بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۳)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

دبیر مربوطه:حمید رضا هاشمی صدیق

سالتحصیلی ۱۴۰۰–۱۳۹۹–کارشناسی تکنولوژی و گروههای آموزشی–سرگروه ریاضی دوره دوم

فهـرست

درس دوم وارون ماتریس و دترمینان[۱]

تعریف: اگر A ماتریس مربعی از مرتبه ی n باشد به طوری که $1 \le n \le 3$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می شود.

$$A=[a]_{1\times1} \Rightarrow |A|=a$$

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2} \Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

به عبارت دیگر به هر ماتریس مربعی می توان یک عدد حقیقی نسبت داد که به آن دترمینان آن مارتریس می گویند.

کاربرد دترمینان:

دترمینان یک ماتریس اطلاعاتی مهمی راجع به آن ماتریس و خواص اش می دهد مثلا":

۱-وارون پذیری یک ماتریس از دترمینان آن مشخص می شود یعنی اگر دترمینان ماتریس A مخالف صفر باشد آن ماتریس وارون پذیر است در غیر اینصورت وارون پذیر نیست.

۲-در حل دستگاهها و برای وجود یا عدم وجود جواب برای آن از دترمینان استفاده می شود.

$|A|\neq0$ دستگاه یک جواب دارد.یعنی دو خط متقاطعند. $|A|=0$ دستگاه جواب ندارد یعنی دو خط موازی اند.

۳-برای محاسبه مساحت مثلثی که مختصات سه راس آن داده شده است از دترمینان استفاده می کنیم.

$$A(x_1,y_1),B=(x_2,y_2),C=(x_3,y_3) \Rightarrow S_{\Delta ABC}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

تست: مساحت مثلثی با مختصات رئوس $A(4,1),B(2,5),C(3,2)$ کدام است؟

۱)۰ ۲)۲ ۳)۱۲ ۴)۱۳

ماتریس همسازه و ماتریس کهاد ماتریس A:

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ یک ماتریس باشددر این صورت ij-امین کهاد ماتریس A را با M_{ij} نشان می دهند و عبارتست از ماتریسی 2×2 که از حذف سطر i-ام و ستون j-ام ماتریس A حاصل می شود.

مثال: برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۶ & ۳ & -۴ \end{bmatrix}$، داریم $M_{۱۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$ و $M_{۳۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$.

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ یک ماتریس باشددر این صورت ij-امین همسازه ماتریس A را با A_{ij} نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می شود.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

مثال: برای ماتریس مثال قبل، داریم :

$$A_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}\left|M_{۱۳}\right|=(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{vmatrix}=-۶\ ,$$

$$A_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}\left|M_{۳۲}\right|=(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & ۵ \end{vmatrix}=-۱۰\ .$$

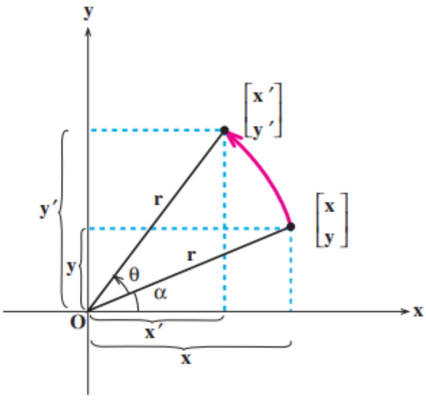
تست: اگر $A=\begin{bmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{5} & \cos45^o \\ \sin45^o & \sqrt{2}+\sqrt{5} \end{bmatrix}$ آنگاه مقدار $\left|A\right|$ کدام است؟

۱) ۳-　　۲) ۳/۵-　　۳) ۳/۵　　۴) ۳

$$\left|A\right|=\begin{vmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{5} & \cos45^o \\ \sin45^o & \sqrt{2}+\sqrt{5} \end{vmatrix}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)-\left(\sin45^o\right)\left(\cos45^o\right)$$

$$=(-3)-\left(\frac{1}{2}\right)=-3/5$$

نکته:دوران یافته نقطه ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ در جهت مثلثاتی نقطه ی $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ است که تحت ماتریس دوران $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ صورت می گیرد.



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

نکته:در بسط دترمینان های سه در سه بهتر است بسط را برحسب سطر یا ستونی انجام دهیم که بیشتر درایه هایش صفر هستند.

تست:اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -a & -3 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}, |A| = 6$ آنگاه مقدار a کدام است؟

۱)   ۲)۲   ۳)۳   ۴)۴

$$|A| = (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} -a & -3 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -a + 3a = 2a \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

تست:معادله ی $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

۱)   ۲)۲   ۳)۳   ۴)بی شمار

$$\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & x^2 & 1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-1)^{3+1}\times1\times\begin{vmatrix}x & x^2\\x^2 & 1\end{vmatrix}+0+0=0\Rightarrow\begin{vmatrix}x & x^2\\x^2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x\times1-x^2\times x^2=0\Rightarrow x-x^4=0\Rightarrow\boxed{x=0\vee x=1}$$

روش تستی:اگر درایه های یک سطر یا یک ستون از ماتریسی صفر باشد دترمینان آن ماتریس برابر صفر است پس یکی از جوابهای معادله برابر صفر است.

۲- اگر دو سطر یا دو ستون از یک ماتریسی برابر باشند دترمینان آن ماتریس برابر صفر است پس یکی دیگر از جوابها برابر (۱) است.

نکته:برای محاسبه ی مجموع دو دترمینان ابتدا آنها را بر حسب سطر یا ستون مناسب بسط می دهیم و سپس آنها را جمع می کنیم.

تست:مجموع دو دترمینان $\begin{vmatrix}x & 0 & x\\0 & y & 0\\z & 0 & t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & x & 0\\y & 0 & z\\0 & t & 0\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $xy(z-t)$ ۲) $xy(t-z)$ ۳) o ۴) $2xyzt$

$$\begin{vmatrix}0 & x & 0\\y & 0 & z\\0 & t & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 0 & x\\0 & y & 0\\z & 0 & t\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\times x\begin{vmatrix}y & z\\0 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\times y\begin{vmatrix}x & x\\z & t\end{vmatrix}$$

$$=-x\times0+y(xt-xz)=xy(t-z)\Rightarrow\boxed{2}$$

نکته:در تست برخی از دترمینان ها ی می توان از روش عدد گذاری برای رسیدن سریع به پاسخ استفاده کرد.

تست:اگر $\begin{vmatrix}-a & b & 0\\-1 & -b & a\\a & -b & b\end{vmatrix}=k$ باشد،مقدار $\begin{vmatrix}b-a & 1 & 0\\-b-1 & -1 & 2a\\a-b & -1 & 2b\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{b}k$ ۲) $-2bk$ ۳) $2bk$ ۴) $\frac{2}{b}k$

حل:به ازای a=۰ هر دو دترمینان را بسط می دهیم بعد حاصل دترمینان فرض را در گزینه ها بجای k قرار می دهیم. حاصل هر گزینه ای برابر حاصل دترمینان دوم شد جواب مساله است.

$$\begin{vmatrix} -a & b & 0 \\ -1 & -b & a \\ a & -b & b \end{vmatrix} = k \xrightarrow{a=0} \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ -1 & -b & 0 \\ 0 & -b & b \end{vmatrix} = k \Rightarrow (-1)^{1+2} b \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = k \Rightarrow b^2 = k$$

$$\begin{vmatrix} b-a & 1 & 0 \\ -b-1 & -1 & 2a \\ a-b & -1 & 2b \end{vmatrix} \underline{\underline{a=0}} \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -b-1 & -1 & 0 \\ -b & -1 & 2b \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \times 2b \begin{vmatrix} b & 1 \\ -b-1 & -1 \end{vmatrix} = 2b(-b+b+1) = 2b$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{2}{b}k = -\frac{2}{b}(b^2) = -2b \boxed{\times} \\ -2b(b^2) = -2b^3 \boxed{\times} \\ 2bk = 2b(b^2) = 2b^3 \boxed{\times} \\ \frac{2}{b}k = \frac{2}{b}(b^2) = 2b \boxed{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{4}$$

➢**تست**:حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c+2 \\ 3a & 3b+2 & 3c+3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $3a$ ۲) $-a$ ۳) o ۴) abc

حل:به ازای a=b=c=۰ همگی صفر می شود و جواب معلوم نمیشود.به ازای a=b=c=۱ دترمینان را بسط می دهیم و در گزینه ها هم همان مقدار را قرار می دهیم.حاصل هر گزینه ای با حاصل دترمینان برابر شد. جواب مساله است.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ۲a & ۲b+۱ & ۲c+۲ \\ ۳a & ۳b+۲ & ۳c+۳ \end{vmatrix} \xrightarrow{a=b=c=۱} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} =$$

$$(-۱)^{۱+۱} \times ۱ \times \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۲} \times ۱ \times \begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۳} \times ۱ \times \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} =$$

$$(۱۸-۲۰)-(۱۲-۱۲)+(۱۰-۹) = -۲+۰+۱ = -۱$$

بررسی گزینه ها

$$\begin{cases} ۳a = ۳ \\ -a = -۱ \Rightarrow \boxed{۲} \\ ۰ = ۰ \\ abc = ۱ \end{cases}$$

تست:ماتریس $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} 2 & i<j \\ 1 & i=j \\ -3 & i>j \end{cases}$ مفروض است،دترمینان ماتریس $A + A^2$ کدام است؟

۱) 1250 ۲) -1250 ۳) 2250 ۴) -1000

$$|A + A^2| = -1000 + 2250 = 1250 \Rightarrow \boxed{1}$$

دستور ساروس برای بسط دترمینان های ۳ × ۳:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

تست:در دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ اگر به درایه سطر سوم وستون سوم، چهار واحد اضافه کنیم و مقدار دترمینان تغییر نکند،آنگاه a کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = -14a - 21 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = -6a - 9 \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = |B| \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{2}$$

ویژگی های دترمینان ها:

۱–اگر دو سطر یا دو ستون از یک ماتریس 2×2 یا 3×3 برابر باشند آنگاه دترمینان آن ماتریس برابر صفر است.

۲– اگر یک سطر یا یک ستون از یک ماتریس 2×2 یا 3×3 k برابر شود آنگاه دترمینان آن ماتریس k برابر است. $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = k\,|A|$

تست:اگر $|A_{3\times3}| = -4$ وسطر اول ماتریس A در $-\frac{3}{2}$ و ستون دوم آن در $-\frac{1}{6}$ ضرب شودآنگاه دترمینان ماتریس حاصل کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -2 ۳) -1 ۴) 1

$$|B| = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)|A| = \frac{1}{4}|A| = \frac{1}{4}(-4) = -1 \Rightarrow \boxed{3}$$

۳–برای هر دو ماتریس مربعی A,B از مرتبه ی n همواره داریم: $|A\times B| = |B\times A| = |A||B|$

این ویژگی در جمع ماتریس ها وجود ندارد. $|A+B| \neq |A| + |B|$

۴–اگر A یک ماتریس مربعی و n عدد طبیعی باشد،آنگاه $|A^n| = |A|^n$

۵–دترمینان هر ماتریس قطری و اسکالر برابر است با حاصل ضرب درایه های قطر اصلی آن.

$$A=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = xyz$$

۵–۱– دترمینان ماتریس مثلثی(بالا مثلثی و پایین مثلثی) برابر است با حاصلضرب درایه های روی قطر اصلی

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & y & c \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ a & y & 0 \\ b & c & z \end{vmatrix} = xyz$$

۵–۲–

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abc$$

۶–به طور کلی اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k یک عدد حقیقی باشد،همواره داریم:

$$|kA_{n\times n}| = k^n |A|$$
$$|kA_{3\times 3}| = k^3 |A|$$
$$|kA_{2\times 2}| = k^2 |A|$$

نتیجه:اگر $I_{3\times 3}$ باشدآنگاه $|kI| = k^3$ و اگر $I_{2\times 2}$ باشد آنگاه $|kI| = k^2$

تست:اگر رابطه ی ماتریسی $A \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ برقرار باشد دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) 2 ۲) -4 ۳) 4 ۴) -2

$$A \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A|(2-0) = (4-8) \Rightarrow |A| = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow \boxed{4}$$

تست: ماتریس $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت مقابل تعریف شده است:

$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ i - j & i < j \\ i + j & i > j \end{cases}$ مفروض است دترمینان ماتریس A^2 کدام است؟

۱) 625 ۲) 529 ۳) 576 ۴) 676

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1-2 & 1-3\\ 2+1 & 0 & 2-3\\ 3+1 & 3+2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 3 & 0 & -1\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=4-2\times 15=-26$$

$$|A^2|=|A|^2=(-26)^2=676\Rightarrow \boxed{4}$$

۷– اگر $(m>n)$ $A_{m\times n}\times B_{n\times m}=C_{m\times m}$ آنگاه دترمینان ماتریس C برابر صفر است.

زیرا مثلا" $A_{3\times 2},B_{2\times 3}$ را می توان با اضافه کردن ستون و سطر با درایه های صفر به ماتریس های $A_{3\times 3},B_{3\times 3}$ تبدیل کرد که حاصلضرب آنها همان C است.

تست: ماتریس های $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ m & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1 & m & 2\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}$ مفروضند،به ازای کدام مجموعه مقادیر m حاصل $|B\times A|$ برابر صفر است؟

۱)اعداد حقیقی ۲)تهی ۳) $\{1,2\}$ ۴) $\{2,3\}$

$$C_{3\times 3}=B\times A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ m & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & m & 2\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ m & 3 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & m & 2\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |C_{3\times 3}|=|B\times A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ m & 3 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}1 & m & 2\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{1}$$

۸– $A=[k]_{1\times 1}\Rightarrow |A|=k$

وارون ماتریس ها:

ماتریس B را وارون ماتریس A گویند هر گاه $A\times B=B\times A=I$ و آن را با نماد A^{-1} نشان می دهند.

دستور محاسبه A^{-1} برای $A_{2\times 2}$: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ آنگاه $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ به شرط اینکه $|A|\neq 0$ باشد.(شرط وارون پذیر بودن A)

خواص ماتریس های وارون پذیر:

۱-وارون ،وارون یک ماتریس برابر خود آن ماتریس است.

۲-اگر A,B دو ماتریس وارون پذیر باشند آنگاه $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

۳-اگر k یک عدد حقیقی مخالف صفر و A یک ماتریس وارون پذیر باشد،آنگاه $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

۴- اگر A یک ماتریس وارون پذیر باشد،آنگاه $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

۵-اگر A یک ماتریس وارون پذیر و n یک عدد حقیقی باشد،آنگاه $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

۶- $A=\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{a} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{b} \end{bmatrix}$

۷- $(A^{-۱}BA)^n=A^{-۱}B^nA$

تست: اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$ انگاه دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) $-\frac{1}{10}$ ۲) $-\frac{1}{20}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{1}{20}$

$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\Rightarrow 3\times 12-7\times 8=\frac{1}{|A|}\Rightarrow |A|=\frac{1}{36-56}=-\frac{1}{20}\Rightarrow \boxed{2}$

نکته:اگر P یک ماتریس مربعی وارون پذیر 2×2 و A یک ماتریس 2×2 دلخواه باشد،آنگاه

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP\ (n\in\mathbb{N})$$

تست: اگر P یک ماتریس مربعی وارون پذیر 2×2 دلخواه باشد،مجموع درایه های ماتریس $\left(P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}P\right)^{16}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 2 ۳) 32 ۴) 16

$$\left.\begin{array}{l}\left(P^{-1}AP\right)^{16}=P^{-1}A^{16}P\\ A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{16}=I\end{array}\right\}\Rightarrow\left(P^{-1}AP\right)^{16}=P^{-1}IP=P^{-1}P=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\rightarrow 2\Rightarrow\boxed{2}$$

روش حل معادله ی ماتریسی $A\times X=B$:

اگر A,X,B ماتریس های مربعی از مرتبه ۲ باشند،به طوری که $|A|\neq ۰$،در این صورت ماتریس X از معادله ی $AX=B$ به صورت زیر بدست می آید.

$$A\times X=B\Rightarrow A^{-۱}(A\times X)=A^{-۱}B\Rightarrow\left(A^{-۱}A\right)X=A^{-۱}B\Rightarrow\boxed{X=A^{-۱}B}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۴&۹\end{bmatrix}$،آنگاه مجموع درایه های ماتریس X از معادله ی ماتریسی $A.X=A^{-۱}$ کدام است؟

۱)۴۱ ۲)۴۰ ۳)۳۹ ۴)۳۸

$$AX=A^{-۱}\Rightarrow A^{-۱}(AX)=A^{-۱}A^{-۱}\Rightarrow\left(A^{-۱}A\right)X=\left(A^{-۱}\right)^۲\Rightarrow X=\left(A^{-۱}\right)^۲$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}۹&-۲\\-۴&۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۹-۸}\begin{bmatrix}۹&-۲\\-۴&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&-۲\\-۴&۱\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}۹&-۲\\-۴&۱\end{bmatrix}^۲=\begin{bmatrix}۹&-۲\\-۴&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۹&-۲\\-۴&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸۹&-۲۰\\-۴۰&۹\end{bmatrix}\Rightarrow ۸۹+۹-۴۰-۲۰=۳۸\Rightarrow\boxed{۴}$$

روش دیگر برای محاسبه ی وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$:

قضیه: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ آنگاه $A^۲-(a+d)A+|A|I_{۲\times۲}=\bar{O}$

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\-۳&-۷\end{bmatrix}$، را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$A^{۲}-(a+d)A+|A|I_{۲\times۲}=\overline{O} \Rightarrow A^{۲}-(۱-۷)A+(-۷+۶)I_{۲\times۲}=\overline{O} \Rightarrow$$

$$A^{۲}+۶A-I_{۲\times۲}=\overline{O} \Rightarrow A^{۲}+۶A=I_{۲\times۲} \Rightarrow A(A+۶I)=I_{۲\times۲} \Rightarrow A^{-۱}=A+۶I \Rightarrow$$

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & -۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ -۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A^{۲}=\alpha A+\beta I$ آنگاه $\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۶

حل: با توجه به (**قضیه**: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{۲}-(a+d)A+|A|I_{۲\times۲}=\overline{O}$)

$$A^{۲}-(۳+۴)A+۲I_{۲\times۲}=\overline{O} \Rightarrow A^{۲}-۷A+۲I_{۲\times۲}=\overline{O} \Rightarrow$$

$$A^{۲}=۷A-۲I_{۲\times۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۷ \\ \beta=-۲ \end{cases}$$

$$\alpha-\beta=۷+۲=۹ \Rightarrow \boxed{۳}$$

تست: اگر $A^{۲}=۲I$ باشد آن گاه وارون ماتریس $A-I$ کدام است؟

۱) $A+\frac{۱}{۲}I$ ۲) $A+I$ ۳) $A-\frac{۱}{۲}I$ ۴) $A-I$

$$A^{۲}=۲I \Rightarrow A^{۲}-I=I \Rightarrow A^{۲}-I^{۲}=I \Rightarrow (A-I)(A+I)=I \Rightarrow$$

$$(A-I)^{-۱}=(A+I) \Rightarrow \boxed{۲}$$

تست: اگر $A^{۲}=A$ باشد آن گاه وارون ماتریس $I-۲A$ کدام است؟

۱) $I+۲A$ ۲) $A+\frac{۱}{۲}I$ ۳) $I-\frac{۱}{۲}A$ ۴) $I-۲A$

$$(I-۲A)^{۲} \longrightarrow =I^{۲}-۴IA+۴A^{۲} \xrightarrow{A^{۲}=A} =I-۴A+۴A=I \Rightarrow$$

$$(I-۲A)^{۲}=I \Rightarrow (I-۲A)(I-۲A)=I \Rightarrow (I-۲A)^{-۱}=(I-۲A) \Rightarrow \boxed{۴}$$

تست:

با توجه به ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$، چنان‌چه عضو واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس معکوس A برابر ۱ باشد، مقدار K کدام است؟

پاسخ:

همسازه‌ی نظیر درایه‌ی سطر jام و ستون iام

A^{-1}_{ij} درایه‌ی سطر iام و ستون jام از A^{-1}

$$A^{-1}_{ij}=\frac{A_{ji}}{|A|} \Rightarrow 1=\frac{3}{9-3K} \Rightarrow k=2$$

تست:

اگر $AB=BA$ و $I+A^3=-B^3$ باشد، آن‌گاه $(A+B)^{-1}$ برابر است با،

پاسخ:

$$I+A^3=-B^3 \Rightarrow A^3+B^3=-I \Rightarrow (A+B)(A^2-AB+B^2)=-I$$

$$(A+B)(-A^2+AB-B^2)=I \Rightarrow (A+B)^{-1}=-A^2+AB-B^2$$

تست:

اگر A ماتریس وارون‌پذیر باشد و $|I-A|=5$، آن‌گاه $|A^{-1}-I|$ کدام است؟

پاسخ:

$$\left|A^{-1}-I\right|=\frac{|A|\left|A^{-1}-I\right|}{|A|}=\frac{|I-A|}{|A|}=\frac{5}{|A|}$$

تست:

اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\1&0&0\end{bmatrix}$، حاصل A^*A-2AA^* کدام است؟

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l}AA^*=A^*A\\AA^*=|A|I\end{array}\right\}\Rightarrow 2AA^*-A^*A=AA^*=|A|I=-3I$$

تست:

هرگاه A ماتریس 3×3 و $|A|=2$ باشد، مقدار $\left|A^*+A^{-1}\right|$ کدام است؟

پاسخ:

$$\left|A^*+A^{-1}\right|=\left||A|A^{-1}+A^{-1}\right|=\left|(|A|+1)A^{-1}\right|=\left|3A^{-1}\right|=3^3\left|A^{-1}\right|=3^3\times\frac{1}{|A|}=3^3\times\frac{1}{2}=\frac{27}{2}$$

حل دستگاه دو معادله ی دو مجهولی درجه اول به کمک ماتریس وارون:

دستگاه دو معادله ی دو مجهولی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را می توان به شکل ماتریسی نوشت:

$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ که در آن $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و $\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر نامیده می شود.

این دستگاه وقتی با این روش قابل حل است که ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد.

A^{-1} را بدست می آوریم وشکل ماتریسی دستگاه را از چپ به آن ضرب می کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

تست: اگر ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax+by=۲ \\ a'x+b'y=۹ \end{cases}$، به صورت $\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ باشد آنگاه حاصل ضرب xy کدام است؟

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۹ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۹ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱۵-۸}\begin{bmatrix} -۵ & -۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۹ \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۲۳}\begin{bmatrix} -۵ & -۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow xy=-۲\Rightarrow\boxed{۳}$$

روش دوم: به روش حذفی

روش سوم: به روش کرامر

بحث در جواب دستگاه دو معادله ی دو مجهولی درجه اول:

الف)اگر دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد $|A| \neq 0$ در این صورت دستگاه دارای جواب منحصر بفرد است.در صورت غیر صفر بودن ضرایب شرط این حالت به صورت مقابل است. $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ –دو خط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند.

ب) اگر دترمینان ضرایب مساوی صفرباشد $|A| = 0$:

۱)اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$،دستگاه جواب ندارد.ناممکن است–دو خط با هم موازی اند

۲)اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$،دستگاه بی شمار جواب دارد.که این بی شمار جواب از روی یکی از معادلات دستگاه بدست می آید.که اصطلاحا" آن را مبهم می گویند.–دو خط بر هم منطبق اند.

بحث در جواب دستگاه درجه اول همگن $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$:

۱)اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ آنگاه دستگاه دارای جواب منحصر بفرد $(0,0)$است.(هر دو خط مبدا گذرند)

۲)اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط بر هم منطبق اند و دستگاه علاوه بر جواب $(0,0)$ دارای بی شمار جواب غیر صفر دیگراست.

تست: اگر دستگاه $\begin{cases} mx - 12y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$، دارای جواب غیر صفر باشد،آنگاه دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) -16 ۲) 16 ۳) -14 ۴) 14

$$\frac{m}{4} = \frac{-12}{3} \Rightarrow m = -16$$

$$\begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -16 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 16 = -14 \Rightarrow \boxed{3}$$

یادآوری:

کهاد ماتریس A:

فرض کنید $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ یک ماتریس دلخواه باشد.در این صورت ij–امین کهاد ماتریس A را با M_{ij} نشان می دهند که ماتریسی ۲×۲ است و از حذف سطر i–ام و ستون j–ام ماتریس A به وجود می آید.

همسازه ماتریس A:

فرض کنید $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ یک ماتریس دلخواه باشد.در این صورت ij–امین همسازه ماتریس A را با A_{ij} نشان می دهند وبه صورت زیر تعریف می کنند. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$

برای محاسبه ی دترمینان ماتریس ۳×۳ ،به مفهومی بنام همسازه نیاز داریم.که در کتاب درسی هر چند از آن استفاده شده است اما نامی از آن برده نشده است.