو مثلث را با حالتی دیگر هم بیان کرد؟ خوب فکر کنید.

تمرین (۵):

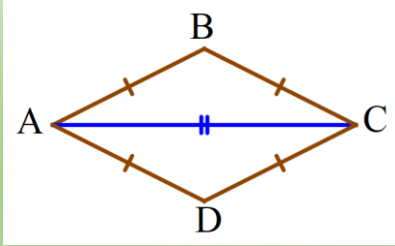


در شکل مقابل هر دو مثلث متساوی الاضلاع هستند. با علامت گذاری مناسب و بیان

دلیل، حالت هم نهشتی را بنویسید.

تمرین (۱):

شکل مقابل یک لوزی است. یکی از قطرهای آن رسم شده است. دلیل تساوی ضلع های دو مثلث ایجاد شده را بنویسد و در شکل علامت گذاری کنید. در نهایت بگویید با چه حالتی دو مثلث هم نهشت هستند.



در چهارضلعی ها یاد گرفتیم که در لوزی همه ضلع ها با هم برابر هستند.

$$\overline{AB} = \overline{AD} \quad , \quad \overline{BC} = \overline{CD}$$

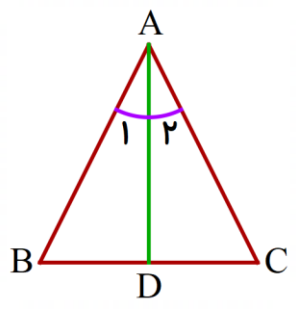
از طرفی قطر در هر دو مثلث مشترک است.

$$\overline{AC} = \overline{AC}$$

در نتیجه هر سه ضلع مثلث ABC با هر ضلع مثلث ADC برابرند و این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت هستند.

تمرین (۲):

در شکل مقابل، نیمساز زاویه رو به رو به قاعده مثلث متساوی الساقین ABC را رسم کرده ایم. نشان دهید که دو مثلث ABD و ACD با یکدیگر هم نهشت هستند.



$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

با توجه به اینکه مثلث متساوی الساقین است. دو ساق با هم برابرند.

همچنین می دانیم نیمساز خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. چون نیمساز مربوط به زاویه A

$$A_1 = A_2 \quad \text{است.}$$

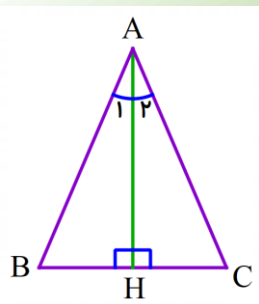
$$\overline{AD} = \overline{AD}$$

و خط AD در هر دو مثلث مشترک است.

در نتیجه دو ضلع و زاویه بین از مثلث ABD با دو ضلع و زاویه بین از مثلث ADC برابر است. پس دو مثلث با یکدیگر هم نهشت هستند.

تمرین (۳):

در مثلث ABC نیمساز زاویه A ارتفاع وارد بر قاعده BC است. بررسی کنید چرا دو مثلث ABH و ACH با یکدیگر هم نهشت هستند. از اینکه این دو مثلث هم نهشت هستند چه نتیجه ای



$$A_1 = A_2$$

در باره مثلث ABC می توان گرفت؟ نیمساز زاویه A:

ارتفاع وارد بر قاعده BC: $H_1 = H_2$ پاره خط AH در هر دو مثلث مشترک است. $\overline{AH} = \overline{AH}$

در نتیجه دو زاویه و ضلع بین از مثلث ABH با دو زاویه و ضلع بین از مثلث ACH برابرند، پس دو مثلث هم نهشت هستند.

$$\triangle ABH \cong \triangle ACH$$

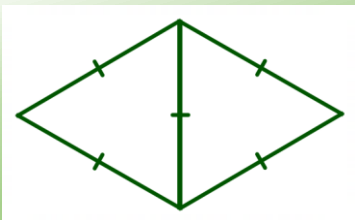
چون دو مثلث با یکدیگر هم نهشت هستند پس $AB=AC$ و این یعنی مثلث ABC متساوی الساقین است.

تمرین (۴):

یک مثلث دلخواه بر روی کاغذ رسم کنید، این بار هر سه زاویه آن را روی کاغذ شفاف بکشید، حالا این سه زاویه را در جایی دیگر کنار هم قرار دهید. آیا مثلثی که ایجاد می شود با مثلث اصلی هم نهشت است؟ علت را توضیح دهید.

با توجه به اینکه زاویه فقط رسم شده اند مثلثی که ایجاد می شود یا بزرگتر است یا کوچکتر ، علت نابرابر بودن هم نبود اندازه ضلع است .

تمرین (۵):



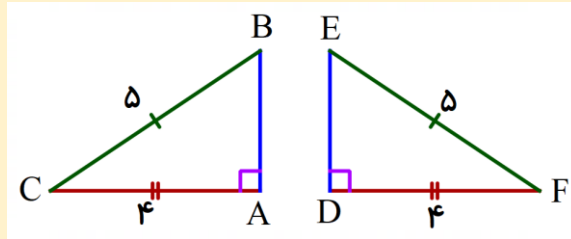
در شکل مقابل هر دو مثلث متساوی الاضلاع هستند. با علامت گذاری مناسب و بیان

دلیل ، حالت هم نهشتی را بنویسید.

در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع با هم برابرند، این دو مثلث در یک ضلع با هم مشترک هستند در نتیجه همه اضلاع آنها با هم برابرند. در نتیجه دو مثلث بنا به حالت برابری سه ضلع (ض ض ض) با یکدیگر هم نهشت هستند.

فعالیت :

در شکل زیر، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



با توجه به رابطه فیثاغورس می توان در هر یک از مثلث ها اندازه ضلع سوم را به دست آورد.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow AB^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow AB^2 + 16 = 25$$

در مثلث ABC

$$AB^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow AB = \sqrt{9} = 3$$

$$DE^2 + DF^2 = EF^2 \rightarrow DE^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow DE^2 + 16 = 25$$

در مثلث DEF

$$DE^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow DE = \sqrt{9} = 3$$

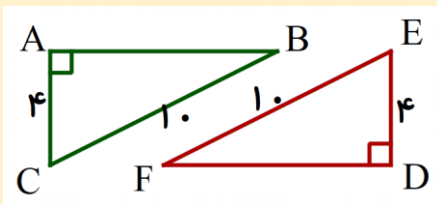
مشاهده می کنید که اندازه ضلع سوم نیز در این دو مثلث با هم برابرند، در نتیجه این دو مثلث بنابه حالت سه ضلع

(ض ض ض) با یکدیگر هم نهشت هستند. نتیجه می گیریم:

«هرگاه وتر و یک ضلع مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگر برابر باشد، آن دو مثلث با یکدیگر هم

نهشت هستند.»

مثال ۱: دو مثلث زیر با توجه به اندازه ها، بنا به حالت «وتر و یک ضلع» با یکدیگر هم نهشت هستند.



$$\overline{AC} = \overline{DE} = 4$$

ضلع

$$\overline{CB} = \overline{EF} = 10$$

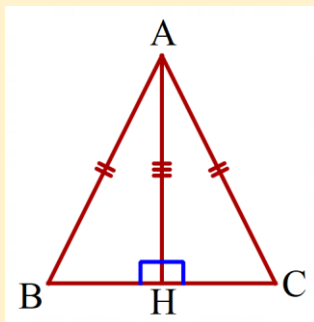
وتر

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

بنا به حالت وتر و یک ضلع

مثال ۲: پاره خط AH، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است. می خواهیم بررسی کنیم که آیا دو مثلث

ABH و ACH هم نهشت هستند.



$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

با توجه به اینکه مثلث متساوی الساقین است، می توان گفت:

از طرفی این دو پاره خط وتر های مثلث های قائم الزاویه نیز می باشند.

$$\overline{AH} = \overline{AH}$$

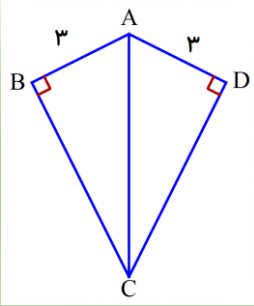
از طرفی هر دو مثلث در ضلع AH مشترک هستند.

مشاهده می کنید که وتر و یک ضلع مثلث قائم الزاویه ABH با وتر و یک ضلع مثلث قائم الزاویه ACH برابرند. در نتیجه

$$\triangle ABH \cong \triangle ACH$$

این دو مثلث هم نهشت هستند.

تمرین (۱):



با توجه به شکل و اندازه های آن ، بررسی کنید که

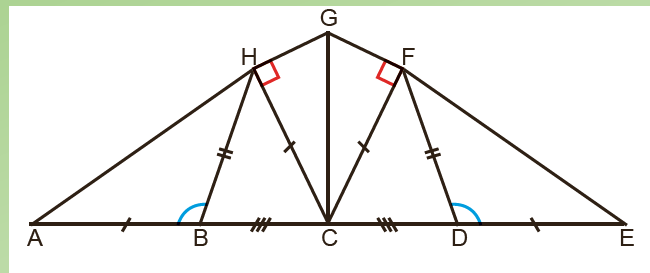
چرا دو مثلث قائم الزاویه هم نهشت هستند.

(تساوی ها و دلایل را بنویسید)

تمرین (۲):

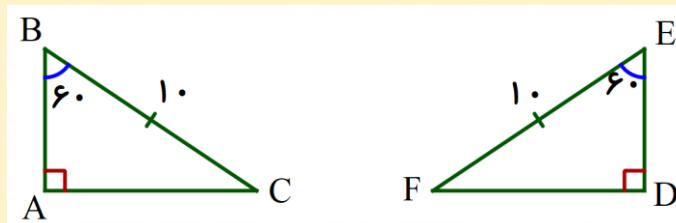
با توجه به علامت های شکل زیر، مثلث های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت هم نهشتی هر جفت را بیان کنید.

نمونه: $\triangle ABH \cong \triangle DEF$ بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)



فعالیت :

در شکل زیر، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.



با توجه به اینکه مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر 180° درجه است. می توان اندازه زاویه سوم در هر مثلث را به دست

$$C = 180 - (90 + 60) = 30^\circ$$

$$F = 180 - (90 + 60) = 30^\circ$$

آورد.

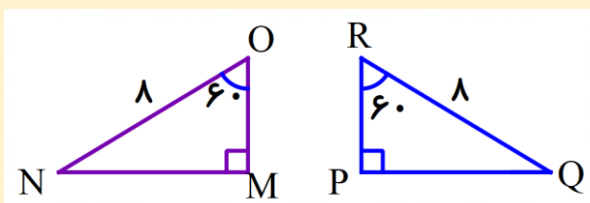
با توجه به برابری این زاویه ها می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث بنابه حالت دو ضلع بین (ز ض ز) هم نهشت

هستند. نتیجه می گیریم:

« هرگاه وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری برابر باشد، آن دو مثلث

هم نهشت هستند.»

مثال ۱: دو مثلث زیر با توجه به اندازه های داده شده بنا به حالت « وتر و یک زاویه تند » با یکدیگر هم نهشت هستند.



$$O = R = 60^\circ$$

زاویه تند

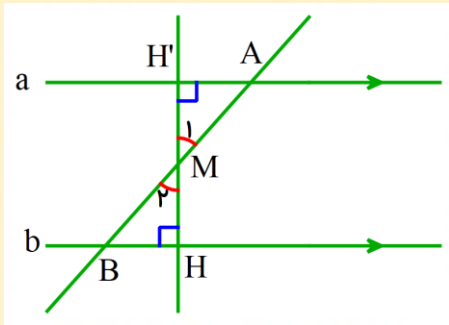
$$\overline{ON} = \overline{RQ} = 8$$

وتر

$$\triangle OMN \cong \triangle PRQ$$

بنا به حالت وتر و یک زاویه تند

از نقطه M، وسط پاره خط AB بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده ایم. می خواهیم بررسی کنیم که آیا دو مثلث AMH' و BMH هم نهشت هستند.



$$\overline{MA} = \overline{MB}$$

با توجه به اینکه نقطه M، وسط پاره خط AB است.

و این یعنی وتر این دو مثلث با هم برابرند.

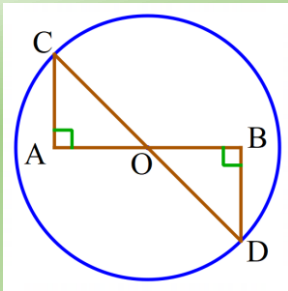
از طرفی دو زاویه مشخص شده در نقطه M متقابل به راس هستند. $M_1 = M_2$

مشاهده می کنید که وتر و یک زاویه تند مثلث قائم الزاویه AMH' با وتر و یک زاویه تند مثلث قائم الزاویه BMH برابرند.

$$\triangle AMH' \cong \triangle BMH$$

در نتیجه این دو مثلث هم نهشت هستند.

تمرین (۳):



حالت هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه زیر را بیان کنید.

(تساوی ها و دلایل را بنویسید.)

فعالیت :

با توجه به فعالیت های قبل دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه می توان بیان کرد:

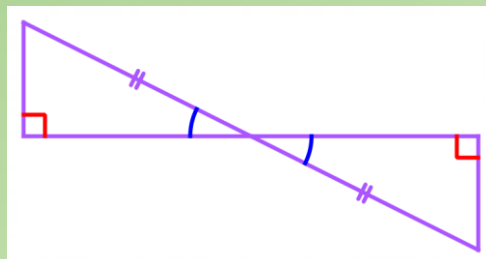
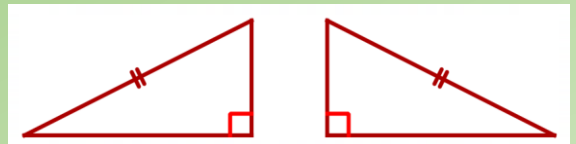
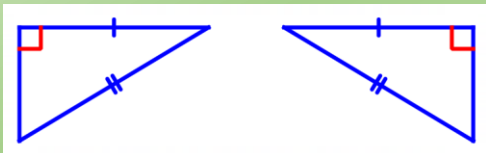
***برابری وتر و یک زاویه تند یا به اختصار (وز)**

***برابری وتر و یک ضلع یا به اختصار (وض)**

در نتیجه علاوه بر سه حالت هم نهشتی مثلث ها (ض ض ض) و (ض ز ض) و (ز ض ز) که در درس قبل یاد گرفتید. این دو حالت فقط برای مثلث های قائم الزاویه استفاده می شود.

تمرین (۴):

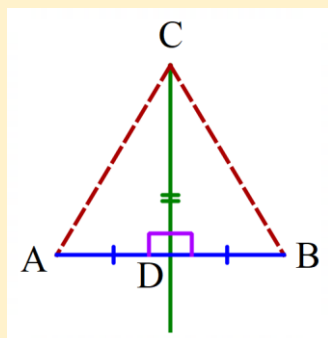
در هر شکل، بعضی از ضلع ها و زاویه های مساوی مشخص شده اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم نهشت اند.



فعالیت :

در حل مسائل مربوط به هم نهشتی مثلث ها یافتن اجزای مساوی و دلایل آنها بسیار مهم است و بعد از آن تشخیص حالت هم نهشتی بر اساس اجزای مساوی انجام می شود. به مثال زیر توجه کنید.

نشان دهید: « هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»



همانطور که در سال های قبل یاد گرفتید عمود منصف ،خطی است که پاره خط را هم نصف

می کند و هم بر آن عمود است. یعنی در شکل مقابل $D = 90^\circ$ و همچنین $\overline{AD} = \overline{BD}$

می خواهیم نشان دهیم که فاصله نقطه C از دو سر پاره خط AB به یک اندازه است. یعنی

خط چین ها با هم برابرند. اگر نشان دهیم که دو مثلث هم نهشت هستند ، از تساوی بین

اجزای آنها می توان برابری این دو پاره خط را نتیجه بگیریم.

اضلاع مساوی در شکل علامت گذاری شده اند. شاید به خاطر قائم الزاویه بودن بخواهید از دو حالت (وض) یا (وز) استفاده کنید ولی مشکلی که وجود دارد این است که وتر در این دو مثلث علامت نخورده است.

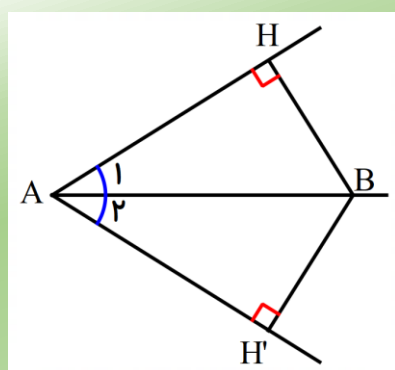
پس باید از حالت های قبلی استفاده کنیم. با توجه به علامت ها دو مثلث بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)

$$\hat{ADC} \cong \hat{BDC}$$

هم نهشت هستند.

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

از تساوی بین اجزای متناظر می توان نتیجه گرفت که:



تمرین (۵):

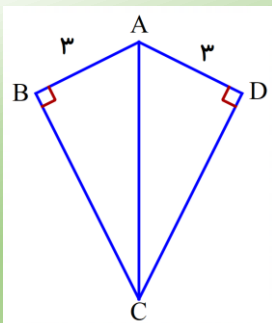
برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید:

« هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط، برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن

خط عمود می شود.)

تمرین (۱):



با توجه به شکل و اندازه های آن، بررسی کنید که چرا دو مثلث قائم الزاویه هم نهشت هستند.

با توجه به اندازه ای که در شکل می بینید، می توان نوشت $\overline{AB} = \overline{AD} = ۳$

همچنین هر دو مثلث در وتر AC مشترک هستند. پس: $\overline{AC} = \overline{AC}$

در نتیجه وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ADC برابر است. در نتیجه دو

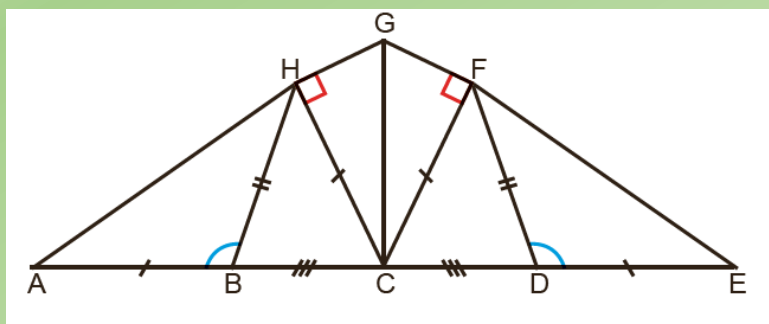
$$\triangle ABC \cong \triangle ADC$$

مثلث قائم الزاویه هم نهشت هستند.

تمرین (۲):

با توجه به علامت های شکل زیر، مثلث های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت هم نهستی هر جفت را بیان کنید.

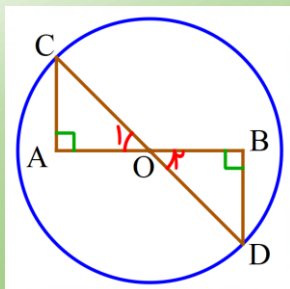
نمونه: $\triangle ABH \cong \triangle DEF$ بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)



بنا به حالت سه ضلع (ض ض ض) $\triangle BHC \cong \triangle CFD$

بنا به حالت وتر و یک ضلع (و ض) $\triangle CHG \cong \triangle CFG$

تمرین (۳):



حالت هم نهستی دو مثلث قائم الزاویه زیر را بیان کنید.

با توجه به دایره و برابری شعاع آن، دو وتر مثلث های قائم الزاویه با هم برابرند.

$$\overline{OC} = \overline{OD}$$

همچنین در اطراف نقطه O زاویه های متقابل به راس داریم که با هم برابرند.

$$O_1 = O_2$$

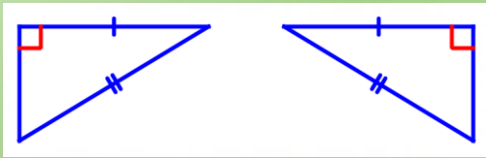
در نتیجه وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه AOC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه BOD برابر است. در

$$\triangle AOC \cong \triangle BOD$$

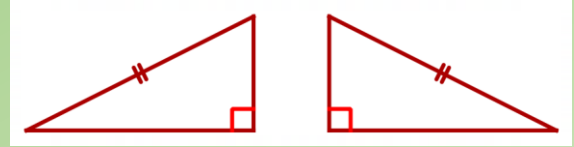
نتیجه دو مثلث قائم الزاویه هم نهشت هستند.

تمرین (۴):

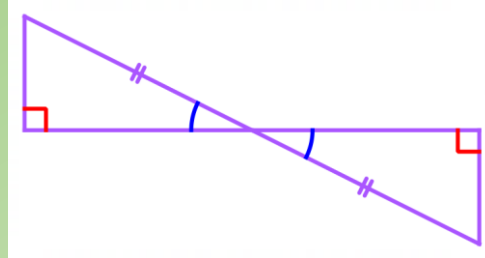
در هر شکل ، بعضی از ضلع ها و زاویه های مساوی مشخص شده اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم نهشت اند.



وتر و یک ضلع (وض)



اطلاعات کافی نیست



وتر و یک زاویه (وز)

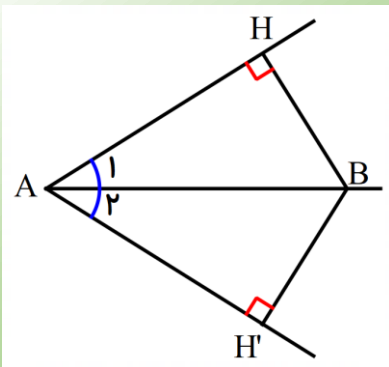
تمرین (۵):

برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید:

« هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط، برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن

خط عمود می شود).



برای نشان دادن درستی این عبارت باید نشان دهیم که $\overline{BH} = \overline{BH'}$ برای این کار ، کافی است نشان دهیم دو مثلث هم نهشت هستند و از تساوی بین اجزای متناظر آنها این تساوی را نتیجه بگیریم.

با توجه به نیمساز می توان نتیجه گرفت که $A_1 = A_2$

همچنین هر دو مثلث قائم الزاویه در وتر AB مشترک هستند. $\overline{AB} = \overline{AB}$

در نتیجه وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABH با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABH' برابر است. در

نتیجه دو مثلث قائم الزاویه هم نهشت هستند. $\triangle ABH \cong \triangle ABH'$

و زمانی که دو مثلث هم نهشت هستند همه اجزای آنها نیز با هم برابرند و در نتیجه : $\overline{BH} = \overline{BH'}$