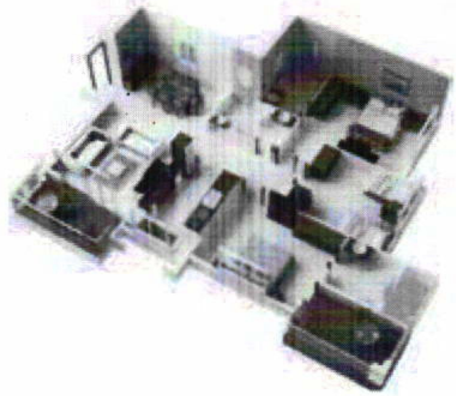
فصل

۶ هندسه

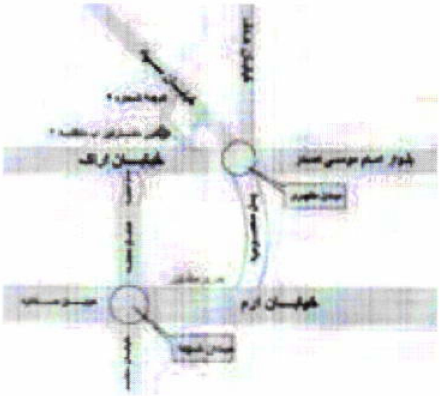
شهر گور اولین شهر دایره‌ای در ایران و یکی از نخستین شهرهای دایره‌ای در جهان، در نزدیکی فیروزآباد فارس واقع شده است. قدمت این شهر باستانی به دورهٔ هخامنشیان می‌رسد. طرح و الگوی این شهر دایره‌ای به قطر دو کیلومتر و دارای چهار دروازهٔ اصلی بوده و بناهای حکومتی و محل اقامت درباریان در آن قرار داشته است. پس از اسلام، اعراب این شهر را جور تلفظ می‌کردند و مورخان قدیم این واژه را دشت یا گودال معنی کرده‌اند. به نقل از تاریخ طبری، اردشیر بنای این شهر را در حدود ۲۲۴ میلادی و به نشانهٔ قدرت‌نمایی در برابر آخرین شاه اشکانی آغاز کرده است.

درس اوّل

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی



برای دوستتان توصیف کنید که خانه‌تان چه شکلی است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانهٔ بزرگ‌تری داشتید، در این صورت خانهٔ جدید، چه شکلی بود؟

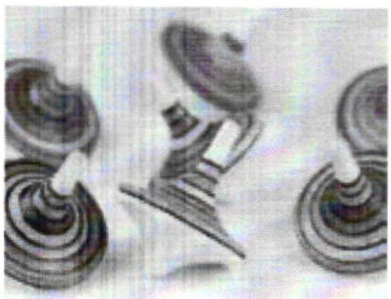


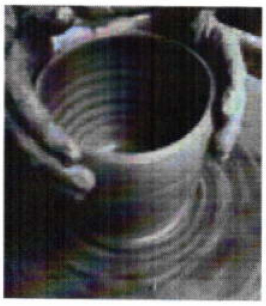
به مسیری که هر روز از خانه تا مدرسه طی می‌کنید، فکر کنید. آیا می‌توانید این مسیر را با رسم یک تصویر مناسب توضیح دهید؟

در حالت‌های بالا شما به موضوعی فکر کردید، اما از عبارات، جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نکردید. در واقع به جای کلمات، تصاویری در ذهن شما نقش بستند و این تصویرسازی ذهنی، به شما کمک کرد که به آن موضوع یا موقعیت فکر کنید. این شیوه از تفکر را **تفکر تجسمی** می‌نامیم.

فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست‌ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می‌شود. این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله‌های ریاضی و همین‌طور حل مسائل در زندگی روزمره دارد. موقعیت‌هایی که می‌تواند به تقویت تفکر تجسمی کمک کنند عبارت‌اند از: تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم سطح گستردهٔ اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران شکل حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا و تجسم اجسام هندسی بعد از برش. از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین این موقعیت‌ها، دوران اشکال هندسی حول یک محور و برش اجسام را بررسی می‌کنیم.

دوران حول محور



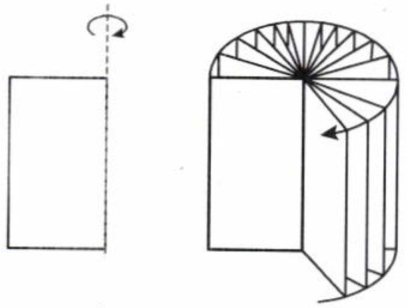


سفالگری کلپورگان (سیستان و بلوچستان)

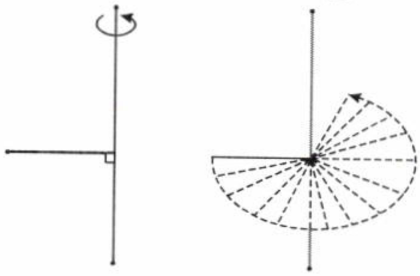
وقتی شکل‌های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شود، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شود. در فعالیت زیر نمونه‌هایی از این مفهوم ارائه شده است. در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

فعالیت

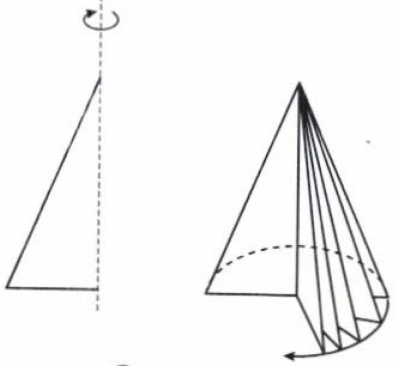
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن: استوانه تشکیل می‌شود.



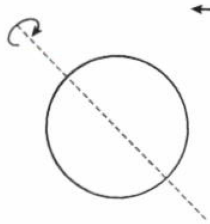
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است: دایره تشکیل می‌شود
«سطح دایره»



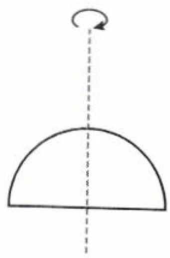
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه: مخروط قائم توخالی تشکیل شود چون مثلث را رنگی نکرده است.



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن: کره توخالی



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن: نیم کره توخالی



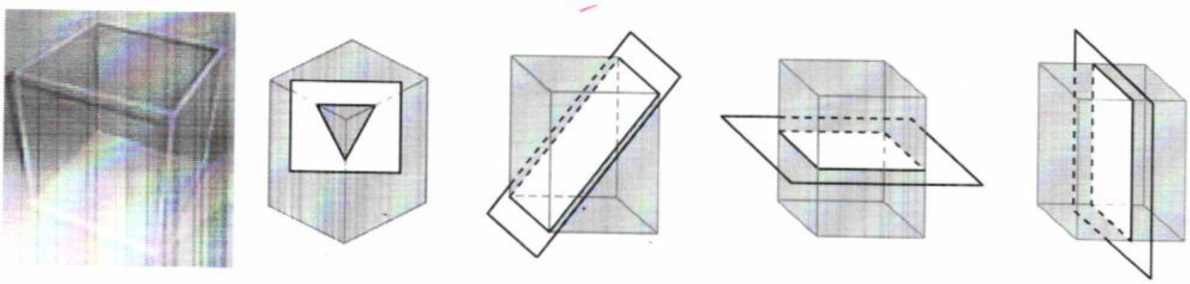
برش

در فعالیت قبل، از دوران شکل حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل شد. حال فرض کنید می‌خواهیم اجسام سه‌بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره بارها با برش اجسام مختلف هندسی مواجه بوده‌اید. این اجسام می‌توانند توپر یا توخالی باشند.

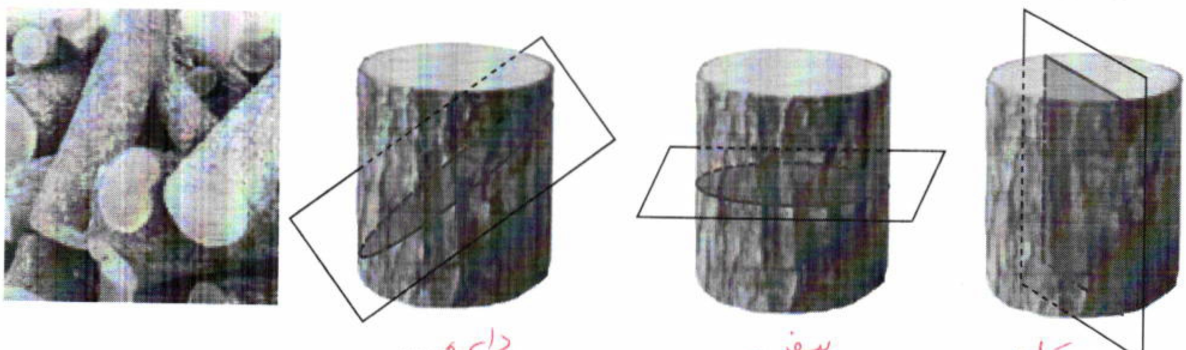
شکلی که از برخورد یک صفحه[1] با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود.

فعالیت

الف) بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعدهٔ مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید. مثلث - مستطیل

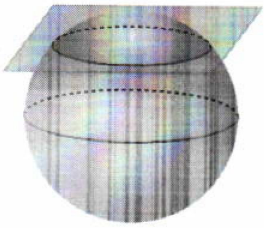


ب) سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



مستطیل .... بیضی .... دایره ....

۱ــ خط و صفحه از مفاهیم اساسی هندسه هستند. همان‌طور که خط از هر دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامت ندارد.



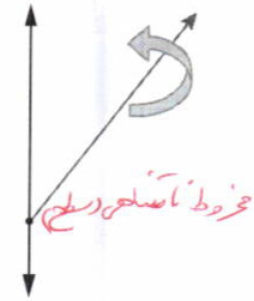
پ) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ دایره

در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟ از مرکز کره بگذرد

کار در کلاس

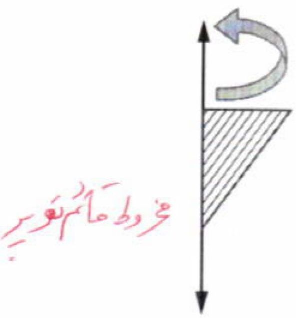
۱ شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت‌های زیر مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید :

الف) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول محور



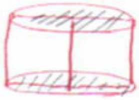
مخروط ناتمام سطحی

ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور



مخروط قائم توپر

۲ مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.



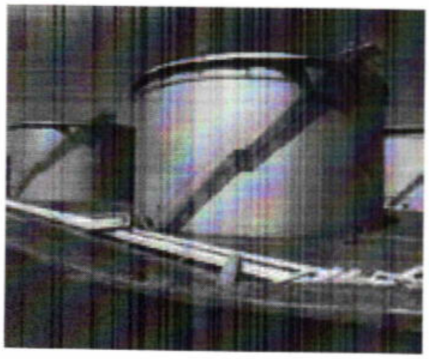
الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟ وقتی ارتفاع استوانه و قطر قاعده برابر باشد و صفحه عمود بر قاعده‌ها و از مرکز قاعده‌ها بگذرد.

پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳و۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ موازی با قاعدهٔ این استوانه چقدر است؟ $r=4 \Rightarrow S=\pi r^2 = 4^2\pi = 16\pi$ سطح مقطع دایره است.

ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعدهٔ استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟ مساحت مستطیلی به ابعاد ۸ و ۳

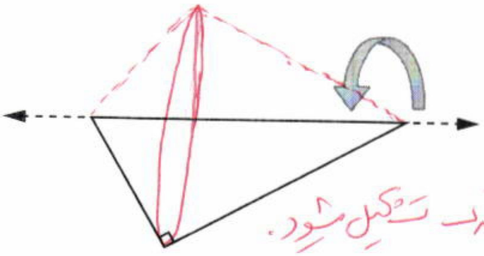
$S = 3 \times 8 = 24$



مخازن نفتی در زنجان

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

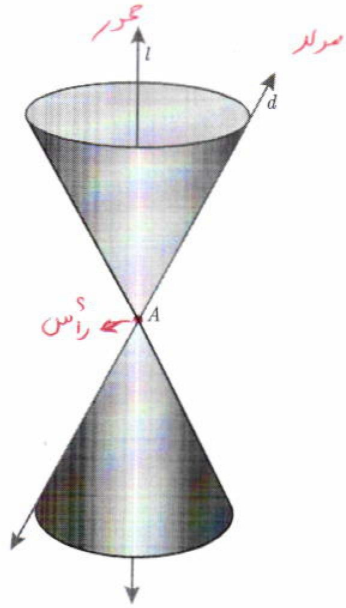


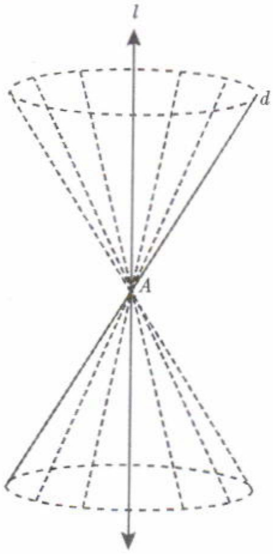
۳ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟

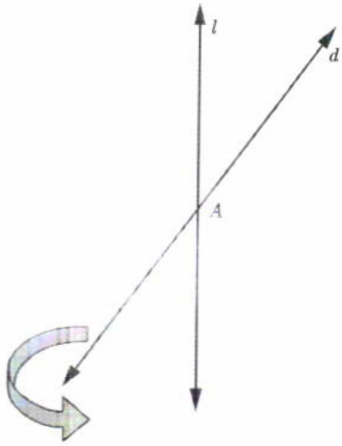
۲ مخروط با قاعده مشترک تشکیل می‌شود.

آشنایی با مقاطع مخروطی

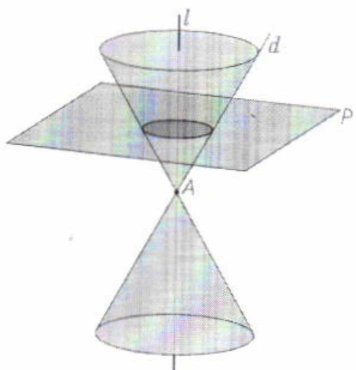
دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. در این حالت خط l محور، نقطهٔ A، رأس و خط d، مولد این سطح مخروطی است.



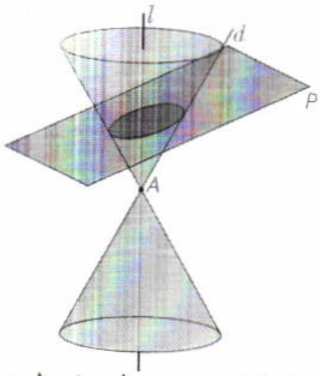




وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است. از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، مقاطع مخروطی نامیده می‌شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا خواهیم شد.

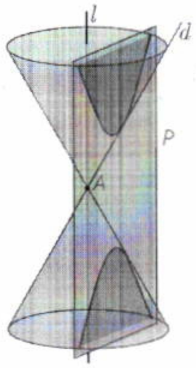


الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.

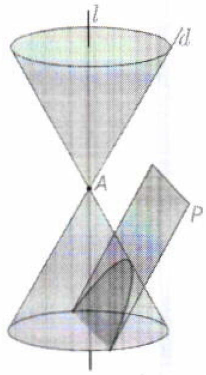


ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی خواهد بود.

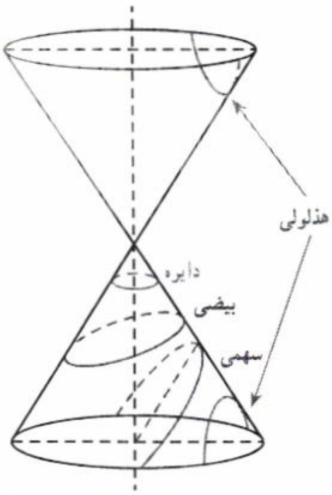
تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان



ت) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی[1] می‌نامیم.



پ) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.



بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.

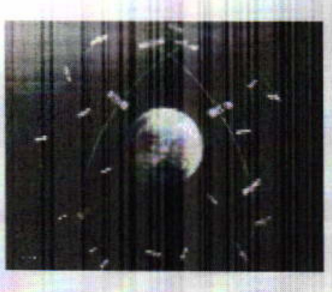
در ادامهٔ این درس قصد داریم بیضی و ویژگی‌های آن را بدون معرفی معادلهٔ آن، مورد بررسی قرار دهیم.

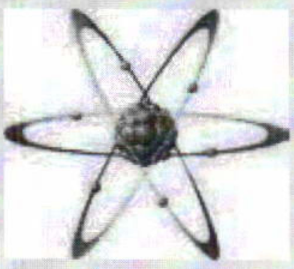
تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

خواندنی

مقاطع مخروطی ابتدا توسط یونانیان باستان مورد مطالعه قرار گرفتند و به مرور زمان در مطالعهٔ مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار و قمرهای مصنوعی کاربردهای زیادی پیدا کردند. این منحنی‌ها همچنین در مطالعهٔ ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساخت عدسی‌ها، نقشه‌برداری، وسایل نوری، وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، ساختن پل و علاوه بر آن در علوم نظامی، پزشکی و اقتصاد به‌کار می‌روند.



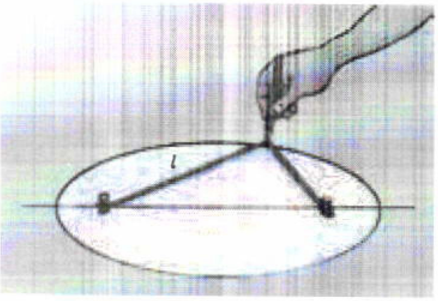


۱ــ معادلهٔ هذلولی و بررسی ویژگی‌های آن، جزء اهداف این کتاب نیست.

بیضی

حتماً می‌دانید که به کمک یک تکه نخ چگونه می‌توان یک دایره رسم کرد. در این فعالیت می‌خواهیم ببینیم طریقهٔ رسم بیضی به کمک یک تکه نخ چگونه است و حین انجام این فعالیت، ویژگی‌های بیضی را بهتر بشناسیم.

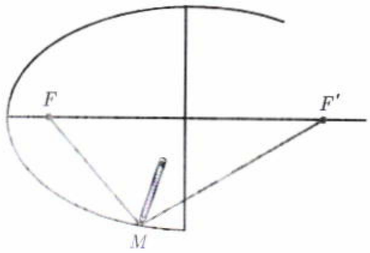
فعالیت



مانند شکل دو سر نخی به طول l را روی یک صفحه ثابت کنید. دقت داشته باشید که برای رسم بیضی لازم است که طول نخ از فاصلهٔ بین دو میخ، بیشتر باشد. حالا مطابق شکل، مدادتان را در حالتی که تکه نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است، روی صفحه حرکت دهید.

شکل حاصل منحنی بسته‌ای است که به آن بیضی می‌گوییم.

همان‌طور که دیدید دو میخ در واقع نشان‌دهندهٔ دو نقطهٔ ثابت در بیضی هستند. این دو نقطه را کانون‌های[1] بیضی می‌نامند.



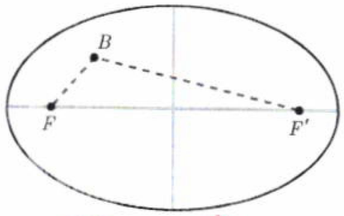
اگر کانون‌های بیضی را با F و F' نمایش دهیم و نقطه‌ای مثل M یک نقطهٔ دلخواه از بیضی باشد، مجموع فواصل این نقطه از نقاط F و F' یعنی $MF + MF'$ برابر با چیست؟

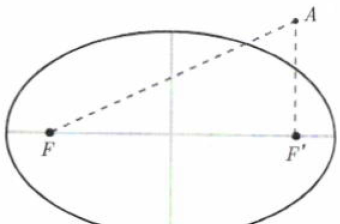
... طول نخ (L)

بدین ترتیب:

بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.[2]

می‌توان نشان داد که اگر نقطهٔ دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از l و اگر نقطهٔ دلخواه B، داخل بیضی باشد، مجموع فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ F و F' کمتر از l خواهد بود.

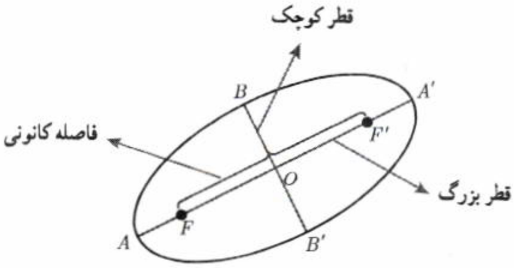




$BF + BF' < L$ $\qquad$ $MF + MF' > L$

۱ـ Foci

۲ـ اثبات اینکه سطح مقطع مخروطی معرفی شده به عنوان بیضی، با این تعریف همخوانی دارد، خارج از اهداف این کتاب است.



بیضی مقابل را در نظر بگیرید.

در این بیضی کانون‌ها را F و F' نامیده‌ایم.

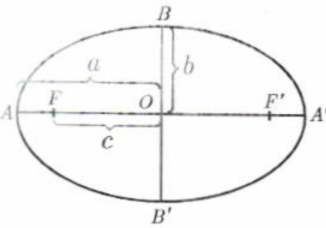
در هر بیضی اندازهٔ FF'، فاصلهٔ کانونی بیضی نامیده می‌شود.

نقطهٔ میانی پاره‌خط FF'، مرکز بیضی است که آن را نقطهٔ O نامیده‌ایم.

پاره‌خطی که از کانون‌های بیضی می‌گذرد یعنی AA'، قطر بزرگ یا قطر کانونی بیضی است. پاره‌خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ بیضی عمود است، یعنی قطر BB'، قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود.

اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را بیضی افقی و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را بیضی قائم می‌نامیم.

فعالیت



بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازهٔ پاره‌خط‌های OB، OA و OF را به‌ترتیب با a، b و c نمایش داده‌ایم. می‌دانیم که مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون بیضی مقداری ثابت است.

۱ می‌خواهیم نشان دهیم قطر بزرگ بیضی طولی برابر با همین مقدار ثابت دارد.

در رسم بیضی، حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطهٔ A قرار دارد. در این‌صورت :

مقدار ثابت $= AF + AF' = AF + (AF + FF') = ۲AF + FF'$ (۱)

به همین ترتیب فرض کنید نوک مداد روی نقطهٔ A' قرار دارد. در این صورت داریم :

مقدار ثابت $= A'F' + A'F =$ $A'F' + (A'F' + F'F) =$ (۲) $۲A'F' + FF'$

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) و (۲) و برابری سمت چپ دو رابطه داریم: $AF = A'F'$

$OA = OA'$ پس مرکز بیضی قطر بزرگ را نصف می‌کند و $AA' = ۲OA = ۲a$

پس:

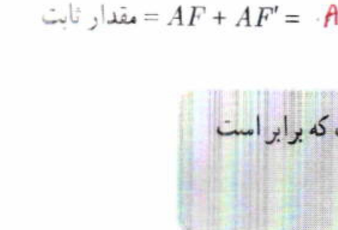
مقدار ثابت $= AF + AF' =$ $A'F' + AF' = a + a = ۲a$

بنابراین :

> مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

سؤال : با توجه به تساوی $AF = A'F'$ نشان دهید که مرکز بیضی قطر بزرگ آن را نصف می‌کند و از آن نتیجه بگیرید طول قطر بزرگ بیضی برابر $۲a$ است.

$AF + AF' = AF + (AF + OF + OF') = ۲AF + ۲OF = ۲(AF + OF) = ۲a$ $AA' = ۲OA = ۲a$



۲ حال قصد داریم رابطهٔ بین a، b و c را پیدا کنیم.

الف) نقطهٔ B را مطابق شکل روی بیضی در نظر بگیرید. می‌دانیم این نقطه روی عمود منصف پاره‌خط FF' است. (چرا؟) $BF' = BF$ نقطه‌ای که از ۲ سر پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف است

$$\left.\begin{array}{l} BF + BF' = ۲a \\ BF = BF' \end{array}\right\} \rightarrow BF = BF' = a$$

ب) به کمک قسمت قبلی فعالیت، اندازهٔ BF را پیدا کنید. $a=BF=\sqrt{c^2+b^2}$

پ) چه رابطه‌ای بین a، b و c وجود دارد؟ $a^2=b^2+c^2 \longrightarrow c^2=a^2-b^2$

ت) آیا مرکز بیضی قطر کوچک را هم نصف می‌کند؟ چرا؟ بله چون $BF=B'F$ و لذا مثلث BFB' متساوی‌الساقین است
لذا AA' عمود منصف BB' است.

بنابراین :

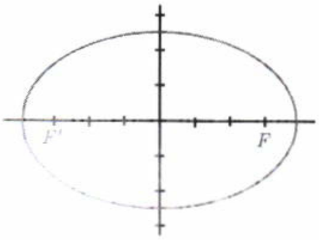
> اگر در یک بیضی، اندازهٔ نیم قطر بزرگ را a، اندازهٔ نیم قطر کوچک را b و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه ....

$a^2=b^2+c^2$

مثال :

اگر در یک بیضی $c=3$ و $a=4$ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

حل :



$$b^2=a^2-c^2=4^2-3^2=16-9=7 \Rightarrow b=\sqrt{7}$$

و بنابراین اندازهٔ قطر کوچک برابر است با $2\sqrt{7}$.

کار در کلاس

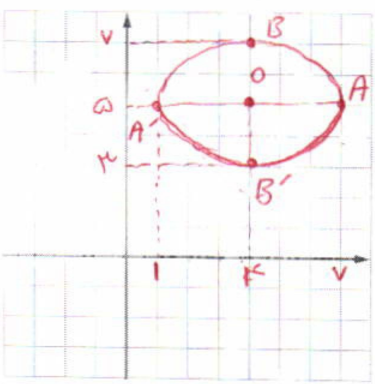
۱) اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$، در این‌صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

$c^2=a^2-b^2=5^2-3^2=16 \longrightarrow c=4$

$2c=8$ فاصله کانونی

۲) در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴،۵) باشد :



الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

$2a=6 \rightarrow a=3$

$2b=4 \rightarrow b=2$

فاصله‌ی کانونی

$c^2=a^2-b^2=3^2-2^2=5 \rightarrow c=\sqrt{5}$ $\quad FF'=2\sqrt{5}$

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

$O\Big|_{5}^{4}$ $\quad F\Big|_{5}^{4+\sqrt{5}}$ $\quad F'\Big|_{5}^{4-\sqrt{5}}$ $\quad A\Big|_{5}^{4+3=7}$ $\quad A'\Big|_{5}^{4-3=1}$ بیضی افقی

$B\Big|_{5+2=7}^{4}$ $\quad B'\Big|_{5-2=3}^{4}$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

خروج از مرکز

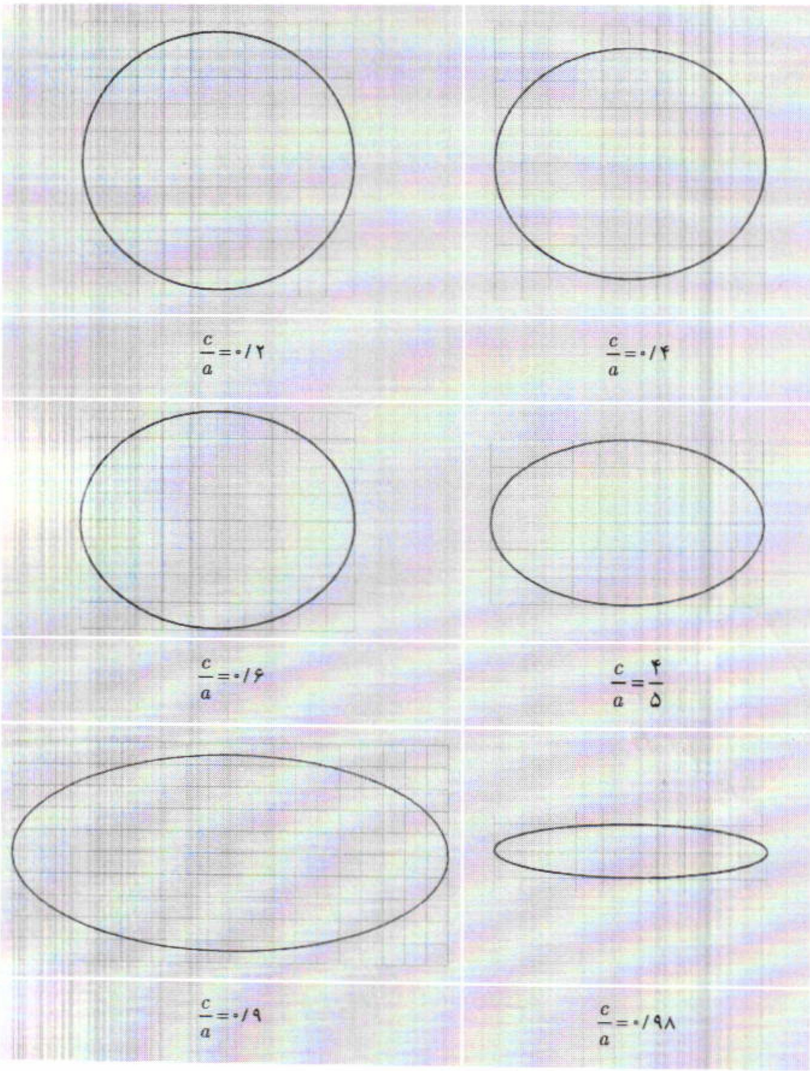
همان‌طور که دیدید اندازهٔ قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی یک بیضی مقادیری به هم وابسته‌اند. بدیهی است که همیشه مقدار a از مقدار b و c بیشتر است (چرا؟). فاصله کانون تا کانون کوچکتر از فاصله مرکز تا رأس است. ← چون $c<a$
اندازه‌های a، b و c بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره $\frac{c}{a}$ مقداری بین ۰ و ۱ است. (چرا؟). هر چه نسبت $\frac{c}{a}$، بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

$\frac{c}{a}\to 0 \to c\simeq 0 \Rightarrow a\simeq b$
بیضی به دایره شبیه میشود

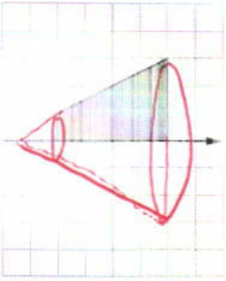
مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

$\frac{c}{a}\to 1 \Rightarrow c\simeq a,\ b\to 0$
بیضی به پاره خط شبیه شود

در ادامه چند بیضی با مقادیر مختلف e رسم شده است. تأثیر اندازهٔ خروج از مرکز را بر شکل بیضی بررسی کنید. اگر خروج از مرکز بیضی به عدد یک نزدیک شود شکل بیضی به پاره خط شبیه میشود.



تمرین

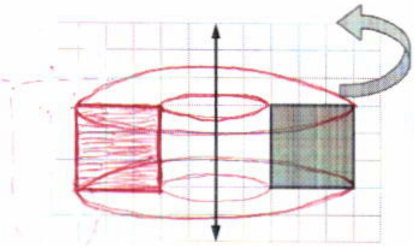


۱ در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید. $V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 6 - \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 2 = \frac{52}{3}\pi$

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟ ذوزنقه

$S = \frac{1}{2}(2+6) \times 4 = 16$



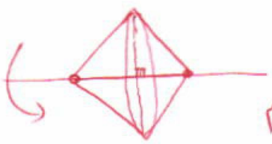
۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

$V = \pi(5)^2 \times 3 - \pi(2)^2 \times 3 = 75\pi - 12\pi = 63\pi$

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید. حجم استوانهٔ بزرگ − حجم استوانهٔ کوچک = حجم شکل

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

یک دایره توخالی شعاع خارجی ۵ و شعاع داخلی ۲



۳ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

جسم حاصل دو مخروط هم قاعده و با حجم مساوی است. لذا

حجم $V = 2\left(\frac{\pi}{3} \times 2^2 \times 3\right) = 8\pi$

$x_F = x_{F'}$ بیضی قائم است

۴ کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است. فاصله کانونی $FF' = 8 = 2c \longrightarrow c = 4$

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$

$BB' = 4\sqrt{5}$ اندازه قطر کوچک

ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

مرکز $\left| \begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3+(-5)}{2} = -1 \end{array} \right.$ $x = 1$ معادله قطر بزرگ، $y = -1$ معادله قطر کوچک

خروج از مرکز $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

۵ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$، مرکز آن $(-4 , -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a$ $\quad BB' = 2b \to b = 3$

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

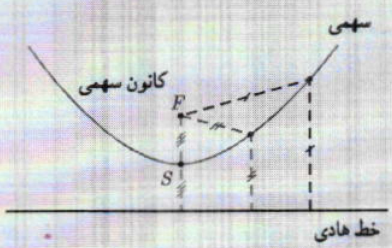
$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \frac{16}{25}a^2 = a^2 - 9 \Rightarrow a = 5 \to c = 4$

$AA' = 2a = 2(5) = 10$ طول قطر کانونی $\quad FF' = 2c = 8$ فاصله کانونی

ب) $F \left| \begin{array}{l} -4+4=0 \\ -1 \end{array} \right.$ $F' \left| \begin{array}{l} -4-4=-8 \\ -1 \end{array} \right.$ $A \left| \begin{array}{l} -4+5=1 \\ -1 \end{array} \right.$ $A' \left| \begin{array}{l} -4-5=-9 \\ 0 \end{array} \right.$ $B \left| \begin{array}{l} -4 \\ -1+3=2 \end{array} \right.$ $B' \left| \begin{array}{l} -4 \\ -1-3=-4 \end{array} \right.$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

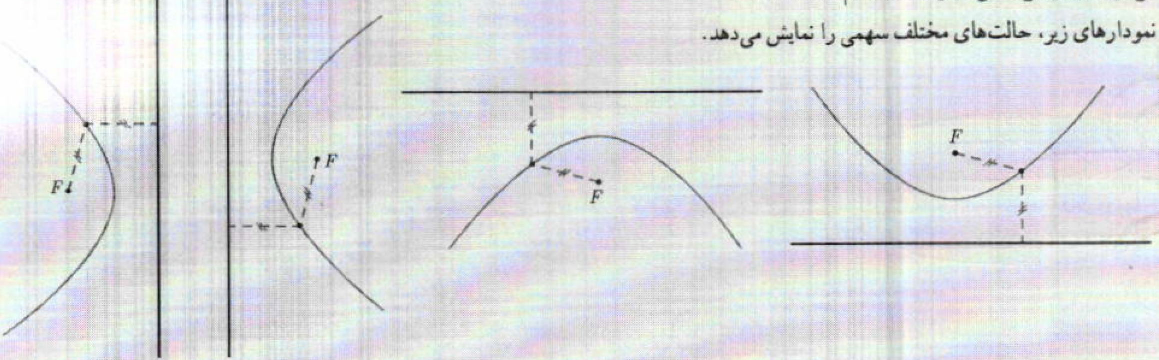
خواندنی

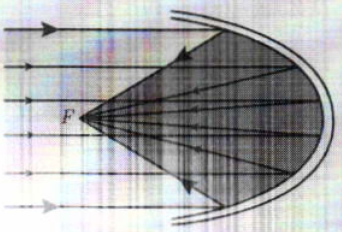


در سال‌های گذشته با معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ ؛ $a\neq 0$ آشنا شدید و نمودار آن را سهمی نامیدید.
سهمی به بیان دقیق‌تر، مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت داده شده در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابت غیر واقع بر آن خط و در همان صفحه، به یک فاصله است. این نقطهٔ ثابت را **کانون سهمی** و خط ثابت را **خط هادی سهمی** می‌نامند.

شکل مقابل یک سهمی را نمایش می‌دهد. همان‌طور که می‌بینید تمام نقاط روی سهمی از نقطهٔ ثابت F و خط هادی فاصله‌ای برابر دارند. اگر از نقطهٔ F به خط هادی عمود کنیم، محل تقاطع خط عمود و سهمی، نقطه‌ای است که به آن **رأس سهمی** می‌گویند و در این شکل آن را S نامیده‌ایم.

نمودارهای زیر، حالت‌های مختلف سهمی را نمایش می‌دهد.

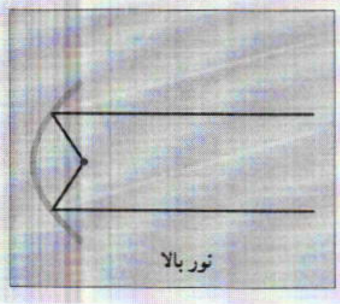


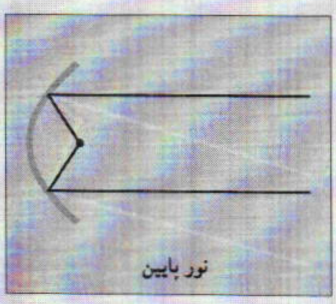


سهمی‌ها ویژگی جالبی دارند که در ساخت آینه‌های سهموی، تلسکوپ‌ها، چراغ‌های جلوی اتومبیل، آنتن‌های سهموی رادار و گیرنده‌های بشقابی تلویزیون کاربرد دارد. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد می‌کنند، موازی با محور سهمی (عمود بر خط هادی) خارج می‌شوند و بالعکس، پرتوهایی که موازی با محور سهمی به آن می‌تابند، دقیقاً از کانون سهمی می‌گذرند.

به عنوان مثال معمولاً جدارهٔ پشت لامپ خودروها، آینه‌ای به شکل سهمی است. چراغ خودرو دقیقاً در کانون این سهمی قرار داده می‌شود و بدین ترتیب شعاع‌های نور بعد از برخورد با جدارهٔ آینه‌ای به‌صورت پرتوهای موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری را موجب می‌شوند.

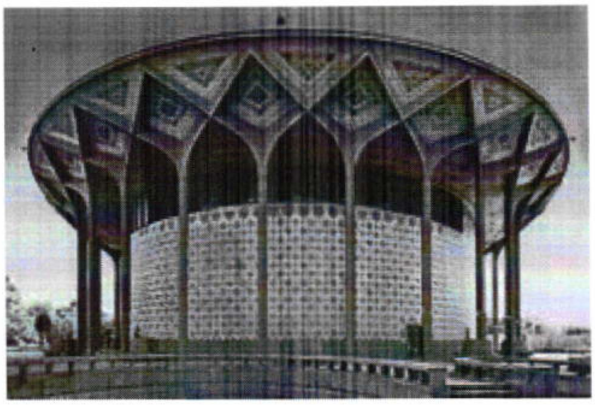
جابه‌جایی اندک لامپ در راستای عمودی، باعث خروج پرتوهای نور رو به بالا یا رو به پایین می‌شود که اصطلاحاً به آن نور بالا یا نور پایین گفته می‌شود.


نور بالا

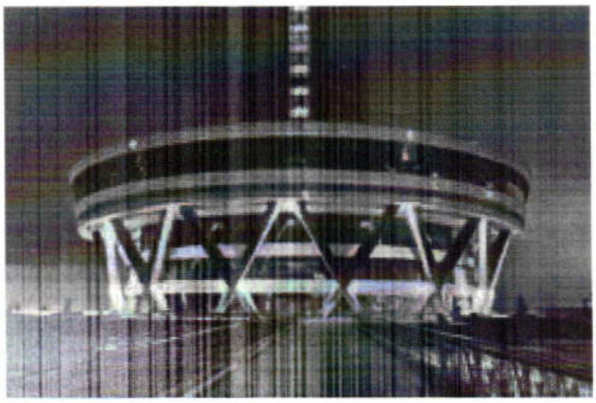

نور پایین

درس دوم

دایره



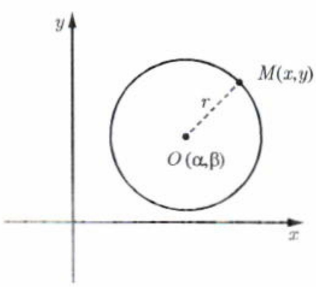
زیربنای دایره‌ای شکل مجموعه تئاتر شهر، تهران



زیربنای برج میلاد با نقشهٔ دایره‌ای شکل به قطر ۶۶ متر

دایره یکی از شکل‌های مهم هندسی است که با تعریف و برخی ویژگی‌های آن در سال‌های قبل آشنا شده‌اید. می‌دانیم دایره، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطهٔ ثابت را **مرکز دایره** و مقدار ثابت را **اندازهٔ شعاع دایره** می‌نامیم. دایرهٔ C را به مرکز O و شعاع r معمولاً با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

در این درس به تحلیل برخی از ویژگی‌های دایره در دستگاه مختصات خواهیم پرداخت.



دایرهٔ $C(O,r)$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که مرکز آن نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ و نقطهٔ $M(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی روی آن باشد. می‌دانیم که فاصلهٔ مرکز دایره از تمام نقاط روی آن برابر با مقدار ثابت r است.

بنابراین به کمک رابطهٔ فاصلهٔ دو نقطه که در سال‌های گذشته با آن آشنا شدیم، داریم :

$$OM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

از طرفی $OM=r$

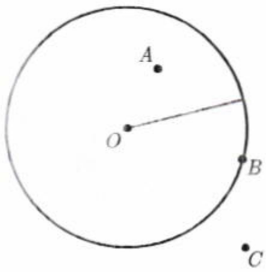
$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

رابطهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن **معادلهٔ استاندارد دایره** می‌گوییم.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت



می‌توان دید که :

الف) اگر نقطه‌ای مثل B **روی دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است، یعنی $OB=r$

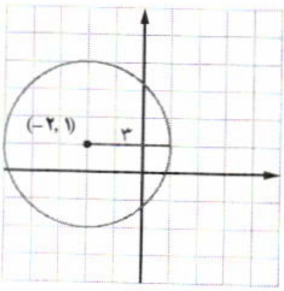
ب) اگر نقطه‌ای مثل A **درون دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره ...کمتر از... شعاع دایره است، یعنی $OA \boxed{<} r$

پ) اگر نقطه‌ای مثل C **بیرون دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره ...بیشتر از... شعاع دایره است، یعنی $OC \boxed{>} r$

بدین‌ترتیب اگر معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت نقاط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد :

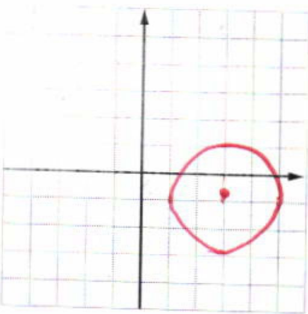
> نقاطی که در معادلهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ صدق کنند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.
>
> مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲<r^۲$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که درون دایره واقع شده‌اند
>
> مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲>r^۲$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که خارج دایره واقع شده‌اند

مثال :



الف) اگر مرکز دایره‌ای نقطهٔ (۱ ,۲-) و شعاع آن ۳ باشد، معادلهٔ استاندارد دایره به شکل زیر خواهد بود :

$$(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$$



ب) اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$ باشد، مختصات مرکز آن (۱-,۳) و اندازهٔ شعاع برابر با ۲ است.

O(۳,-۱)

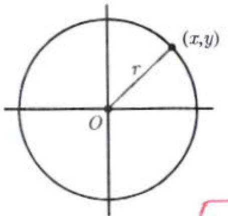
رسم شکل برعهدهٔ دانش‌آموزان است.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس

۱ در حالت‌های زیر، معادلهٔ دایره را بنویسید :



الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲. $x^2+y^2=4$

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r. $x^2+y^2=r^2$

پ) دایره‌ای که از نقطهٔ (۳-،۱) بگذرد و مرکز آن (۱-،۲) باشد.
$\alpha \ \beta$

$r=\sqrt{(2-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{5}$

$(x-1)^2+(y+3)^2=5$

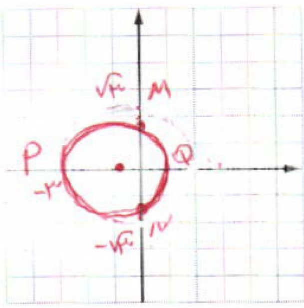
$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

۲ با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید :

نقاط			شعاع و مختصات مرکز دایره	معادلهٔ دایره
$C(-2,4)$ درون دایره	$B(0,3)$ روی دایره	$A(1,1)$ خارج دایره		
$(-2+2)^2+(4-3)^2<4$	$(0+2)^2+(3-3)^2=4$	$(1+2)^2+(1-3)^2>4$	$O(-2,3)$ $r=2$	$(x+2)^2+(y-3)^2=4$
بیرون دایره $(-2-1)^2+(4+2)^2>9$	بیرون دایره $(0-1)^2+(3+2)^2>9$	روی دایره $(1-1)^2+(1+2)^2=9$	دایره به مرکز (۲-،۱) و شعاع ۳	$(x-1)^2+(y+2)^2=9$

۳ اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x+1)^2+y^2=4$ باشد :

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید. $O(-1,0)$ $r=2$



ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

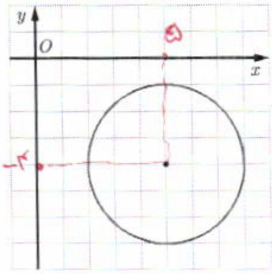
$x=0 \rightarrow 1+y^2=4 \rightarrow y=\pm\sqrt{3}$ $N(0,-\sqrt{3})$ $M(0,\sqrt{3})$

$y=0 \rightarrow (x+1)^2=4 \rightarrow x+1=2 \rightarrow x=1$ $Q(1,0)$

$x+1=-2 \rightarrow x=-3$ $P(-3,0)$

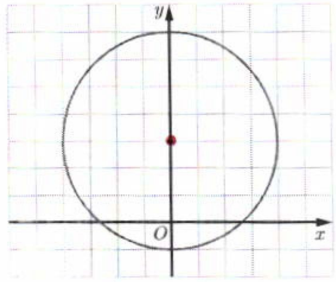
پ) شکل این دایره را رسم کنید و صحت پاسخ‌های خود را به کمک شکل بررسی کنید.

۴ معادلهٔ دایره‌های زیر را بنویسید :



$r=3$ $O(5,-4)$

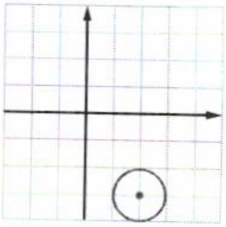
$(x-5)^2+(y+4)^2=9$



$r=4$ $O(0,3)$

$x^2+(y-3)^2=16$

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره



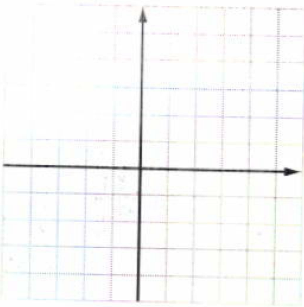
معادلهٔ دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ را در نظر بگیرید.

این معادله را به کمک اتحادها می‌توان به شکل زیر ساده کرد :

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=1$$
$$\to x^2+y^2-4x+6y+12=0$$

این رابطه را معادلهٔ گستردهٔ دایره یا معادلهٔ ضمنی دایره می‌نامیم.

بدیهی است که معادلهٔ استاندارد دایره و معادلهٔ گستردهٔ آن به یکدیگر قابل تبدیل‌اند.



مثال : فرض کنید معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ باشد. با استفاده از مربع کامل کردن، سعی می‌کنیم معادلهٔ گسترده را به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنیم. داریم :

$$x^2+y^2-6x+2y+6=0$$
$$\to (x^2-6x)+(y^2+2y)+6=0$$
$$\to (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0$$
$$\to (x-3)^2+(y+1)^2=4$$

مختصات مرکز و شعاع این دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$r=2 \qquad O(3,-1)$

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره را به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم. با تبدیل x^2+ax و y^2+by به دو مربع کامل داریم :

$$(x^2+ax)+(y^2+by)+c=0$$

$$\to \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c=0$$

$$\to \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

بدین ترتیب :

> اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ **معادلهٔ گستردهٔ** یک دایره باشد، **مختصات مرکز** این دایره $O\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ است. شعاع این دایره برابر است با : $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

بدیهی است که با توجه به مثبت بودن r، معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر رابطهٔ $a^2+b^2>4c$ برقرار باشد. (چرا؟)

$a^2+b^2-4c>0 \longrightarrow a^2+b^2>4c$ تا اینکه $r>0$ شود.

کار در کلاس

معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن‌را پیدا کنید و معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=-\frac{-2}{2}=1 \\ -\frac{b}{2}=-\frac{-6}{2}=3 \end{array}\right.$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$

$x^2+y^2-2x-6y+6=0 \longrightarrow x^2-2x+1+y^2-6y+9=10-6$

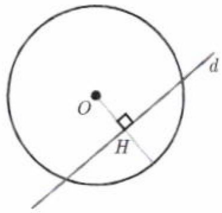
$\Longrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$ معادلهٔ استاندارد

اوضاع نسبی خط و دایره

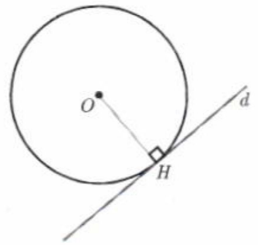
در سال‌های گذشته به طور شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره آشنا شده‌اید. در این فعالیت قصد داریم به کمک معادلهٔ دایره و خط، این مفاهیم را مرور کنیم.

دایره $C(O,r)$ را در صفحه در نظر بگیرید. با توجه به شکل، به سادگی می‌توان دید که خط و دایره می‌توانند **یک**، یا **دو** نقطهٔ اشتراک داشته، یا **هیچ** نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

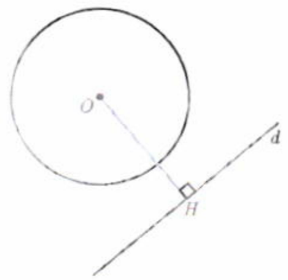
اگر خط d با دایره متقاطع باشد، $OH<r$ است.



اگر خط d بر دایره مماس باشد، $OH=r$ است.



اگر خط d، دایره را قطع نکند، $OH>r$ است.



یادآوری

۱ــ خط مماس در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲ــ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

در حالتی که معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت خطوط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد.

مثال:

وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.

حل:

کافی است فاصلهٔ مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازهٔ آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم.

مرکز دایره از رابطهٔ $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$، نقطهٔ $(1,0)$ و شعاع دایره از رابطهٔ $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ برابر است با ۲.

از طرفی فاصلهٔ مرکز دایره از خط داده شده برابر است با $d=\frac{|1(1)+1(0)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ و از آنجا که این مقدار از شعاع دایره کمتر است، پس می‌توان چنین نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

کار در کلاس

$x^2+2x+1+y^2+2y+1=3 \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=3$

۱ در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) دایرهٔ $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ و خط $x+y=1$

$O\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix} \quad r=\sqrt{3} \qquad d=\dfrac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow d>r$ خط و دایره نقطهٔ مشترک ندارند

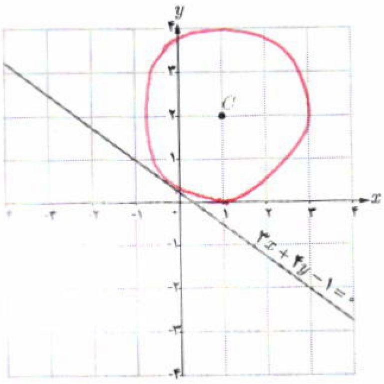
ب) دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$

$O\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix} \quad r=2 \qquad d=\dfrac{|-3+1|}{\sqrt{0+1}}=2 \Rightarrow d=2$

$\Rightarrow d=r$

خط بر دایره مماس است.

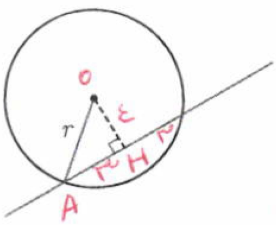
۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1,2)$ باشد.



$d=\dfrac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{10}{5}=2 \xrightarrow{d=r} r=2$

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

۳ مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.



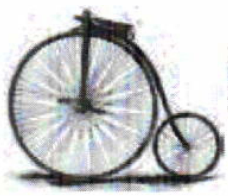
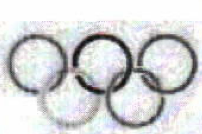
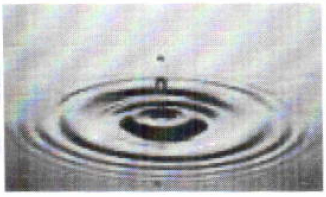
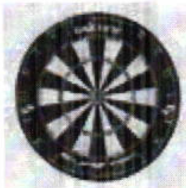
$d=\dfrac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{20}{5}=4$

$\overset{\triangle}{OAH}: \ r^2=4^2+3^2=25 \rightarrow r=5$

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$ معادله دایره

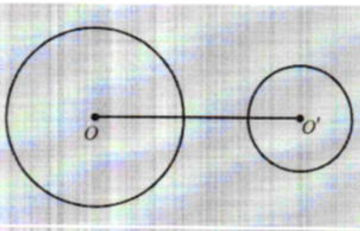
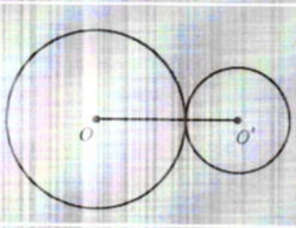
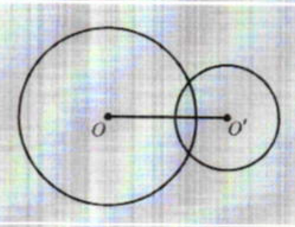
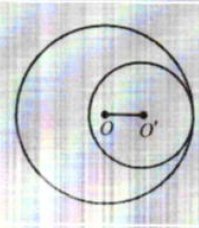
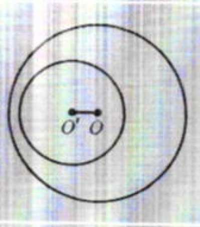
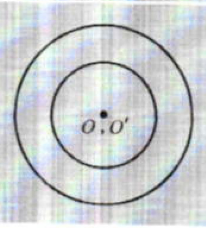
اوضاع نسبی دو دایره

نظیر آنچه برای اوضاع نسبی نقطه و دایره و همین‌طور خط و دایره دیدید، قصد داریم ابتدا به طور شهودی وضعیت‌های مختلفی را که دو دایرهٔ دلخواه می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، مشخص کنیم و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر، در صفحه مختصات و با داشتن معادلهٔ دو دایره بررسی کنیم.


دو دایرهٔ دلخواه $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را با فرض $r>r'$ در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر مورد، رابطهٔ بین اندازهٔ شعاع‌های دو دایره با اندازهٔ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره بیان شده است.

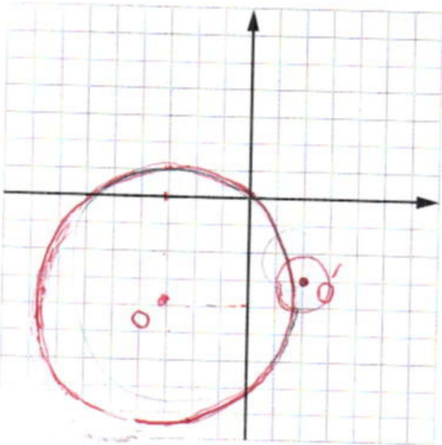
پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به‌هم وصل می‌کند، خط‌المرکزین نامیده می‌شود. در اینجا اندازهٔ خط‌المرکزین را با d نمایش داده‌ایم.

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d>r+r'$	
دو دایره مماس بیرون	$d=r+r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r-r'<d<r+r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d=r-r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d<r-r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d=۰$	

در حالتی که معادلهٔ دو دایره را داشته باشیم، بدون رسم دو دایره می‌توانیم وضعیت آنها را نسبت به هم مشخص کنیم.

مثال : وضعیت دو دایرهٔ $x^2+y^2+6x+8y=0$ و $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

حل : به کمک آنچه دیدیم، ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را پیدا می‌کنیم و سپس با مقایسه مقادیر مجموع و تفاضل دو شعاع با طول خط‌المرکزین، وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم.



در دایرهٔ $x^2+y^2+6x+8y=0$ با پیدا کردن مرکز دایره و اندازهٔ شعاع داریم : مرکز دایره نقطهٔ $O(-3,-4)$ و اندازهٔ شعاع برابر ۵ است.

به روش مشابه در دایرهٔ $x^2+y^2-4x+6y+12=0$، مرکز دایره نقطهٔ $O'(2,-3)$ و اندازهٔ شعاع $r'=1$ است.

از طرفی طول خط‌المرکزین برابر است با : $OO'=\sqrt{(-3-2)^2+(-4+3)^2}=\sqrt{26}$

بنابراین از آنجا که داریم : $5-1<\sqrt{26}<5+1$ یعنی $r-r'<d<r+r'$ پس دایره‌های فوق، متقاطع هستند.

رسم دو دایره و بررسی صحت پاسخ به کمک شکل، به دانش‌آموزان واگذار شده است.

کار در کلاس

۱) با انجام مراحل زیر، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطهٔ $O(2,-2)$ باشد :

ـ مختصات نقطهٔ O'، مرکز دایرهٔ داده شده عبارت است از : $O'|^{-1}_{2}$ .... $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$

ـ اندازهٔ r' یعنی شعاع دایره داده شده برابر است با : .... $r'=3$

ـ طول OO' برابر است با : .... $OO'=\sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2}=5$

ـ شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که : $5=r+3$ پس شعاع r باید برابر ۲ باشد.

ـ معادلهٔ دایرهٔ مطلوب را با معلوم بودن اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید : $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

مرکز $O|^{\alpha}_{\beta}$

۲) برای حالت‌های زیر معادلهٔ دو دایره را بنویسید و پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R'^2$

الف) دو دایره هم‌مرکز باشند. $OO'=0$

ب) دو دایره بیرون هم باشند. $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ ، $x^2+y^2=1$

۳) برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2-2x+4y=0$ و $x^2+y^2+2x-4y=0$

$O|^{1}_{-2}$ $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$

$O'|^{-1}_{2}$ $r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$

$OO'=r+r' \longrightarrow$ ۲ دایره مماس خارج

ب) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

$O|^{-1}_{2}$ $O'|^{+1}_{-2}$ $r=1$ $r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=2$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5} \longrightarrow OO'>r+r'$

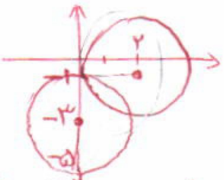
۲ دایره متخارج‌اند

(الف) $\begin{cases} x=0 \to y^2+2y+1=0 \to (y+1)^2=0 \to y=-1 \\ y=0 \to x^2-6x+1=0 \xrightarrow{\Delta=36-4=32} \begin{cases} x_1=\frac{6+4\sqrt{2}}{2}=3+2\sqrt{2} \\ x_2=\frac{6-4\sqrt{2}}{2}=3-2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} x=0 \to (y+3)^2=4 \to y+3=\pm 2 \to y_1=-1 \;,\; y_2=-5 \\ y=0 \to x^2+9-4=0 \to x^2=-5 \end{cases}$ ریشه ندارد.

تمرین

۱) در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کمک رسم دایره بررسی کنید.



الف) $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ $\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-4}=3 \quad O\,|\,{}^{3}_{-1}$

ب) $x^2+(y+3)^2-4=0$ $\quad r'=2 \quad O'\,|\,{}^{0}_{-3}$

۲) در حالت‌های زیر معادلهٔ دایره را بنویسید:

$OC=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}=r \qquad (x-2)^2+(y+1)^2=5$

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2,-1)$ باشد.

$CA=\sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2}=13=r \qquad (x-2)^2+(y-3)^2=169$

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2,3)$ و نقطهٔ $(-3,-9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

وسط $C\left(\frac{0+(-4)}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(-2,1)$ $\quad 2r=\sqrt{(-4-0)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2} \to r=2\sqrt{2} \quad (x+2)^2+(y-1)^2=8$

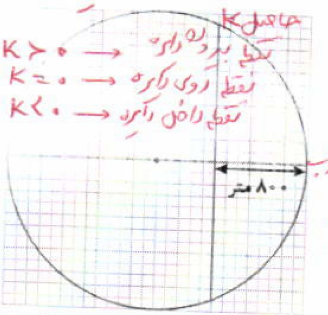
پ) دایره‌ای که نقاط $(0,3)$ و $(-4,-1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

۳) وضعیت نقاط $(0,1)$، $(0,-1)$، $(-1,-2)$ و $(0,0)$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مشخص کنید. با جایگذاری در معادله دایره تعیین

روی دایره، داخل دایره، روی دایره، خارج دایره

$K>0 \to$ نقطه بیرون دایره
$K=0 \to$ نقطه روی دایره
$K<0 \to$ نقطه داخل دایره

۴) شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13,13)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد:



$(x-13)^2+(y-13)^2=169 \qquad x=18 \Rightarrow 25+(y-13)^2=169$

$(y-13)^2=144 \Rightarrow y-13=12 \to y=25 \;;\; y-13=-12 \to y=1$

الف) معادلهٔ این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید. $\quad A\,|\,{}^{18}_{1} \quad B\,|\,{}^{18}_{25}$

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

ت) $AB=25-1=24$ یا ۲۴۰۰ متر

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

۵) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید و معادلهٔ آن را به شکل استاندارد بنویسید.

$O\,|\,{}^{-1}_{-1} \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+32}=\sqrt{10} \qquad (x+1)^2+(y+1)^2=10$

(الف) $O\,|\,{}^{2}_{2} \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{16+16-28}=1 \qquad d=\left|\frac{6(2)+4(2)}{\sqrt{36+16}}\right|=\frac{20}{\sqrt{52}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$

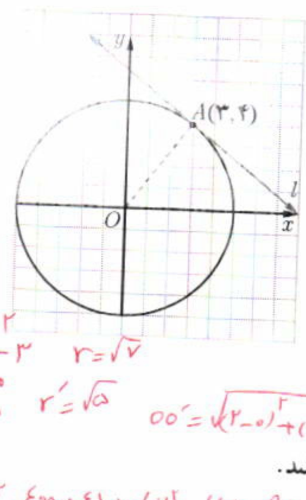
۶) وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

$d>r$ خط و دایره نقطهٔ مشترک ندارند

الف) $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ و $6x+4y=0$ غیرمتقاطع

(ب) $O\,|\,{}^{0}_{0} \quad r=\sqrt{2} \quad d=\frac{|0+0+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \quad d=r=\sqrt{2}$ خط بر دایره مماس است

ب) $x^2+y^2=2$ و $y=-x-2$



۷) اگر بدانیم خط l در نقطه $(3,4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادلهٔ خط مماس چیست؟

$OA=\sqrt{9+16}=5=r \qquad x^2+y^2=25$

$m_{OA}=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3} \qquad m'=-\frac{3}{4} \qquad A\,|\,{}^{3}_{4} \qquad y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$

۸) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطهٔ $(3,0)$ و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد.

$d=\frac{|3(0)-4(3)-3|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3 \qquad (x-0)^2+(y-3)^2=9$

۹) مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(الف) $x^2+y^2-2x+4y=4$ و $x^2+y^2+2x-4y=9$

$O\,|\,{}^{1}_{-2} \quad O'\,|\,{}^{-1}_{2} \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3 \quad r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+36}=\sqrt{14}$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5} \qquad r-r'<OO'<r+r'$ متقاطعند

(ب) $O\,|\,{}^{2}_{-3} \quad r=\sqrt{7} \qquad O'\,|\,{}^{0}_{5} \quad r'=\sqrt{5}$

(ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=7$ و $x^2+(y-5)^2=5$

$OO'=\sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2}=2\sqrt{17} \Rightarrow OO'>r+r'$ متخارجند

۱۰) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1,-1)$ و با دایرهٔ $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.

$(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=3+4+9 \to (x-2)^2+(y-3)^2=4^2$

$O\,|\,{}^{2}_{3} \quad r=4 \quad O'\,|\,{}^{-1}_{-1} \quad d=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{9+16}=5$

$d=r+r' \Rightarrow 5=r-4 \to r=9 \qquad (x+1)^2+(y+1)^2=81$