



جزوه ریاضی ۱ پایه دهم * مجتمع استعداد های ناب صالحین آبادان * آقای ملاسعیدی

دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. این عدد ثابت را قدر نسبت نامیده و با نماد r نمایش می دهند. ($r \neq 0$)
به عنوان نمونه دنباله ی $۲, ۶, ۱۸, \dots$ یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت $r = ۳$ می باشد.



نکته: نسبت هر جمله به جمله ی قبلی، برابر قدر نسبت دنباله است به عبارت بهتر $r = \frac{\text{هر جمله}}{\text{جمله ی قبلی}}$ می باشد.

مثال: از بین دنباله های زیر، دنباله ی هندسی را به همراه قدر نسبت آن مشخص کنید.

الف) $۴, -۲, ۱, -\frac{1}{۲}, \dots \Rightarrow r = \frac{-۲}{۴} = -\frac{1}{۲}$ دنباله هندسی بوده و قدرنسبت آن

ب) $\frac{\sqrt{3}}{۳}, ۱, \sqrt{3}, ۳, \dots \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{۱} = \sqrt{3}$ دنباله هندسی بوده و قدر نسبت آن

پ) $۲, ۶, ۹, \dots \Rightarrow$ دنباله هندسی نیست

تعیین جمله ی عمومی: اگر a جمله ی اول و r قدر نسبت دنباله فرض شوند، جمله ی عمومی دنباله هندسی $t_n = a.r^{n-1}$ است.

مثال: در دنباله ی هندسی $\dots, -۱۲, -۶, -۳$ ، جمله ی هفتم و جمله ی عمومی را تعیین کنید.

پاسخ: در این دنباله جمله ی اول $a = -۳$ و قدرنسبت $r = \frac{-۶}{-۳} = ۲$ می باشد. بنابراین:

$$t_7 = a.r^6 = (-۳)(۲)^6 = -۳ \times ۶۴ = -۱۹۲$$

$$t_n = a.r^{n-1} = (-۳)(۲)^{n-1}$$

مثال: اگر t_n دنباله ی هندسی باشد، کدامیک از تساوی های زیر صحیح است؟

الف) $t_۳ \times t_۹ = t_۵ \times t_۷$

$$\left. \begin{aligned} t_۳ \times t_۹ &= a.r^۲ \times a.r^۸ = a^۲.r^{۱۰} \\ t_۵ \times t_۷ &= a.r^۴ \times a.r^۶ = a^۲.r^{۱۰} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_۳ \times t_۹ = t_۵ \times t_۷$$

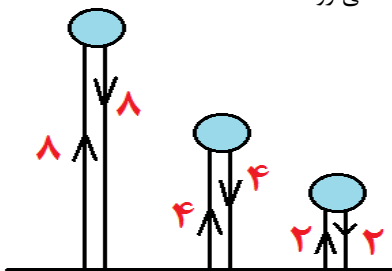
پاسخ: تساوی برقرار است زیرا:

ب) $t_۲ \times t_۷ = t_۹$

$$\left. \begin{aligned} t_۲ \times t_۷ &= a.r \times a.r^۶ = a^۲.r^۷ \\ t_۹ &= a.r^۸ \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_۲ \times t_۷ \neq t_۹$$

پاسخ: تساوی برقرار نیست زیرا:

مثال: تویی را تا ارتفاع ۸ متری به بالا پرتاب می کنیم. هر بار که زمین می خورد نصف ارتفاع قبلی بالا می رود.
دنباله ای بنویسید که هر جمله ی آن اندازه ی یک رفت و برگشت توپ را نشان دهد.
جمله ی عمومی این دنباله چیست؟



پاسخ: $۱۶, ۸, ۴, \dots \Rightarrow a = ۱۶, r = \frac{1}{۲}$

$$\Rightarrow t_n = ۱۶ \times \left(\frac{1}{۲}\right)^{n-1} = ۲^۴ \times ۲^{۱-n} \Rightarrow t_n = ۲^{۵-n}$$



مثال : چندمین جمله از دنباله ی $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$ برابر $\frac{512}{3}$ است ؟

پاسخ :

$$a = \frac{1}{6}, r = \frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \xrightarrow{t_n = \frac{512}{3}} \frac{1}{6} \times 2^{n-1} = \frac{512}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 6} 2^{n-1} = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n-1 = 10 \Rightarrow \boxed{n = 11}$$

مثال : حاصل ضرب ۲۰ جمله ی نخست دنباله ی $1, 3, 9, \dots$ را به دست آورید .

پاسخ : در این دنباله $a = 1$ و $r = 3$ می باشد ، بنابراین :

$$t_1 \times t_2 \times t_3 \times \dots \times t_{20} = 1 \times 3 \times 3^2 \times \dots \times 3^{19} = 3^{(1+2+3+\dots+19)} = 3^{\frac{19 \times 20}{2}} = 3^{190}$$

نکته : اگر t_m و t_n دو جمله ی متمایز دنباله ی هندسی باشند ، قدر نسبت طبق رابطه ی $r^{n-m} = \frac{t_n}{t_m}$ به دست می آید .

مثال : جملات دوم و پنجم یک دنباله ی هندسی به ترتیب ۳ و ۲۴ می باشد .

الف) دنباله را با نوشتن سه جمله ی نخست مشخص کنید .

$$\left. \begin{aligned} t_2 = 3, t_5 = 24 &\Rightarrow r^{5-2} = \frac{t_5}{t_2} = \frac{24}{3} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \\ t_2 = a.r &\Rightarrow 3 = a \times 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{دنباله: } \frac{3}{2}, 3, 6, \dots$$

$$t_n = a.r^{n-1} = \frac{3}{2} \times 2^{n-1} \Rightarrow t_n = 3 \times 2^{n-2}$$

ب) جمله ی عمومی این دنباله را تعیین کنید .

پ) این دنباله چند جمله کمتر از ۴۸ دارد ؟

$$t_n < 48 \Rightarrow 3 \times 2^{n-2} < 48 \xrightarrow{\div 3} 2^{n-2} < 16 \Rightarrow 2^{n-2} < 2^4 \Rightarrow n-2 < 4 \Rightarrow n < 6 \Rightarrow \text{جمله } 5$$

مثال : بین دو عدد ۳ و ۹۶ چهار واسطه ی هندسی درج کنید .

پاسخ : دنباله به صورت $3, \dots, 96$ خواهد بود ، بنابراین $t_1 = 3$ و $t_6 = 96$ می باشد :

$$r^{6-1} = \frac{t_6}{t_1} = \frac{96}{3} \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow 3 \text{ و } 6 \text{ و } 12 \text{ و } 24 \text{ و } 48 \text{ و } 96$$

نکته : هرگاه a, b, c سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند ، b را میانگین هندسی (واسطه ی هندسی) نامیده و خواهیم داشت :

$$a.c = b^2 \text{ . (اولی در آخری ، مساوی مربع وسطی است.)}$$

مثال : اگر $4x$ و $2x - 1$ و $x - 4$ چهار جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی فرض شوند . مقدار x را تعیین کنید .

پاسخ :

$$(x - 4)(4x) = (2x - 1)^2 \Rightarrow \cancel{4x^2} - 16x = \cancel{4x^2} - 4x + 1 \Rightarrow -12x = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{12}}$$



مثال : سه عدد $(\frac{1}{16})^z$ و $\sqrt{2^y}$ و 8^x سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی اند . با فرض مثبت بودن x و y و z ، چه رابطه ای بین آنها برقرار است .

پاسخ : $8^x \times (\frac{1}{16})^z = (\sqrt{2^y})^2 \Rightarrow 2^{3x} \times 2^{-4z} = 2^y \Rightarrow 2^{3x-4z} = 2^y \Rightarrow 3x - 4z = y$

مثال : سه عدد 3^y و $9\sqrt{3}$ و 3^x تشکیل دنباله ی هندسی می دهند . میانگین حسابی بین x و y چیست؟

پاسخ : $3^x \times 3^y = (9\sqrt{3})^2 \Rightarrow 3^{x+y} = 81 \times 3 = 3^5 \Rightarrow x + y = 5$

بنابراین میانگین حسابی دو عدد x و y برابر است با : $\frac{x+y}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

مثال : جملات دوم ، پنجم و چهاردهم یک دنباله حسابی غیر ثابت ، به همین ترتیب سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی اند . قدر نسبت دنباله هندسی را تعیین کنید .

پاسخ : طبق دنباله ی حسابی ، جملات ذکر شده در سوال عبارتند از $a + 13d$ و $a + 4d$ و $a + d$ ، که گفته شده تشکیل دنباله هندسی

داده اند . بنابراین : $(a + 13d)(a + d) = (a + 4d)^2 \Rightarrow \cancel{a^2} + 14ad + 13d^2 = \cancel{a^2} + 8ad + 16d^2$

$\Rightarrow 6ad = 3d^2 \xrightarrow{\div 3d} 2a = d$

کافیست در دنباله ی ساخته شده به جای d مقدار $2a$ را قرار دهیم :

هندسی دنباله : $3a, 9a, 27a \Rightarrow r = \frac{9a}{3a} \Rightarrow r = 3$

نکته : مجموع n جمله ی نخست در دنباله ی هندسی طبق دستور $S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$ بدست می آید .

مثال : مجموع ۷ جمله ی نخست دنباله ی $\dots, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}$ را محاسبه نمایید .

پاسخ : $a = -\frac{1}{16}$ ، $r = \frac{1}{8} \div \frac{-1}{16} = \frac{1}{8} \times (-16) = -2 \Rightarrow S_7 = a \frac{1-r^7}{1-r} = -\frac{1}{16} \times \frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} = -\frac{43}{16}$

مثال : در یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت ۲ ، حاصلضرب سه جمله ی اول ۲۱۶ است . مجموع چند جمله ی نخست این دنباله برابر ۳۸۱ است ؟ پاسخ : دنباله را به صورت $a, 2a, 4a, \dots$ در نظر می گیریم بنابراین :

$a \times 2a \times 4a = 216 \Rightarrow 8a^3 = 216 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$

$S_n = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow 3(2^n - 1) = 381 \Rightarrow 2^n - 1 = 127 \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow n = 7$ مجموع هفت جمله

مثال : در یک دنباله ی هندسی مجموع چهار جمله ی اول برابر ۱۰ است ، در صورتی که جمله ی پنجم از جمله ی اول ۱۰ واحد بیشتر باشد ، قدر نسبت دنباله را مشخص کنید .

پاسخ : $S_4 = a \frac{1-r^4}{1-r} = 10 \xrightarrow{\times(1-r)} a(1-r^4) = 10(1-r)$ (*)

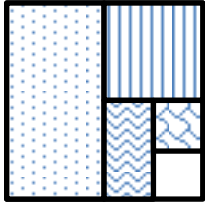


$$t_1 + 10 = t_8 \Rightarrow a + 10 = a \cdot r^7 \Rightarrow a - a \cdot r^7 = -10 \Rightarrow a(1 - r^7) = -10 \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow 10(1 - r) = -10 \Rightarrow 1 - r = -1 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

مثال : طول ضلع مربعی ۱ متر است ، ابتدا نیمی از سطح آن را رنگ می زنیم ، سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم . به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از سطح باقی مانده را رنگ می زنیم . پس از چند مرحله حداقل ۹۹٪ سطح مربع رنگ شده است ؟

پاسخ : بنا به شرایط مسئله ، برای رنگ آمیزی شدن مرحله به مرحله ی سطوح ، می توان دنباله ای به صورت



$\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ نوشت . که در آن $a = r = \frac{1}{2}$ است .

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{بنابراین مجموع کل سطوح رنگ شده طی } n \text{ مرحله برابر است با :}$$

$$\frac{S_n \geq 99}{1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7 \rightarrow \text{حداقل پس از ۷ مرحله}$$

۱- با قرار دادن سه عدد بین اعداد ۲۷ و $\frac{1}{3}$ ، یک دنباله ی هندسی ساخته ایم . آن اعداد را تعیین کنید .

۲- اگر اعداد $1 + 2x^2$ و $2x - 1$ و $2x$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند ، قدر نسبت آن دنباله را بیابید .

۳- در یک دنباله ی هندسی حاصلضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ است . اگر جمله ی سیزدهم ۹ باشد ، جمله ی پانزدهم کدام است ؟

۴- در یک دنباله هندسی $t_5 \times t_4 = 2t_3$ می باشد جمله ی اول این دنباله چیست ؟

۵- دنباله ای با جمله ی اول ۲- تحت رابطه ی بازگشتی $t_{n+1} = 3t_n$ تعریف شده است .

الف) با نوشتن چند جمله ی نخست آن ، نوع دنباله را تعیین کنید .

ب) جمله ی عمومی دنباله را بنویسید .

پ) حاصلضرب ۱۰ جمله ی نخست آن را محاسبه نمایید .

۶- در یک دنباله ی حسابی ، جملات سوم ، هفتم و نهم می توانند سه جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی باشند . چندمین جمله از دنباله حسابی برابر صفر است ؟

۷- در یک دنباله ی حسابی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی غیر ثابت افزایشی اند. قدر نسبت دنباله ی هندسی را تعیین کنید .

۸- در یک دنباله ی هندسی مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{4}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می باشد . این دنباله را با نوشتن سه جمله ی نخست مشخص کنید .

۹- در یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت ۲ ، نسبت مجموع شش جمله ی نخست به مجموع سه جمله ی نخست را حساب کنید .

۱۰- در یک دنباله ی هندسی مجموع سه جمله ی متوالی ۱۹ و حاصلضرب آنها ۲۱۶ می باشد . تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد چقدر است ؟

۱۱- اضلاع یک مثلث ، دنباله ی هندسی تشکیل می دهند . ثابت کنید ارتفاع های متناظر با آن اضلاع نیز جملات متوالی یک دنباله ی هندسی هستند .

۱۲- در یک دنباله ی هندسی با جملات مثبت ، $t_8 = \sqrt[3]{2}$ می باشد . حاصل ضرب پانزده جمله ی نخست آن را محاسبه نمایید .

۱۳- مجموع ۱۰ جمله ی نخست دنباله ای با جمله ی عمومی $t_n = 2^n - 3n + 4$ را به دست آورید .





***** جواب نهایی تمرین ها *****

۱- $1, 3, 9$ یا $-1, 3, -9$

۲- $r = -\frac{3}{4}$

۳- $t_{15} = 12$

۴- $t_1 = 2$

پ) $2^{10} \times 3^{45}$

ب) $t_n = -2 \times 3^{n-1}$

۵- الف) $-2, -6, -18, \dots$

۶- جمله ی یازدهم

۷- $r = \frac{2}{3}$

۸- $\frac{2}{3}, 3, 6, \dots$

۹- $\frac{S_6}{S_3} = 9$

۱۰- $9 - 4 = 5$

۱۱- برای اثبات از فرمول مساحت استفاده کنید .

۱۲- $\sqrt{2}$

۱۳- ۹۲۱

