احتمال شرطی - کاهش فضای نمونه‌ای

مسائلی که در آن محاسبه‌ی احتمال یک پیشامد مانند A با توجه به آگاهی از رخ دادن پیشامد دیگری مانند B مطرح است را احتمال شرطی نامیم و آن را با نماد $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم که خوانده می‌شود:

احتمال A به شرط B

در واقع چون از B آگاهی داریم، B فضای نمونه‌ای محسوب شده و جانشین S می‌شود، در نتیجه فضای نمونه‌ای کاهش یافته است.

مثال: در پرتاب یک تاس، اگر بدانیم عدد رو شده زوج است، احتمال آن که عدد اول باشد چقدر است؟

$B=\{2,4,6\}$: فضای نمونه‌ای کاهشی و $A=\{2\}$: پیشامد عدد اول بودن $\Rightarrow P(A|B)=\frac{1}{3}$

مثال: از بین اعداد یک رقمی طبیعی دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم اگر این دو عدد اول باشند، چقدر احتمال دارد متوالی باشند؟

$B=\{(2,3),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7),(5,7)\}$: فضای نمونه‌ای کاهشی

$A=\{(2,3)\}$: پیشامد متوالی بودن دو عدد انتخاب شده

$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$

مثال: در پرتاب چهار تاس، چهار عدد متوالی ظاهر شده، احتمال آن که یکی از تاس‌ها ۲ باشد چقدر است؟

$B=\{(1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,5,6)\}$ و $A=\{(1,2,3,4),(2,3,4,5)\}$ $\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}$

مثال: فرض کنید از ظرفی که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است یک مهره خارج کرده و ملاحظه می‌کنیم رنگ آن سیاه است. مهره را کنار گذاشته و مهره دوم را به تصادف از ظرف خارج می‌کنیم، احتمال آن که سفید باشد، چقدر است؟

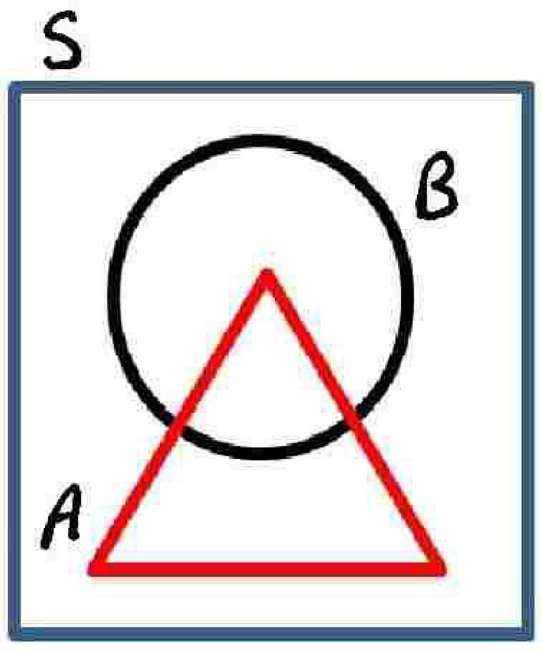
در فضای نمونه‌ای کاهشی، ظرف به صورت $\boxed{\text{۵ سفید، ۳ سیاه}}$ خواهد بود زیرا یک مهره سیاه را از آن خارج کرده‌ایم بنابراین احتمال آنکه مهره دوم سفید باشد $P=\frac{5}{8}$ است.

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

تمرین : در آزمایشگاهی ۳ موش سیاه و ۲ موش سفید داریم. قبلاً یک موش سفید را برای انجام آزمایش انتخاب کرده‌ایم، حال می‌خواهیم همان آزمایش را روی موش دیگری انجام دهیم. برای این منظور موشی را از بین موش‌هایی که روی آنها آزمایش انجام نشده انتخاب می‌کنیم، مطلوبست احتمال آن که این موش نیز سفید باشد.

$\underbrace{\overset{1}{\text{سفید}} \quad \overset{3}{\text{سیاه}}}$

فضای نمونه‌ای کاهشی $\Rightarrow P(\text{سفید}) = \frac{1}{4}$



فرمول احتمال شرطی : اگر احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه‌ای S را به صورت P(A) نمایش دهیم، مطابق با شکل روبرو $P(A)=\frac{\triangle}{\square}$ خواهد بود. حال اگر فضای نمونه‌ای را به مجموعه‌ی B کاهش دهیم، احتمال وقوع A در B (احتمال A به شرط B) به صورت $P(A|B)=\frac{\triangle}{\bigcirc}$ محاسبه می‌شود. توجه داشته باشید که $n(A\cap B)=\triangle$ و $n(B)=\bigcirc$ در نظر گرفته شده و در نتیجه $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ خواهد بود که با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $n(S)$ داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال : ۷۵٪ دانش‌آموزان یک کلاس در درس فیزیک و ۶۰٪ در درس ریاضی و ۴۰٪ در هر دو درس نمره‌ی قبول کسب کرده‌اند.

الف) دانش‌آموز قبول شده در درس فیزیک، چقدر احتمال دارد که در درس ریاضی نیز قبول شده باشد؟

با فرض : فیزیک $=F$ و ریاضی $=R$ داریم:

$P(F)=\frac{75}{100}$ ، $P(R)=\frac{60}{100}$ و $P(F\cap R)=\frac{40}{100}$

احتمال قبول شدن در درس ریاضی به شرط که در درس فیزیک قبول شده باشد برابر است با :

$$P(R|F)=\frac{P(R\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{40}{100}}{\frac{75}{100}}=\frac{8}{15}$$

ب) دانش‌آموز قبول شده در درس ریاضی، با چه احتمالی نمره‌ی قبولی فیزیک را کسب کرده است؟

$$P(F|R)=\frac{P(F\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{40}{100}}{\frac{60}{100}}=\frac{2}{3}$$

مثال: سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم دست‌کم یکبار رو آمده است. در این صورت، احتمال این که هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

سه بار رو آمدن سکه را A و دست‌کم یکبار رو آمدن سکه را B می‌نامیم، هدف محاسبه‌ی $P(A|B)$ است.

فضای نمونه‌ای ۸ عضوی است و پیشامد $A\cap B$، هر سه بار رو آمدن سکه خواهد بود که احتمال آن $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ است.

پیشامد B یعنی حالت سه بار پشت رخ ندهد لذا این پیشامد دارای $8-1=7$ عضو است و در نتیجه: $P(B)=\frac{7}{8}$.

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{1}{7}$$

مثال: اگر $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{1}{6}$ و $P(A|B)=\frac{1}{3}$، $P(A\cup B)$ را محاسبه نمایید.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{6}}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{13}{36}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S بوده و $P(A)=0/4$ و $P(B)=0/5$ و $P(A\cup B)=0/7$، مطلوبست $P(A|B')$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0/7=0/5+0/4-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=0/2$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{1-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{0/4-0/2}{1-0/5}=0/4$$

مثال: توزیع درصد لامپ های ۶۰ و ۱۰۰ وات از دو کارخانه‌ی (الف) و (ب) به صورت جدول روبرو است. احتمال آن که لامپی از کارخانه‌ی (الف)، ۱۰۰ وات باشد کدام است؟

کارخانه	الف	ب
۱۰۰ وات	۲۰	۳۵
۶۰ وات	۱۵	۳۰

پیشامد این که لامپ ۱۰۰ وات باشد A و پیشامد اینکه از کارخانه‌ی الف باشد B در نظر می‌گیریم:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{20}{20+15}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$$

مثال: برای هر پیشامد دلخواه A از فضای نمونه‌ای S که $P(A)>0$، احتمالات زیر را حساب کنید.

الف) $P(A|A)=\frac{P(A\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

ب) $P(\varnothing|A)=\dfrac{P(\varnothing\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(\varnothing)}{P(A)}=\dfrac{0}{P(A)}=0$

پ) $P(A|\varnothing)=\dfrac{P(A\cap\varnothing)}{P(\varnothing)}=\dfrac{P(\varnothing)}{0}=\dfrac{0}{0}\longrightarrow$ تعریف نشده است

ت) $P(A|A')=\dfrac{P(A\cap A')}{P(A')}=\dfrac{P(\varnothing)}{P(A')}=\dfrac{0}{P(A')}=0$

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند بطوری که $P(B)>0$ آنگاه:

$$P(A'|B)=1-P(A|B)$$

اثبات: $P(A'|B)=\dfrac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B-A)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}-\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B)$

مثال: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار فرض شوند به قسمی که $P(A)=0/2$ و $P(B)=0/3$ مطلوبست $P(B'|A')$.

$P(B'|A')=1-P(B|A')=1-\dfrac{P(B\cap A')}{P(A')}=1-\dfrac{P(B-A)}{1-P(A)}=1-\dfrac{P(B)-P(B\cap A)}{1-0/2}=1-\dfrac{0/3-0}{0/8}=\dfrac{5}{8}$

نکته: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و C پیشامدی از فضای نمونه‌ای S که $P(C)>0$ باشند آنگاه:

$$P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)$$

اثبات: $P((A\cup B)|C)=\dfrac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}=\dfrac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)}$ $\xrightarrow{\text{ناسازگار هستند } B\cap C \text{ و } A\cap C \text{ پس } A\cap B=\varnothing}$

$=\dfrac{P(A\cap C)+P(B\cap C)}{P(C)}=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}+\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}=P(A|C)+P(B|C)$

مثال: A و B دو پیشامد ناسازگارند اگر بدانیم پیشامد C رخ داده، احتمال آن که A نیز رخ داده باشد $0/3$ و احتمال آن که دست کم یکی از پیشامدهای A و B رخ داده باشد $0/5$ است.

$P(B'|C)$ را محاسبه نمایید.

$P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)\Rightarrow 0/5=0/3+P(B|C)\Rightarrow P(B|C)=0/2$

$\Rightarrow P(B'|C)=1-P(B|C)=1-0/2=0/8$

نکته: اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوریکه $P(C)>0$ ، آنگاه:

الف) $P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)-P((A\cap B)|C)$

ب) $P((A-B)|C)=P(A|C)-P((A\cap B)|C)$

اثبات الف: $P((A\cup B)|C) = \dfrac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)} = \dfrac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)} = \dfrac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P((A\cap B)\cap C)}{P(C)}$

$= \dfrac{P(A\cap C)}{P(C)} + \dfrac{P(B\cap C)}{P(C)} - \dfrac{P((A\cap B)\cap C)}{P(C)} = P(A|C)+P(B|C)-P((A\cap B)|C)$

اثبات ب: $P((A-B)|C) = \dfrac{P((A-B)\cap C)}{P(C)} = \dfrac{P((A-(A\cap B))\cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A\cap C)-P((A\cap B)\cap C)}{P(C)}$

$= \dfrac{P(A\cap C)}{P(C)} - \dfrac{P((A\cap B)\cap C)}{P(C)} = P(A|C)-P((A\cap B)|C)$

مثال: اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند بطوری که $P((A-B)|C)=P(B|C)=0/2$ مطلوبست $P((A\cup B)|C)$.

$P((A-B)|C) = P(A|C) - P((A\cap B)|C) = 0/2 \quad (1)$

$P((A\cup B)|C) = P(A|C)+P(B|C)-P((A\cap B)|C) \xrightarrow[(1)]{P(B|C)=0/2} = 0/2+0/2 = 0/4$

چند نمونه سؤال و حل آن‌ها:

۱- تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، الف) احتمال اینکه آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

یکی از ۱۴ بازیکن، بلندقدترین است، واضح است که احتمال این که آن فرد ما باشد $\frac{1}{14}$ خواهد بود.

ب) بازیکن دیگری را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از بازیکن اول کوتاه‌تر است. در این صورت احتمال اینکه بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

A: بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم است

B: بازیکن اول بلندقدتر از بازیکن دوم است

وقتی که بازیکن اول بلندترین باشد، خود به خود از بازیکن دوم هم بلندتر است، پس $A\subseteq B$ یعنی $A\cap B=A$ است.

بنابراین $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{14}$.

برای دو بازیکن اولی و دومی، فقط دو حالت داریم، اولی بلندتر از دومی یا دومی بلندتر از اولی پس: $P(B)=\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{7}$

۲- دو تاس را باهم می‌ریزیم، درحالی که حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ است؟

فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس ۳۶ عضو دارد که حالتهایی که هر دو تاس مضرب ۳ باشند یعنی (۶،۶) , (۳،۶) , (۶،۳) , (۳،۳) به درد ما نمی‌خورند لذا اگر A پیشامد حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد، درنظر بگیریم آنگاه : $n(A)=36-4=32$

اگر B پیشامد جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد، آنگاه :

$$A\cap B=\{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4)\}\Rightarrow n(A\cap B)=8$$

$$\Longrightarrow P(B|A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

۳- احتمال زدن گل اول توسط یک تیم در مسابقه‌ی فوتبال ۰٫۲ است. اما اگر گل اول را بزند، با احتمال ۰٫۶ بازی را می‌برد. احتمال آن که بازی را نبرد درصورتی که بدانیم گل اول را زده است، چقدر است؟

پیشامد گل اول را زدن A و پیشامد بردتیم را B درنظر می‌گیریم، طبق فرض سؤال داریم: $P(A)=0/2$ و $P(B|A)=0/6$

$$\Longrightarrow P(B'|A)=1-P(B|A)=1-0/6=0/4$$

۴- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $A\subseteq B$ ، $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ ، مطلوبست $P(B|A')$.

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-\frac{1}{3}}\xlongequal{A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A}\frac{P(B)-P(A)}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}$$

۵- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A)=0/3$ و $P(B)=0/38$ ، $P(B|A)=0/8$ آنگاه $P(B'|A')$ را محاسبه نمایید.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow 0/8=\frac{P(A\cap B)}{0/3}\Rightarrow P(A\cap B)=0/24$$

روش اول :

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-(0/3+0/38-0/24)}{1-0/3}=0/8$$

روش دوم :

$$P(B'|A')=1-P(B|A')=1-\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=1-\frac{P(B-A)}{1-P(A)}=1-\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)}=1-\frac{0/38-0/24}{1-0/3}=0/8$$

۶- ترکیب جمعیتی یک روستای کوچک طبق جدول داده شده، است.

	بی سواد	با سواد
بالای ۶۰ سال	۱۰۰	۵۰
بین ۳۰ تا ۶۰ سال	۵۰	۱۵۰
زیر ۳۰ سال	۵۰	۲۰۰

اگر احتمال آنکه فرد بالای ۳۰ سال باسواد باشد، P_1 و احتمال آنکه فرد باسواد بالای ۳۰ سال باشد، P_2 فرض شوند، نسبت $\frac{P_1}{P_2}$ را محاسبه نمایید.

$$P_1 = P(\text{باسواد} \mid \text{بالای ۳۰ سال}) = \frac{n(\text{باسواد} \cap \text{بالای ۳۰ سال})}{n(\text{بالای ۳۰ سال})} = \frac{200}{350} = \frac{4}{7}$$

$$P_2 = P(\text{بالای ۳۰ سال} \mid \text{باسواد}) = \frac{n(\text{بالای ۳۰ سال} \cap \text{باسواد})}{n(\text{باسواد})} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{7}$$

۷- درستی هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف) اگر B پیشامدی از فضای نمونه‌ای S که $P(B)>0$ باشد آنگاه $P(S|B)=1$ است.

$$P(S|B) = \frac{P(S\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

ب) اگر $A\subseteq B$ و $P(A)>0$ آنگاه $P(B|A)=1$.

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \xrightarrow{A\subseteq B \Rightarrow B\cap A = A} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

پ) اگر $0<P(A)>P(B)$ و $P(A\cap B)>0$، آنگاه $P(A|B)>P(B|A)$.

$$P(A) > P(B) \Rightarrow \frac{1}{P(A)} < \frac{1}{P(B)} \xrightarrow{\times P(A\cap B)} \frac{P(A\cap B)}{P(A)} < \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B|A) < P(A|B)$$

$$\Longrightarrow P(A|B) > P(B|A)$$

ت) اگر $P(A\cap B)>0$ آنگاه $P(A|A\cap B)=1$ ، $P(A\cup B|A)=1$.

روش اول: طبق قسمت «ب» می‌توان گفت:

$A\cap B\subseteq A \Rightarrow P(A|A\cap B)=1$ ، $A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cup B|A)=1$

روش دوم:

$$P(A|A\cap B) = \frac{P(A\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)} = 1$$

$$P(A\cup B|A) = \frac{P((A\cup B)\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

۸ - در مدرسه‌ای سه کلاس یازدهم، به نام های ۱۱،۱ ، ۱۱،۲ و ۱۱،۳ وجود دارد که به ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش آموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به ترتیب ۸ ، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آن باشد که دانش آموز نمره کامل گرفته باشد و B_i پیشامد آن که دانش آموز از کلاس i،۱۱ انتخاب شود، الف) مقدار $P(A|B_i)$ را برای $i=1,2,3$ محاسبه کنید.

$$P(A|B_1)=\frac{n(A\cap B_1)}{n(B_1)}=\frac{\text{تعداد دانش آموزان که در کلاس ۱۱،۱ نمره کامل گرفته اند}}{\text{تعداد کل دانش آموزان کلاس ۱۱،۱}}=\frac{8}{32}$$

$$P(A|B_2)=\frac{n(A\cap B_2)}{n(B_2)}=\frac{9}{33} \quad \text{و} \quad P(A|B_3)=\frac{n(A\cap B_3)}{n(B_3)}=\frac{6}{35}$$

ب) مقدار $P(B_i|A)$ را برای $i=1,2,3$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده اید چیست؟

$$P(B_1|A)=\frac{n(B_1\cap A)}{n(A)}=\frac{\text{تعداد دانش آموزان که در کلاس ۱۱،۱ نمره کامل گرفته اند}}{\text{تعداد کل دانش آموزانی که نمره کامل گرفته اند}}=\frac{8}{6+9+8}=\frac{8}{23}$$

$$P(B_2|A)=\frac{n(B_2\cap A)}{n(A)}=\frac{9}{23} \quad \text{و} \quad P(B_3|A)=\frac{n(B_3\cap A)}{n(A)}=\frac{6}{23}$$

$P(B_i|A)$ احتمال آن را حساب می‌کند که فردی با نمره‌ی کامل از کلاس B_i باشد که همان میزان موفقیت هر کلاس در آن آزمون است.

پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش آموزان کدام کلاس را در آزمون موفق‌تر می‌دانید؟

بنابه قسمت «الف» کلاس ۱-۱۱ موفق‌تر است زیرا $P(A|B_1)$ بیشتر از $P(A|B_2)$ و $P(A|B_3)$ می‌باشد.

۹- مجموعه‌ی $S=\{a,b,c,d,e\}$ ، فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی است.

می‌دانیم $P(\{a,b,c\})=\frac{1}{2}$ و $P(\{a\})=\frac{1}{4}$ است. حاصل $P(\{b,c,d\}|\{a,b,c\})$ را بیابید.

$$P(\{b,c,d\}|\{a,b,c\})=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{a,b,c\})} \quad (1)$$

$$P(\{a,b,c\})=P(\{a\})+P(\{b,c\}) \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{4}+P(\{b,c\}) \Rightarrow P(\{b,c\})=\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} P(\{b,c,d\}|\{a,b,c\})=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

۱۰- امیر و بابک عضو تیم ده نفرهٔ والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، الف) احتمال این که امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

A: پیشامد آنکه امیر بلندقدترین است. $\Leftarrow P(A)=\frac{1}{10}$

B: پیشامد آنکه امیر از بابک بلندتر است. $\Leftarrow P(B)=\frac{1}{2}$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\overset{A\subseteq B}{=\!=\!=}\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$$

ب) احتمال این که امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

با این تعبیر که ۸ نفر از امیر بلندتر هستند، پیشامد این که امیر نفر نهم از نظر بلندی قد باشد را C فرض می‌کنیم.

پس $B\cap C$ یعنی بابک کوتاه‌ترین فرد و امیر نفر بعدی است، در نتیجه $P(B\cap C)=\frac{8!}{10!}=\frac{1}{90}$

زیرا دو نفر امیر و بابک در مکان‌های ۹ و ۱۰ جای داده شده و بقیه افراد باید در ۸ مکان دیگر جابه‌جا شوند.

$$\Longrightarrow P(C|B)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{90}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{45}$$

۱۱- فرض کنید B و C دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A|B)<P(A|C)$.

ثابت کنید: $P(A|B)<P(A|(B\cup C))<P(A|C)$

اولاً با توجه به ناسازگاری B و C داریم:

$$P(A|(B\cup C))=\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)}=\frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(B\cup C)}=\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}\quad (1)$$

ثانیاً: اگر a، b، c و d اعداد مثبت و $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ آنگاه $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

طبق فرض $P(A|B)<P(A|C)$ در نتیجه $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}<\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$ که طبق قسمت ثانیاً می‌توان نوشت:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}<\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}<\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$\xrightarrow{(1)}\frac{P(A\cap B)}{P(B)}<P(A|(B\cup C))<\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$\longrightarrow P(A|B)<P(A|(B\cup C))<P(A|C)$$

تست (۱): اگر $P(A)=2P(B)=0.4$ و $P(B|A)=0.5$ باشد، $P(A|B)$ کدام است؟ ۰٫۲ ۰٫۱ ۰٫۵ ۱

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.5=\frac{P(A\cap B)}{0.4} \Rightarrow P(A\cap B)=0.2 \quad , \quad 2P(B)=0.4 \Rightarrow P(B)=0.2$$

$$\Longrightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.2}=1 \longrightarrow \text{گزینه ۴}$$

تست (۲): در یک آزمایش تصادفی $P(A|B')=0.6$ و $P(A|B)=0.2$ است، کدام گزینه زیر صحیح است؟

$0.2 \leq P(A) \leq 0.6$ $\qquad$ $0.1 \leq P(A) \leq 0.5$ $\qquad$ $0.4 \leq P(A) \leq 0.8$ $\qquad$ $0.1 \leq P(A) \leq 0.4$

طبق سؤال ۱۱ صفحه‌ی قبل می‌توان گفت: $P(A|B) \leq P(A|(B\cup B')) \leq P(A|B')$

$$\Longrightarrow 0.2 \leq P(A|S) \leq 0.6 \Longrightarrow 0.2 \leq P(A) \leq 0.6 \Longrightarrow \text{گزینه ۱}$$

تست (۳): اگر $P(B'|A)=3P(A'|B)=\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $P(A|B)+P(B|A)$ کدام است؟

$\frac{13}{12}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{4}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$

$$P(B'|A)=\frac{1}{2} \Rightarrow 1-P(B|A)=\frac{1}{2} \Rightarrow P(B|A)=\frac{1}{2}$$

$$3P(A'|B)=\frac{1}{2} \Rightarrow P(A'|B)=\frac{1}{6} \Rightarrow 1-P(A|B)=\frac{1}{6} \Rightarrow P(A|B)=\frac{5}{6}$$

$\xrightarrow{+} \frac{4}{3} \to$ گزینه ۳

تست (۴): فضای نمونه‌ای آزمایشی به صورت $S=\{a,b,c,d\}$ است. اگر $P(\{b,c,d\})=\frac{2}{3}$ و $P(\{b\})=\frac{1}{4}$ باشند، حاصل $P(\{a,c,d\}|\{b,c,d\})$ کدام است؟

$\frac{5}{8}$ $\qquad$ $\frac{3}{8}$ $\qquad$ $\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{1}{4}$

$$P(\{a,c,d\}|\{b,c,d\})=\frac{P(\{a,c,d\}\cap\{b,c,d\})}{P(\{b,c,d\})}=\frac{P(\{c,d\})}{\frac{2}{3}}=\frac{P(\{b,c,d\})-P(\{b\})}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8} \to \text{گزینه ۱}$$

تست (۵): عددی به تصادف از بین اعداد ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم می‌دانیم این عدد مضرب ۳ است. چقدر احتمال دارد مضرب ۷ نباشد؟

$\frac{14}{33}$ $\qquad$ $\frac{29}{33}$ $\qquad$ $\frac{19}{33}$ $\qquad$ $\frac{4}{33}$

پیشامد A را بخش‌پذیری بر ۳ و پیشامد B را بخش‌پذیری بر ۷ تعریف می‌کنیم بنابراین:

$$P(B'|A)=1-P(B|A)=1-\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=1-\frac{\left[\frac{100}{21}\right]}{\left[\frac{100}{3}\right]}=1-\frac{4}{33}=\frac{29}{33} \longrightarrow \text{گزینه ۲}$$

قانون ضرب احتمال :

اگر رابطه‌ی مربوط به احتمال شرطی را به صورت طرفین - وسطین ضرب کنیم، به یک رابطه‌ی جدیدی می‌رسیم که به آن **قانون ضرب احتمال** گوییم :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \xrightarrow{\text{طرفین-وسطین}} P(A\cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

رابطه‌ی اخیر به این معناست که برای محاسبه‌ی احتمال وقوع پیشامد $A\cap B$ ، کافیست احتمال وقوع پیشامد B و پیشامد A به شرط B را حساب کرده و از ضرب آنها $P(A\cap B)$ را بدست آوریم.

مثال: در بین دانش آموزان یک کلاس، احتمال آنکه فردی ورزشکار باشد ۰/۳ و احتمال آنکه یک ورزشکار رتبه‌ی اول کلاس باشد ۰/۴ است. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه ورزشکار و رتبه‌ی اول کلاس باشد چقدر است؟

برای سهولت در نوشتن، پیشامد ورزشکار بودن را با V و رتبه‌ی اول کلاس بودن را با R نمایش می‌دهیم.

بنابراین : $P(V) = 0/3$ و $P(R|V) = 0/4$ ، $P(V\cap R) = ?$

$$P(V\cap R) = P(V) \times P(R|V) = 0/3 \times 0/4 = 0/12$$

مثال: در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه وجود دارد. دو مهره به طور متوالی و بدون جایگذاری برمی‌داریم، مطلوبست :

الف) احتمال آنکه مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سیاه باشد.

$$P(\text{اولی سفید} \cap \text{دومی سیاه}) = P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی سیاه} | \text{اولی سفید}) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

دلیل ← در مرحله‌ی اول یک مهره سفید برداشته شده است. بنابراین ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه داریم که احتمال سیاه بودن مهره دوم $\frac{6}{9}$ خواهد بود

ب) احتمال آنکه هر دو مهره سفید باشند.

$$P(\text{اولی سفید} \cap \text{دومی سفید}) = P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی سفید} | \text{اولی سفید}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

مثال: در کیسه‌ای ۷ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ زرد وجود دارد. از این کیسه مهره‌ای به تصادف بیرون می‌آوریم و کنار می‌گذاریم. سپس دو مهره از کیسه با هم بیرون می‌آوریم.

الف) احتمال آنکه هر سه مهره سبز باشند چقدر است؟

$$P(\text{اولی سبز} \cap \text{دوتای بعدی سبز}) = P(\text{اولی سبز}) \times P(\text{دوتای بعدی سبز} \mid \text{اولی سبز}) = \frac{7}{12} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{7}{44}$$

دلیل ← اگر اولی سبز باشد آنگاه ۶ مهره سبز و ۵ مهره زرد باقی خواهد ماند.

ب) احتمال آنکه اولی سبز و دوتای بعدی همرنگ نباشند چقدر است؟

$$P(\text{اولی سبز} \cap \text{دوتای بعدی ناهمرنگ}) = P(\text{اولی سبز}) \times P(\text{دوتای بعدی ناهمرنگ} \mid \text{اولی سبز}) = \frac{7}{12} \times \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{7}{22}$$

نکته: با توجه به آنکه $P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A)$ و $P(A\cap B) = P(B) \times P(A|B)$ می‌توان نوشت:

$$P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند به طوری که $P(A|B) = 0/3$ و $P(B|A) = 0/2$ و $P(B) = 0/4$، $P(A)$ مطلوبست.

$$P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B) \Rightarrow P(A) \times 0/2 = 0/4 \times 0/3 \Rightarrow P(A) = 0/6$$

مثال: احتمال این که یک شخص ورزشکار باشد، ۶۰٪ است و احتمال آنکه یک شخص کتاب‌خوان باشد، ۳۰٪ است. اگر احتمال این که یک ورزشکار کتاب خوان باشد ۲۰٪ باشد، احتمال این که یک شخص کتاب‌خوان، ورزشکار باشد، چقدر است؟

پیشامد ورزشکار بودن یک شخص را با V و پیشامد کتاب خوان بودن یک شخص را با k نمایش می‌دهیم.

بنابراین:

$$P(k) \times P(V|k) = P(V) \times P(k|V)$$

$$\Rightarrow 0/30 \times P(V|k) = 0/60 \times 0/20$$

$$\Rightarrow P(V|k) = \frac{0/60 \times 0/20}{0/30} = 0/40$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

نکته: اگر A ، B و C پیشامدهایی از فضای نمونه‌ی S باشند که $P(A\cap B)>0, P(A)>0, P(B)>0, P(C)>0$ ، آنگاه:

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\times P(B|A)\times P(C|(A\cap B))$$

اثبات:

$$\text{راست} = \cancel{P(A)} \times \frac{\cancel{P(B\cap A)}}{\cancel{P(A)}} \times \frac{P(C\cap(A\cap B))}{\cancel{P(A\cap B)}} = P(A\cap B\cap C) = \text{چپ}$$

توضیح:

برای محاسبه‌ی احتمال $A\cap B\cap C$ ، فرض می‌کنیم اول پیشامد A رخ دهد ($P(A)$) بعد با توجه به آن، پیشامد B رخ دهد ($P(B|A)$) و در نهایت با توجه به رخداد پیشامدهای A و B ، پیشامد C اتفاق بیفتد ($P(C|(A\cap B))$).

در این رابطه ترتیب نوشتن A ، B و C مهم نیست ، به عنوان نمونه می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(A\cap B\cap C) = P(B)\times P(C|B)\times P(A|(B\cap C))$$

همچنین رابطه قابل تعمیم به پیشامدهای بیشتر نیز است. به عنوان نمونه اگر پیشامدها A ، B ، C و D باشند آنگاه:

$$P(A\cap B\cap C\cap D) = P(A)\times P(B|A)\times P(C|(A\cap B))\times P(D|(A\cap B\cap C))$$

مثال: در ظرفی ۳ مهره آبی، ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سبز وجود دارد. سه مهره به ترتیب و بدون جایگذاری برمی‌داریم احتمال این که اول سبز، دومی قرمز و سومی آبی باشد، چقدر است؟

A = پیشامد این اولی سبز باشه

B = پیشامد این که دومی قرمز باشه

C = پیشامد این که سومی آبی باشه

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\times P(B|A)\times P(C|(A\cap B))$$

$$= \frac{7}{15}\times\frac{5}{14}\times\frac{3}{13} = \frac{1}{26}$$

در مرحله اول یک سبز کم شد پس ۳ آبی، ۵ قرمز و ۶ سبز داریم

در دو مرحله‌ی قبل یک سبز و یک قرمز کم شد پس ۳ آبی، ۴ قرمز و ۶ سبز داریم

مثال: در کیسه‌ی A، ۷ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی سفید و در کیسه‌ی B، ۵ مهره‌ی آبی و ۶ مهره سفید وجود دارد.
بدون نگاه کردن کیسه‌ای را برداشته و از آن مهره‌ای بیرون می‌آوریم و در کیسه‌ی دیگر می‌گذاریم. سپس از این کیسه یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال این که کیسه برداشته شده‌ی اولی، A و رنگ مهره‌های خارج شده از دو کیسه سفید باشد چقدر است؟

W_1 = پیشامد سفید بودن مهره اول ، W_2 = پیشامد سفید بودن مهره دوم

$$P(A\cap W_1\cap W_2)=P(A)\times P(W_1|A)\times P(W_2|(A\cap W_1))$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{12}=\frac{7}{108}$$

بعد از جابه‌جایی مهره، در کیسه‌ی B، ۵ آبی و ۷ سفید وجود دارد

در کیسه‌ی A، ۷ قرمز و ۲ سفید است

مثال: در کیسه‌ای پنج مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. از این کیسه سه مهره به طور متوالی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. اگر احتمال آمدن هر مهره متناسب با عدد روی آن مهره باشد، احتمال این که شماره‌های ۵ و ۲، ۳ به ترتیب از کیسه بیرون بیایند چقدر است؟

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1\Rightarrow x+2x+3x+4x+5x=1\Rightarrow x=\frac{1}{15}$$

برای سهولت حل مسئله، متناسب با هر شماره مهره، تعداد مهره فرض شود، مثلاً به جای مهره‌ی شماره ۳، فرض کنیم یک خوشه‌ی ۳ تایی مهره وجود دارد.

بنابراین:

$$P(5\cap 2\cap 3)=P(5)\times P(2|5)\times P(3|(2\cap 5))=\frac{5}{15}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{40}$$

احتمال ۲ به شرطی که خوشه‌ی ۵ خارج شده

احتمال ۳ به شرطی که خوشه‌های ۲ و ۵ خارج شده‌اند.

تمرین :

۱ـ در کیسه‌ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز است.

الف) از کیسه دو گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال این که گوی اول سبز و گوی دوم سفید باشد، چقدر است؟

A = پیشامد سبز بودن گوی اول و B = پیشامد سفید بودن گوی دوم

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$$

ب) از کیسه سه گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه اولی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

C = پیشامد قرمز بودن گوی سوم

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B|A)\times P(C|(A\cap B))=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{20}$$

۲ـ بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیه‌ی خوبی داشته باشد، پرتابش با احتمال ٪۹۰ گل می‌شود و اگر روحیه‌اش ضعیف باشد، احتمال گل شدن پرتابش ٪۶۰ است. همچنین اگر پرتابی را گل کند، در پرتاب بعدی روحیه‌ی خوبی دارد و در غیر این صورت، روحیه‌اش ضعیف خواهد شد.

فرض کنید او پیش از اولین پرتاب، روحیهٔ خوبی داشته باشد. احتمال اینکه از سه پرتاب متوالی، دقیقاً دو پرتاب آخر گل شود چقدر است؟

A = گل شدن پرتاب اول و B = گل شدن پرتاب دوم و C = گل شدن پرتاب سوم

$$P(A'\cap B\cap C)=P(A')\times P(B|A')\times P(C|(A'\cap B))$$

$$=\underbrace{0/1}_{1-P(A)=1-0/9}\times 0/6\times 0/9=0/054$$

در این پرتاب بخاطر گل نشدن مرحله اول روحیه‌اش ضعیف است

در این پرتاب به خاطر گل شدن پرتاب قبلی روحیه‌ی خوبی دارد

۳ـ جعبه‌ای شامل ۶ مهره با شماره‌های ۱ تا ۶ است. دو مهره از این جعبه خارج کرده، شماره‌های آن را یادداشت می‌نماییم، سپس به جعبه برمی‌گردانیم. دو دفعه‌ی دیگر این عمل را تکرار می‌کنیم. احتمال این که تمام اعداد ۱ تا ۶ یادداشت شده باشند چقدر است؟

A = انتخاب دو مهره اول   B = انتخاب دو مهره دوم از بین مهره‌هایی که بار اول انتخاب نشده‌اند

C = انتخاب دو مهره‌ی سوم از میان مهره‌هایی که دفعات قبل انتخاب نشده‌اند.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B|A)\times P(C|(A\cap B))=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{6}{2}}\times\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}\times\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{2}{75}$$

۴ـ فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگرش قرمز است. کارتی را به تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

A : کارت دو رو سبز است   و   B = روی مشاهده شده کارت انتخابی سبز است

در مجموع ۳ کارت دارای ۶ رو هستند که ۳ تا سبز و ۳ تا قرمز است پس: $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

از بین ۳ کارت یکی به صورت دو رو سبز است پس: $P(A)=\frac{1}{3}$

اگر کارت انتخابی دو رو سبز باشد، روی مشاهده شده ۱۰۰٪ سبز خواهد بود پس: $P(B|A)=1$

حال باید $P(A|B)$ را حساب کرد. بنابراین:

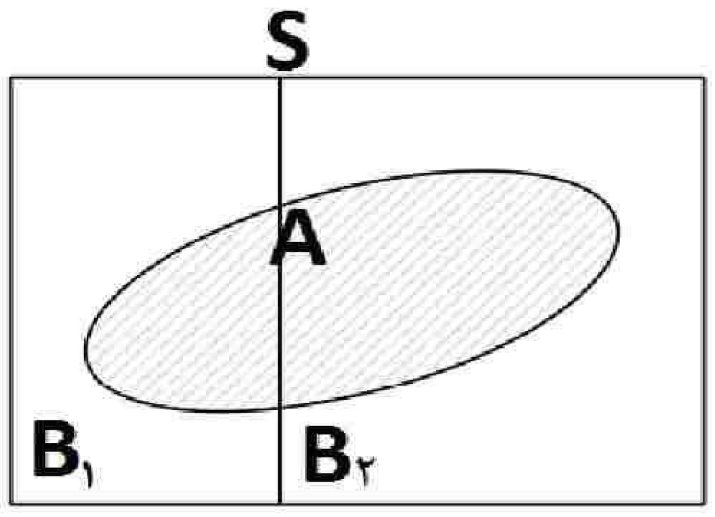
$$P(B)\times P(A|B)=P(A)\times P(B|A)\Rightarrow\frac{1}{2}\times P(A|B)=\frac{1}{3}\times 1\Rightarrow P(A|B)=\frac{2}{3}$$

۵ـ در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. به تصادف یک مهره از کیسه خارج کرده و با مشاهده‌ی رنگ آن را کنار می‌گذاریم، سپس دو مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه سه مهره‌ی انتخاب شده در دو مرحله قرمز باشند چقدر است؟

A = پیشامد قرمز بودن یک مهره در مرحله‌ی اول   و   B = پیشامد قرمز بودن دو مهره در مرحله‌ی دوم

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{4}{7}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{4}{35}$$

قانون احتمال کُل :



فرض کنید فضای نمونه ای به دو زیر مجموعه ی B_1 و B_2 افراز شده است. می خواهیم احتمال وقوع پیشامد A از این فضای نمونه ای را حساب کنیم، طبق شکل واضح است که $P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)$ ، از طرفی بنا به قانون ضرب احتمال می دانیم $P(A\cap B_i)=P(B_i)\times P(A|B_i)$ ، بنابراین :

$$P(A)=P(B_1)\times P(A|B_1)+P(B_2)\times P(A|B_2)$$

برای سهولت و پرهیز از خطا بهتر است آن را در قالب نمودار درختی زیر نمایش دهیم :

$$\xrightarrow{P(B_1)} B_1 \xrightarrow{P(A|B_1)} A$$
$$\xrightarrow{P(B_2)} B_2 \xrightarrow{P(A|B_2)} A$$

$$\Rightarrow P(A)=\underbrace{P(B_1)\times P(A|B_1)}_{\text{ضرب احتمالات شاخه اول}}+\underbrace{P(B_2)\times P(A|B_2)}_{\text{ضرب احتمالات شاخه دوم}}$$

مثال : ٪۵۲ جمعیت کشوری را زنان و ٪۴۸ بقیه را مردان تشکیل می دهند. اگر ٪۶۰ زنان و ٪۶۸ مردان با سواد باشند، چند درصد افراد جامعه با سواد اند؟

$$\xrightarrow{0/52} \text{زن} \xrightarrow{0/60} \text{باسواد}$$
$$\xrightarrow{0/48} \text{مرد} \xrightarrow{0/68} \text{باسواد}$$

$$\Rightarrow P(\text{باسواد})=0/52\times 0/60+0/48\times 0/68=0/6384$$

حدود ٪۶۳/۸ افراد جامعه باسوادند.

مثال : فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوبست احتمال آن که این فرزند سالم باشد.

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}} \text{پسر} \xrightarrow{1-0/12=0/88} \text{سالم}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{2}} \text{دختر} \xrightarrow{1-0/09=0/91} \text{سالم}$$

$$\Rightarrow P(\text{سالم})=\frac{1}{2}\times\frac{88}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{91}{100}=\frac{179}{200}=0/895$$

توجه : قانون احتمال کل قابل تعمیم برای افراز فضای نمونه‌ای به چند پیشامد می باشد به عنوان نمونه اگر فضای نمونه‌ای را به سه پیشامد B_1 ، B_2 و B_3 افراز کنیم، احتمال وقوع پیشامد A از این فضای نمونه‌ای به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{P(B_1)} B_1 \xrightarrow{P(A|B_1)} A \\ \xrightarrow{P(B_2)} B_2 \xrightarrow{P(A|B_2)} A \\ \xrightarrow{P(B_3)} B_3 \xrightarrow{P(A|B_3)} A \end{array} \quad \Rightarrow P(A) = P(B_1)\times P(A|B_1) + P(B_2)\times P(A|B_2) + P(B_3)\times P(A|B_3)$$

که آن را با نماد سیگما به صورت $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)\times P(A|B_k)$ نیز نمایش می دهند.

بنابراین در حالت کلی اگر فضای نمونه ای را به n پیشامد ناتهی B_1 ، B_2 ، ... و B_n افراز کنیم خواهیم داشت :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\times P(A|B_k)$$

مثال : کارخانه ای سه نوع محصول تولید می کند. ۱۰٪ از نوع A ، ۲۰٪ از نوع B و ۷۰٪ از نوع C هستند. ۲٪ محصولات A ، ۱٪ محصولات B و ۲٪ محصولات C سفارشی هستند. محصولی از این کارخانه انتخاب می کنیم، احتمال اینکه سفارشی باشد چقدر است؟

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{0/10} A \xrightarrow{0/02} \text{سفارشی} \\ \xrightarrow{0/20} B \xrightarrow{0/01} \text{سفارشی} \\ \xrightarrow{0/70} C \xrightarrow{0/02} \text{سفارشی} \end{array} \quad \Rightarrow P(\text{سفارشی}) = 0/10\times 0/02 + 0/20\times 0/01 + 0/70\times 0/02 = 0/018$$

مثال : احتمال بارش باران در فصل بهار، تابستان، پاییز و زمستان در منطقه ای به ترتیب ۰/۲ ، ۰/۰۴ ، ۰/۳ و ۰/۵ است. با فرض برابر بودن فصول سال، احتمال بارش باران در یک سال چقدر است؟

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \text{بهار} \xrightarrow{0/2} \text{بارش} \\ \xrightarrow{\frac{1}{4}} \text{تابستان} \xrightarrow{0/04} \text{بارش} \\ \xrightarrow{\frac{1}{4}} \text{پاییز} \xrightarrow{0/3} \text{بارش} \\ \xrightarrow{\frac{1}{4}} \text{زمستان} \xrightarrow{0/5} \text{بارش} \end{array} \quad \Rightarrow P(\text{بارش}) = \frac{1}{4}\times 0/2 + \frac{1}{4}\times 0/04 + \frac{1}{4}\times 0/3 + \frac{1}{4}\times 0/5$$

$$= \frac{1}{4}(0/2 + 0/04 + 0/3 + 0/5) = 0/26$$

مثال: با فرض شرایط قانون احتمال کل، ثابت کنید:

$$\min\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\} \leqslant P(A) \leqslant \max\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

تعریف می‌کنیم:

$$m = \min\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

$$M = \max\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \{1,2,\dots,n\} : m \leqslant P(A|B_k) \leqslant M$$

$$\xrightarrow{\times P(B_k)} m P(B_k) \leqslant P(B_k) P(A|B_k) \leqslant M P(B_k)$$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{n} m P(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P(A|B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M P(B_k)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری و قانون احتمال کل}} m \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \leqslant P(A) \leqslant M \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$$

$$\xrightarrow{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) = P(S) = 1} m \leqslant P(A) \leqslant M$$

حل چند نمونه سؤال:

۱- دو کیسه داریم که اولی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از این دو کیسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن گویی را برمی‌داریم. با چه احتمالی گوی برداشته شده سفید است؟

$\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ کیسه اول $\xrightarrow{\frac{2}{5}}$ سفید

$\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ کیسه دوم $\xrightarrow{\frac{1}{10}}$ سفید

$$\Rightarrow P(\text{سفید}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{4}$$

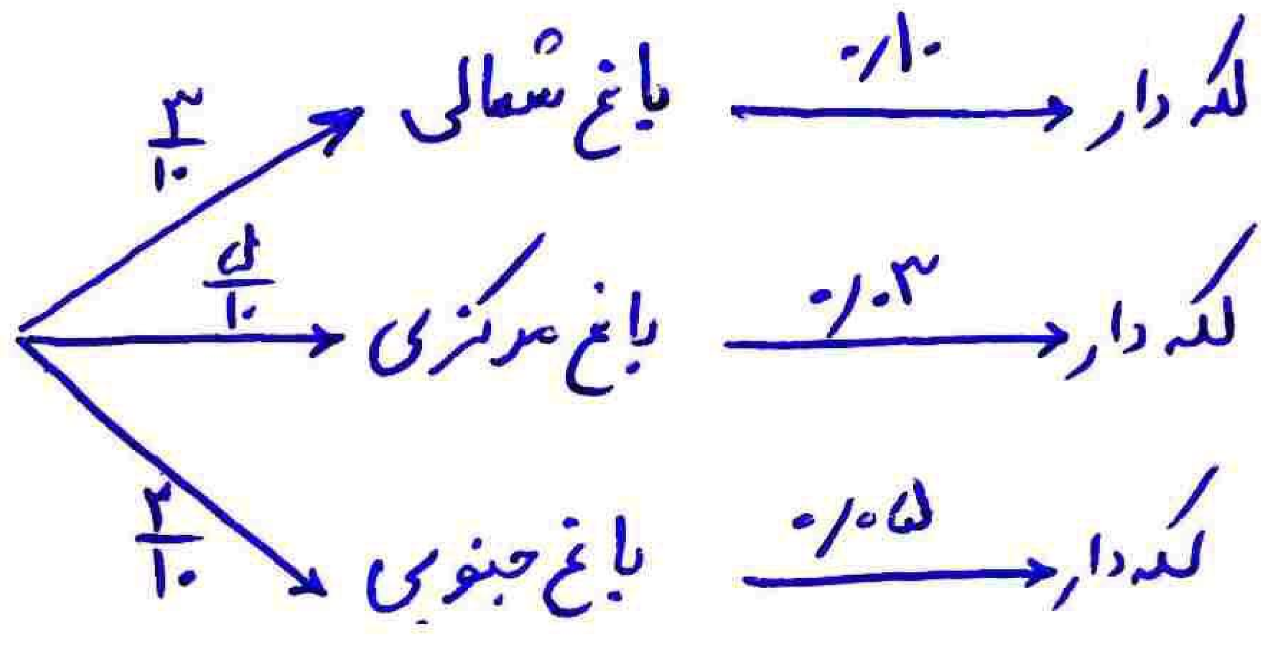
۲- دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز و یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال اینکه آن رو قرمز باشد چقدر است؟

$\xrightarrow{\frac{2}{10}}$ کارت انتخابی دو رو قرمز باشد $\xrightarrow{1}$ آن رو قرمز باشد

$\xrightarrow{\frac{8}{10}}$ کارت انتخابی دو رو قرمز نباشد $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ آن رو قرمز باشد

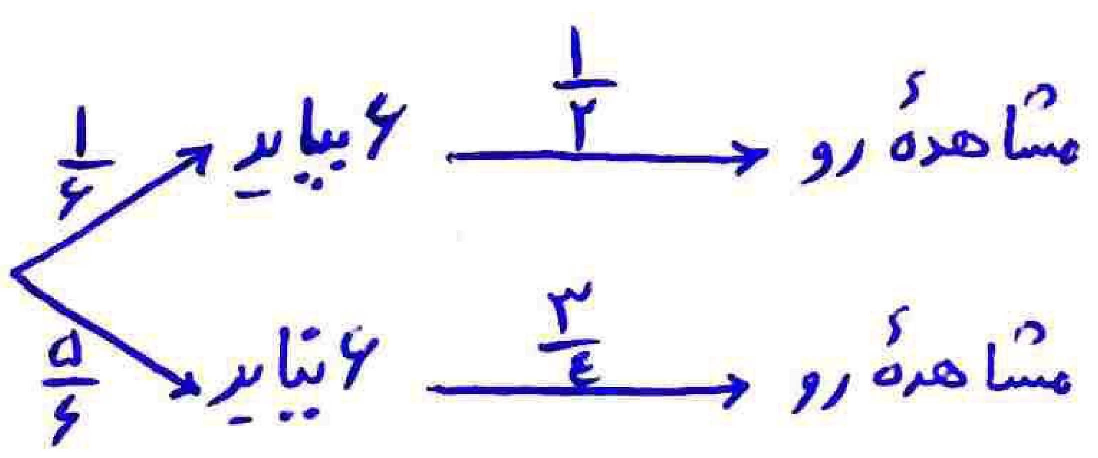
$$\Rightarrow P = \frac{2}{10} \times 1 + \frac{8}{10} \times \frac{1}{2} = 0/6$$

۳- میوه فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه دار باشد، به ترتیب ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌ها مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها بر می‌داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟



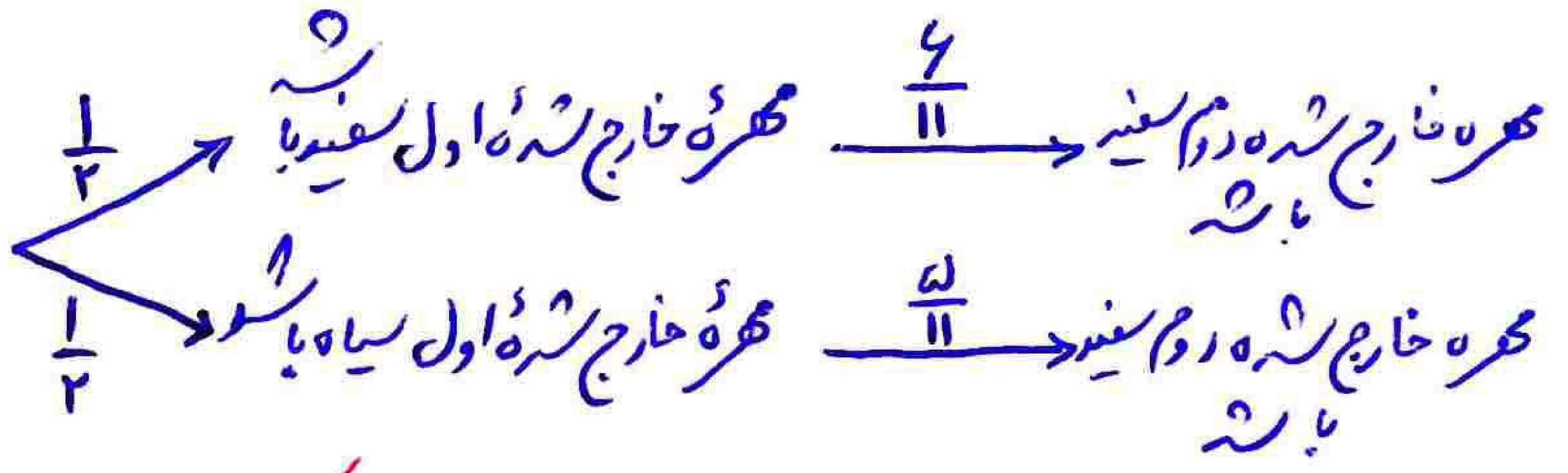
$$\Rightarrow P(\text{لکه دار}) = \frac{3}{10}\times\frac{10}{100} + \frac{5}{10}\times\frac{3}{100} + \frac{2}{10}\times\frac{5}{100}$$
$$= \frac{55}{1000}$$

۴- تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم، اگر ۶ بیاید یک سکه و در غیر این صورت دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال مشاهده‌ی رو چقدر است؟



$$\Rightarrow P(\text{مشاهدهٔ رو}) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\times\frac{3}{4} = \frac{17}{24}$$

۵- از کیسه‌ای مشتمل بر ۵ مهره سفید و ۵ مهره سیاه، مهره‌ای خارج می‌کنیم. از هر رنگی بود، آن مهره را به همراه مهرهٔ دیگری که هم‌رنگش باشد به کیسه می‌اندازیم. دوباره مهره‌ای خارج می‌کنیم احتمال آنکه این مهره سفید باشد چقدر است؟



$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}\times\frac{6}{11} + \frac{1}{2}\times\frac{5}{11} = \frac{1}{2}$$

توجه: اگر مهره خارج شده اول سفید باشد آن را به همراه مهرهٔ سفید دیگر به کیسه برمی‌گردانیم لذا درون کیسه ۶ سفید و ۵ سیاه داریم در نتیجه احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم $\frac{6}{11}$ است.

و در صورتی که مهرهٔ خارج شده اول سیاه باشد همان را به همراه مهرهٔ سیاه دیگر به کیسه برمی‌گردانیم لذا درون کیسه ۵ سفید و ۶ سیاه داریم در نتیجه احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم $\frac{5}{11}$ است.

قاعدهٔ بیز : Bayes Formula

فرض کنید فضای نمونه‌ای را به زیرمجموعه‌های B_1 و B_2 (یا بیشتر) افراز کرده باشیم و A پیشامدی از فضای نمونه‌ای باشد، طبق قانون احتمال کل $P(A)$ را حساب می‌کنیم.

حال با این فرض که A رخ داده، می‌خواهیم احتمال وقوع B_1 را محاسبه نماییم، به عبارت دیگر هدف محاسبه‌ی $P(B_1|A)$ است.

قبلاً نشان دادیم که $P(A)\times P(B_1|A) = P(B_1)\times P(A|B_1)$ ، حال با تقسیم طرفین بر $P(A)$ ، خواهیم داشت :

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)\times P(A|B_1)}{P(A)}$$

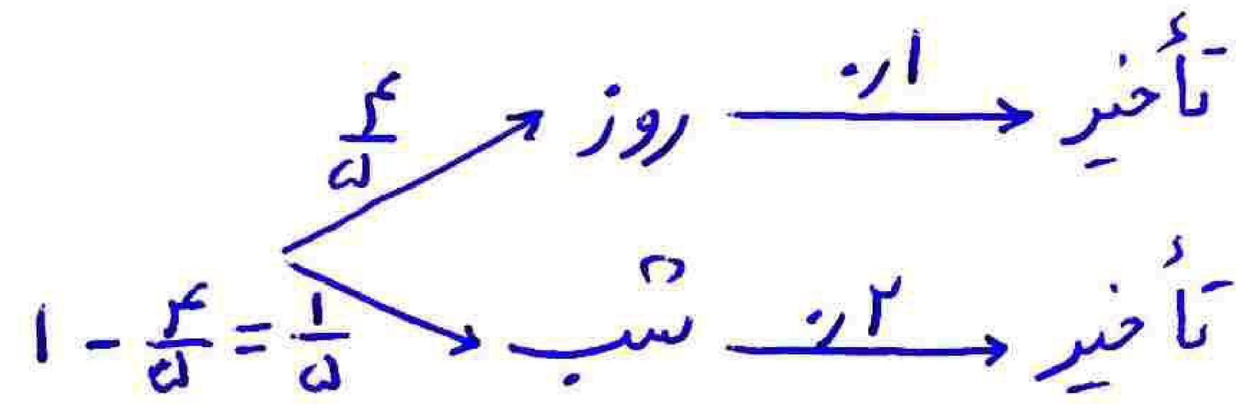
از این رابطه به عنوان قانون بیز یاد می‌شود.

قانون بیز بیان می‌کند احتمال‌های پس از مشاهده چگونه تبدیل به احتمال‌های پیش از مشاهده می‌شوند.

توجه :

همچون قانون احتمال کل، بهتر است در این نوع مسائل، اطلاعات مسئله را به صورت نمودار درختی بنویسیم سپس برای محاسبه‌ی $P(B_1|A)$ کافیست محاسبه‌ی احتمال کل را در مخرج کسر قرار دهیم و احتمال شاخه‌ی مطلوب (مثلاً شاخه‌ی B_1) را در صورت کسر بنویسیم.

مثال : در یک فرودگاه $\frac{4}{5}$ پروازها در روز و باقی در شب انجام می‌شود. احتمال تأخیر در پروازهای روز ۰/۱ و در پروازهای شب ۰/۲ است. مطلع شدیم که پروازی با تأخیر صورت گرفته است. با کدام احتمال این پرواز در شب صورت گرفته است؟



$$\Rightarrow P(\text{شب}|\text{تأخیر})=\frac{\text{شاخه‌ی مربوط به شب}}{\text{احتمال کل}}=\frac{\frac{1}{5}\times 0/2}{\frac{4}{5}\times 0/1+\frac{1}{5}\times 0/2}=\frac{1}{3}$$

مثال : دسته‌ی کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

$\xrightarrow{\frac{2}{10}}$ دو رو قرمز $\xrightarrow{1}$ روی مشاهده شده قرمز

$\xrightarrow{\frac{8}{10}}$ یک رو سبز و یک رو قرمز $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ روی مشاهده شده قرمز

$$P(\text{روی دیگر قرمز} \mid \text{روی مشاهده شده قرمز}) = \frac{\frac{2}{10}\times 1}{\frac{2}{10}\times 1 + \frac{8}{10}\times\frac{1}{2}} = \frac{0/2}{0/6} = \frac{1}{3}$$

مثال : مغازه‌ای تمام لامپ‌های مهتابی خود را ۴۰٪ از کارخانه A و ۳۵٪ از کارخانه B و ۲۵٪ از کارخانه C تهیه می‌کند. ۱٪ لامپ‌های کارخانه A ، ۲٪ لامپ‌های کارخانه B و ۳٪ لامپ‌های کارخانه C خراب هستند. یک لامپ مهتابی به تصادف از این مغازه انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که خراب است. احتمال اینکه لامپ از کارخانه C باشد چقدر است؟

$\xrightarrow{0/40} A \xrightarrow{0/01}$ خراب

$\xrightarrow{0/35} B \xrightarrow{0/02}$ خراب

$\xrightarrow{0/25} C \xrightarrow{0/03}$ خراب

$$\Rightarrow P(C \mid \text{خراب}) = \frac{0/25\times 0/03}{0/40\times 0/01 + 0/35\times 0/02 + 0/25\times 0/03} = \frac{15}{37}$$

مثال : در کیسه‌ی A ، ۱ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی قرمز، در کیسه‌ی B ، ۲ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی قرمز و در کیسه‌ی C تعدادی مهره‌ی سفید وجود دارد. از هر کیسه به ترتیب ۱ و ۲ و ۱ مهره بیرون می‌آوریم و در کیسه‌ی خالی D قرار می‌دهیم. پس از D مهره‌ای خارج می‌کنیم، اگر این مهره سفید باشد احتمال آنکه مربوط به کیسه‌ی A باشد چقدر است؟

$\xrightarrow{\frac{1}{4}} A \xrightarrow{1/4}$ سفید

$\xrightarrow{\frac{2}{4}} B \xrightarrow{2/3}$ سفید

$\xrightarrow{\frac{1}{4}} C \xrightarrow{1}$ سفید

$$\Rightarrow P(\text{سفید} \mid A) = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\times 1} = \frac{3}{31}$$

آزمون تست :

۱- سه ظرف همانند داریم، در اولی و دومی هرکدام ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف سوم ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهره سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب و یک مهره بیرون آوریم، با کدام احتمال این مهره سیاه است؟

$\frac{9}{20}$ $\qquad$ $\frac{11}{20}$ $\qquad$ $\frac{13}{40}$ $\qquad$ $\frac{17}{40}$

$\frac{1}{3}$ ظرف اول $\xrightarrow{\frac{3}{8}}$ سیاه

$\frac{1}{3}$ ظرف دوم $\xrightarrow{\frac{3}{8}}$ سیاه

$\frac{1}{3}$ ظرف سوم $\xrightarrow{\frac{6}{10}}$ سیاه

$$\Rightarrow P = \frac{1}{3}\times\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\times\frac{6}{10} = \frac{9}{20} \rightarrow$$ گزینهٔ ۱

۲- در جعبه‌ای دو ظرف وجود دارد. ظرف اول شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و ظرف دوم شامل ۲ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید است. اگر به تصادف یک مهره از یک ظرف برداشته شود، احتمال ظاهر شدن کدام رنگ بیشتر است؟

سیاه

سفید

هر دو یکسان

سیاه نصف سفید

$\frac{1}{2}$ ظرف اول $\xrightarrow{\frac{5}{9}}$ سیاه

$\frac{1}{2}$ ظرف دوم $\xrightarrow{\frac{2}{5}}$ سیاه

$$\Rightarrow P(\text{سیاه}) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5} = \frac{43}{90}$$

$\frac{1}{2}$ ظرف اول $\xrightarrow{\frac{4}{9}}$ سفید

$\frac{1}{2}$ ظرف دوم $\xrightarrow{\frac{3}{5}}$ سفید

$$\Rightarrow P(\text{سفید}) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} = \frac{47}{90}$$

→ گزینهٔ ۲

۳- ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز و ظرف دوم شامل ۶ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز است. اگر بخواهیم در برداشتن یک مهره به تصادف از یک ظرف احتمال آبی و قرمز بودن یکسان باشد، چند مهره‌ی قرمز باید به ظرف دوم اضافه کنیم؟ ۴ $\qquad$ ۳ $\qquad$ ۵ $\qquad$ ۷

باید احتمال برداشته شدن هر رنگ $\frac{1}{2}$ باشد، اگر تعداد مهره‌های قرمز اضافه شده به ظرف دوم را x فرض کنیم آنگاه:

	آبی	قرمز
ظرف اول	۵	۳
ظرف دوم	۶	$5+x$

$\frac{1}{2}$ ظرف اول $\xrightarrow{\frac{5}{8}}$ آبی

$\frac{1}{2}$ ظرف دوم $\xrightarrow{\frac{6}{11+x}}$ آبی

$$\Rightarrow P(\text{آبی}) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\times\frac{6}{11+x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{5}{8} + \frac{6}{11+x} = 1 \Rightarrow \frac{6}{11+x} = \frac{3}{8} \Rightarrow 11+x=16$$

$\Rightarrow x=5$ ← کافیست ۵ مهرهٔ قرمز به ظرف دوم اضافه شود ← گزینهٔ ۳

توجه: در محاسبه‌ی احتمال، به دلخواه رنگ آبی انتخاب شده است، اگر قرمز نیز انتخاب شود جواب ۵ خواهد شد.

۴- اگر $P(A|B)=\frac{1}{3}$ و $P(B|A)=\frac{2}{5}$ و $P(A)=\frac{2}{3}$ باشند، آنگاه $P(B)$ کدام است؟ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{5}$

$P(B)\times P(A|B)=P(A)\times P(B|A) \Rightarrow P(B)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5} \xrightarrow{\times 3} P(B)=\frac{4}{5}$ ⟵ گزینه ۴

۵- در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی ۹۴) $\frac{11}{26}$ $\frac{6}{13}$ $\frac{7}{13}$ $\frac{15}{26}$

%۵۵ $A \xrightarrow{\%03}$ معیوب

%۴۵ $B \xrightarrow{\%05}$ معیوب

$\Rightarrow P(A|\text{معیوب})=\frac{\%55\times\%03}{\%55\times\%03+\%45\times\%05}=\frac{11}{26}$ ⟵ گزینه ۱

۶- احتمال اعتصاب کارگران در کارخانه‌ای ۳۰٪ است. احتمال اتمام به موقع کار در صورت اعتصاب و عدم اعتصاب کارگران به ترتیب ۲۰٪ و ۶۰٪ است. اگر ببینیم کار به موقع انجام شده است، چقدر احتمال دارد که اعتصاب رخ **نداده** باشد؟ $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$

%۳۰ اعتصاب $\xrightarrow{\%20}$ اتمام به موقع کار

$1-\%30=\%70$ عدم اعتصاب $\xrightarrow{\%60}$ اتمام به موقع کار

$\Rightarrow P=\frac{\%70\times\%60}{\%30\times\%20+\%70\times\%60}=\frac{7}{8}$ ⟵ گزینه ۱

۷- سه تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع سه عدد رو شده ۵ باشد، با چه احتمالی یکی از تاس‌ها ۳ آمده است؟

۰/۳ ۰/۵ ۰/۷ ۱/۰

حالت های مجموع ۵ در پرتاب سه تاس عبارت است از:

(۱و۲و۲) و (۲و۱و۲) و (۲و۲و۱) و (۱و۱و۳) و (۱و۳و۱) و (۳و۱و۱)

$\Rightarrow n$(مجموع ۵ باشد) $=6$ و n(یک تاس ۳ $\cap$ مجموع ۵) $=3$

$\Rightarrow P$(یکی ۳ باشد | مجموع ۵) $=\frac{3}{6}=\%5$ ⟵ گزینه ۲