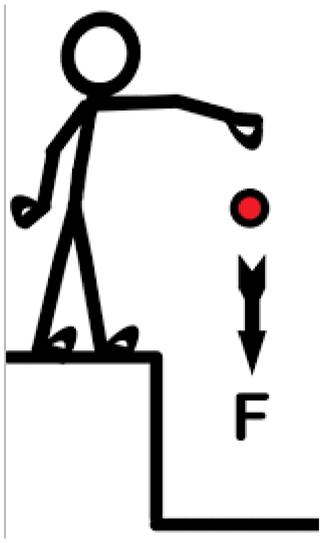
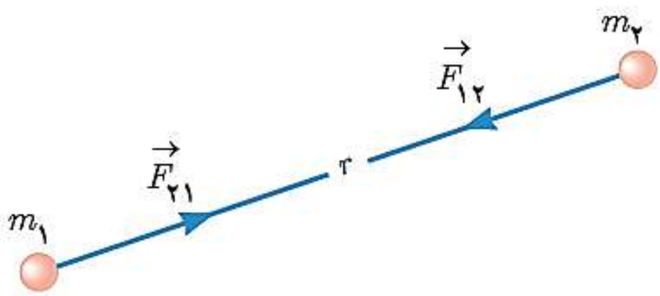
وقتی جسمی را که در دست گرفته اید، رها می کنید، چرا روی زمین می افتد؟ طبق قانون اول نیوتون اجسام در حال سکون تا زمانی که نیرویی به آنها وارد نشود، ساکن می مانند. پس نیرویی به جسم وارد شده است که باعث حرکت جسم شده است. این نیرو، نیرویی است که زمین به جسم وارد نموده و جسم را جذب کرده است. هر جسمی در عالم، اجسام دیگر را به خود جذب می کند. به این جاذبه، نیروی گرانشی می گویند.



قانون گرانشی نیوتون

اندازه نیروی گرانشی میان دو ذره، متناسب با جرم دو ذره است و با مجذور فاصله بین آنها، رابطه عکس دارد.



$$F_{12} = F_{21} = F = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$

در این رابطه G ثابت جهانی گرانش است و اندازه آن برابر است با:

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2$$

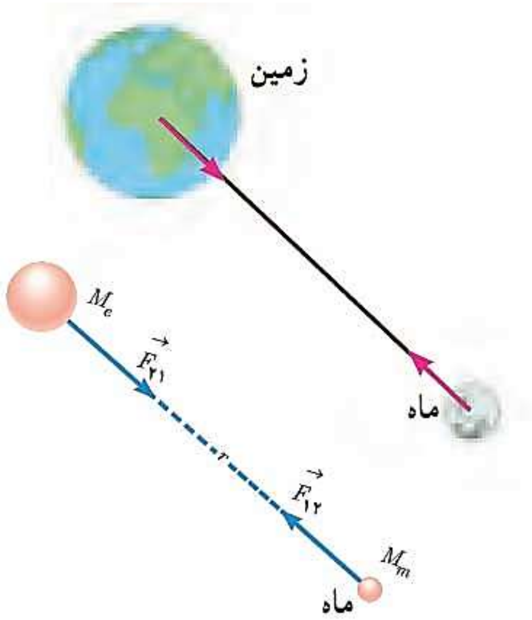
نکته: اگر فاصله دو جسم از یکدیگر در برابر ابعاد دو جسم بسیار بزرگتر باشد، می توان دو جسم را ذره فرض کرد. در غیر اینصورت باید فاصله مرکز اجسام از یکدیگر را در نظر گرفت.

همه اجسام به هم نیرو وارد می کنند پس سیارات و اجرام آسمانی هم به هم نیرو وارد می کنند. مثلا زمین به ماه نیرو وارد می کند. مثل سنگی که از دست ما رها می شود و به زمین می افتد، ماه هم باید روی زمین بیفتد اما چرا نمی افتد؟ به علت سرعت حرکتی که دارد. به عبارت دیگر ماه در حال حرکت با سرعت معینی در فضا است. زمین به ماه نیرو وارد می کند و باعث تغییر بردار سرعت می شود. اگر اندازه نیروی گرانشی که زمین به ماه وارد می کند به اندازه ای باشد که بتواند نیروی مرکزگرای ماه که با سرعت v حرکت می کند را تامین کند، ماه به دور زمین حرکت دایره ای می کند. نیروی گرانشی زمین باعث حرکت دایره ای ماه دور زمین می شود. اگر این نیروی گرانشی نبود، ماه در فضا به صورت مستقیم حرکت می کرد.

البته از نظر تاریخی روند کشف نیروی جاذبه برعکس چیزی بود که در بالا گفته شد. یعنی اخترشناسان، رصدهای دقیقی از حرکت ماه و سیارات داشتند و متوجه شده بودند که آنها در مدار دایره ای در حال حرکت هستند. بعد نیوتون استدلال کرد که نیرویی که باعث حرکت دایره ای ماه به دور زمین می شود، همان نیرویی است که سیب را به سمت زمین جذب می کند. و قانون گرانش خود را اعلام نمود.

مثال1:

جرم زمین و ماه به ترتیب حدود 5.98×10^{24} kg و 7.36×10^{22} kg و فاصله متوسط آنها از یکدیگر حدود 3.84×10^{8} m است. نیروی گرانشی را که زمین و ماه به یکدیگر وارد می کنند را بیابید.



پاسخ:

رابطه نیروی گرانشی بین دو جسم به صورت زیر است:

$$F_{21} = F_{12} = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

$$= 6.67\times10^{-11}\ N.\frac{m^2}{kg^2}\times\frac{5.98\times10^{24}kg\times7.36\times10^{22}kg}{(3.84\times10^{8}m)^2} =$$

$$F_{21} = F_{12} = 1.99\times10^{20}N$$

این نیرو باعث چرخش ماه به دور زمین می شود.

مثال2:

دو کره همگن به جرم های 80kg و 120 kg را در نظر بگیرید که فاصله مرکز آنها از یکدیگر 1m است. نیروی گرانشیی را که این دو کره بر یکدیگر وارد می کنند محاسبه کنید.

پاسخ:

$$F_{21} = F_{12} = G\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

$$= 6.67 \times 10^{-11}\ N.\frac{m^2}{kg^2} \times \frac{80kg \times 120kg}{(1m)^2} = 6.4 \times 10^{-7} N$$

همانطور که این محاسبه نشان می دهد، نیروی گرانشی بین اجسام با جرم کوچک، بسیار کوچک و قابل چشم پوشی است. مقدار نیروی گرانشی در برابر 3 نیروی دیگر در طبیعت (نیروی الکترومغناطیسی، نیروی هسته ای ضعیف، نیروی هسته ای قوی) بسیار کوچک تر است.

وزن و نیروی گرانشی

وزن یک جسم بر روی زمین برابر با نیروی گرانشی است که زمین بر جسم وارد می کند. اگر جرم زمین M_e و شعاع زمین R_e جرم جسم برابر با m باشد وزن جسم بر روی سطح زمین به صورت زیر است:

$$W = G\frac{M_e m}{{R_e}^2}$$

نیروی گرانشی که از طرف زمین به جسم دلخواه با جرم m وارد می شود به صورت زیر است. از طرفی طبق قانون دوم نیوتون داریم F=ma ، پس می توان شتاب گرانشی زمین را از رابطه زیر بدست آورد.

$$F = G\frac{M_e m}{{R_e}^2} = ma \rightarrow g_{\text{گرانشی}} = G\frac{M_e}{{R_e}^2}$$

اگر مقادیر را در این رابطه وارد کنیم، شتاب گرانشی در سطح زمین می شود.

$$g_0 = G\frac{M_e}{{R_e}^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{5.98 \times 10^{24}}{(6400 \times 10^3)^2} \approx 9.8\, N/kg$$

شتاب گرانشی در سطح هر سیاره را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

اگر به اندازه h از سطح یک سیاره دور شویم، شتاب گرانشی در آن مکان از رابطه زیر بدست می آید.

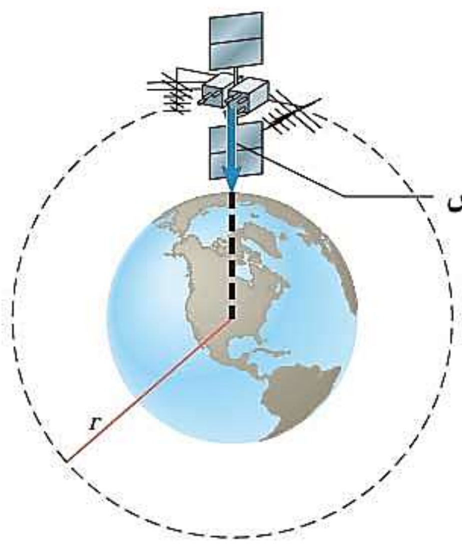
$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

همچنین می توان شتاب گرانشی در ارتفاع h از سطح زمین را با نسبت زیر بدست آورد.

$$\frac{g}{g_0} = \frac{{R_e}^2}{(R_e+h)^2}$$

مثال3:

ماهواره ها در اثر نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره، روی مدار تقریبا دایره ای به دور زمین می چرخند. اگر جرم ماهواره 200kg و فاصله آن از سطح زمین 2600km باشد، کمیت های زیر را محاسبه کنید:



الف)نیروی گرانشی بین ماهواره و زمین

ب) تندی مداری ماهواره

پ)دوره گردش ماهواره

$$(G = 6.67 \times 10^{-11}\ N.\frac{m^2}{kg^2} \quad \text{و}\ M_{\text{زمین}} = 5.98 \times 10^{24}\ kg \quad \text{و} \quad R_{\text{زمین}} = 6400km)$$

پاسخ:

الف) نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره از رابطه زیر به دست می آید:

$$F_{21} = F_{12} = G\frac{M_1M_2}{r^2}$$

فاصله ماهواره از مرکز زمین برابر با فاصله از سطح زمین به علاوه شعاع زمین است بنابر این:

$$r = (6400 + 2600)km = 9000km = 9 \times 10^6 m$$

$$= 6.67 \times 10^{-11}\ N.\frac{m^2}{kg^2} \times \frac{5.98 \times 10^{24}kg \times 200kg}{(9 \times 10^6 m)^2} = 985N$$

ب) ماهواره به دور زمین حرکت دایروی می کند بنابر این نیروی گرانشی زمین، نیروی مرکزگرای لازم را تامین می کند پس برای به دست آوردن سرعت ماهواره به صورت زیر عمل می کنیم:

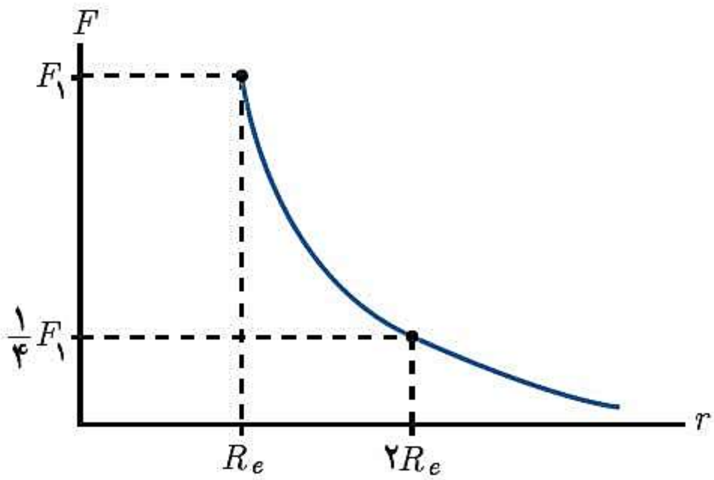
$$F = \frac{mv^2}{r} \to 935N = \frac{(200kg) \times v^2}{9 \times 10^6 m} \to v = 6.66 \times 10^3\frac{m}{s}$$

ج) با داشتن سرعت چرخش ماهواره، میتوانیم دوره گردش ماهواره را بیابیم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \to T = \frac{2 \times 3.14 \times 9 \times 10^6 m}{6.66 \times 10^3\frac{m}{s}} = 8.49 \times 10^3 s = 2.36h$$

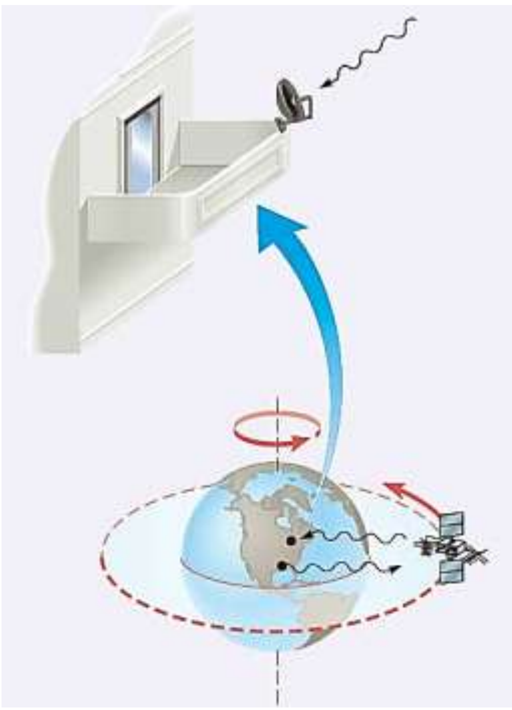
یعنی ماهواره هر 2.36 ساعت یکبار به دور زمین می گردد.

بیشترین نیروی گرانشی وارد بر ماهواره در سطح زمین به آن وارد می شود. هر چه ماهواره از سطح زمین دورتر شود، نیروی گرانشی کاهش می یابد. می توان نمودار نیروی گرانشی وارد بر ماهواره بر حسب فاصله را به صورت زیر رسم کرد.



مدار همگام با زمین و ماهواره های مخابراتی

از دیدگاه مخابراتی، باقی ماندن ماهواره در یک محل نسبت به مکانی در روی زمین(مثلا بالای ایران) امتیاز محسوب می شود. این در صورتی رخ می دهد که دوره گردش ماهواره به دور زمین با مدت زمان یک دور چرخش زمین به دور خودش یعنی 24h یکسان باشد.



مثال 4:

الف) در چه فاصله ای از زمین می توان این مدار همگام با زمین را یافت؟

ب) تندی مداری این ماهواره چقدر است؟

پاسخ:

میدانیم:

$$F_{12} = G\frac{M_e m}{r^2}$$

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad \text{و} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

بنابر این:

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 \times m \times r^2}{r \times T^2} = \frac{4\pi^2 \times m \times r}{T^2}$$

$$\rightarrow G\frac{M_e m}{r^2} = \frac{4\pi^2 \times m \times r}{T^2} \rightarrow r = \sqrt[3]{G\frac{M_{\text{زمین}}T^2}{4\pi^2}} = 4.22 \times 10^7 m$$

ب) برای به دست آوردن سرعت به صورت زیر عمل می کنیم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 4.22 \times 10^7 m}{24 \times 3600 s} = 3.07 \times 10^7\ m/s$$

در قسمت الف سوال بالا به رابطه ی بین دوره تناوب و فاصله از مرکز زمین رسیدیم که به قانون سوم کپلر معروف است.

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_e}\right) \times r^3$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

همچنین می توان تندی خطی ماهواره را با استفاده از دینامیک حرکت دایره ای به صورت زیر محاسبه کرد.

$$F = G\frac{M_e m}{r^2} \quad \text{و} \quad F = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_e m}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = (\frac{r_1}{r_2})^{\frac{1}{2}}$$

تمرین ها

تمرین 1: تلسکوپ فضایی هابل با تندی 7560 m/s گرد زمین می چرخد.

الف)فاصله این تلسکوپ از سطح زمین چند کیلومتر است؟

ب)وزن این تلسکوپ در این ارتفاع چند برابر وزن آن در سطح زمین است؟

پ)دوره تناوب این تلسکوپ را پیدا کنید.(R_e=6380km)

پاسخ:

الف:

$$F_{12} = G\frac{M_{\text{زمین}} m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow r = G\frac{M_{\text{زمین}}}{v^2}$$

$$\rightarrow r = 6.67 \times 10^{-11}\, N.\frac{m^2}{kg^2} \times \frac{5.98 \times 10^{24} kg}{(7560 m/s)^2} = 6.98 \times 10^6 m$$

ب)

وزن تلسکوپ در هر کجا برابر با نیروی گرانشی است که به جسم وارد می شود. بنابر این باید نیروی گرانشی در آن فاصله را بیابیم:

$$F_{12} = G\frac{M_{\text{زمین}}m}{r^2}$$

وزن تلسکوپ در سطح زمین برابر است با:

$$F_{12}{}' = G\frac{M_{\text{زمین}}m}{{R_e}^2}$$

بنابر این نسبت وزن ماهواره در ارتفاع و در سطح زمین برابر است با:

$$\frac{F_{12}}{F_{12}{}'} = \frac{{R_e}^2}{r^2} = (\frac{6.38}{6.98})^2 = 0.84$$

پ) دوره تناوب را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \to T = \frac{2 \times 3.14 \times 6.98 \times 10^6 m}{7560\ m/s} = 5.8 \times 10^3 s = 1.61h$$

تمرین 2» سرعت ماهواره متناسب با .... است.

1)جذر عکس شعاع مدار

2) جذر شعاع مدار

3)جذر جرم ماهواره

4)عکس مربع شعاع مدار

پاسخ:

$$F = G\frac{M_e m}{r^2} \quad \text{و} \quad F = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_e m}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

بنابر این گزینه 1 صحیح است.

تمرین 3: ماهواره ای در فاصله R_e از سطح زمین در یک مدار دایره ای به دور زمین می گردد. اگر R_e شعاع زمین و r شعاع مدار ماهواره و g شتاب جاذبه در روی زمین باشد، دوره گردش ماهواره در SI کدام است؟

1) $2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

2) $4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

3) $2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$

4) $4\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$

پاسخ:می دانیم:

شتاب گرانش در سطح زمین به صورت زیر است:

$$g = G\frac{M_{\text{زمین}}}{{R_e}^2} \to GM_{\text{زمین}} = {R_e}^2 g$$

از رابطه دوره تناوب و $r = R_e + R_e = 2R_e$ داریم.

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_e}\right) \times r^3 \to T^2 = \frac{4\pi^2}{{R_e}^2 g} \times 8{R_e}^3 = \frac{32\pi^2}{g} R_e$$

$$T^2 = \frac{32\pi^2}{g} \times \frac{r}{2}$$

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

بنابر این گزینه 2 صحیح است.

تمرین 4: فرض کنید سیاره ای باشد که شعاع آن نصف شعاع زمین و جرم آن یک چهارم جرم کره زمین باشد. شتاب گرانش در سطح آن سیاره چند برابر شتاب گرانی در سطح کره زمین خواهد شد؟

پاسخ:

$$r' = \frac{1}{2}R_e \qquad \text{و} \qquad M' = \frac{1}{4}M_e$$

رابطه شتاب گرانش به صورت زیر است:

$$g' = G\frac{M'}{r'^2} \qquad \text{و} \qquad g_e = G\frac{M_e}{{R_e}^2}$$

بنابر این:

$$\frac{g'}{g} = \frac{G\frac{M'}{r'^2}}{G\frac{M_e}{{R_e}^2}} = \left(\frac{M'}{M}\right) \times \left(\frac{{R_e}^2}{r'^2}\right) = \frac{1}{4} \times (2)^2 = 1$$

تمرین 5: جرم دو ماهواره A وB به ترتیب mو 2m و به فاصله های R_e و $2R_e$ از سطح زمین قرار دارند. سرعت خطی ماهواره A چند برابر سرعت خطی ماهواره B است؟

پاسخ:

$$2m_A = m_B \quad \text{و} \quad R_A = 2R_e \text{ و } R_B = 3R_e \rightarrow R_A = \frac{2}{3}R_B$$

در مسائل بالا به دست آوردیم که:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{GM_e}{R_A}} \quad \text{و} \quad v_B = \sqrt{\frac{GM_e}{R_B}}$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{\frac{GM_e}{R_A}}}{\sqrt{\frac{GM_e}{R_B}}} = \left(\sqrt{\frac{R_B}{R_A}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

تمرین 6: ماهواره های Aو B به دور زمین می چرخند. جرم ماهواره A، $\frac{5}{4}$جرم ماهواره B است. اگر بزرگی تکانه دو ماهواره با هم برابر باشد، شعاع مدار ماهواره Bچند برابر شعاع مدار ماهواره A است؟

پاسخ:

$$m_A = \frac{5}{4}m_B \quad \text{و} \quad p_A = p_B \rightarrow m_A v_A = m_B v_B \rightarrow v_A = \frac{4}{5}v_B$$

میدانیم:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_A}} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{GM}{r_B}} \rightarrow \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{r_B}{r_A} = \frac{16}{25}$$

تمرین 7: جرم دو ماهواره Aو B با هم برابر است. اگر شعاع مدار ماهواره A دوبرابر شعاع مدار ماهواره B باشد، انرژی آن چند برابر انرژی جنبشی ماهواره B است؟

پاسخ:

$$m_A = m_B \quad \text{و} \quad r_A = 2r_B$$

از رابطه سرعت و شعاع استفاده می کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_A}} \quad \text{و} \quad v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B}}$$

نسبت انرژی جنبشی ماهواره A به ماهواره B به صورت زیر است:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{m_A {v_A}^2}{2}}{\frac{m_B {v_B}^2}{2}} = \left(\frac{m_A}{m_B}\right) \times \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = 1 \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right) = \frac{1}{2}$$

تمرین 8: ماهواره ای به جرم m در ارتفاع h از سطح زمین به دور آن می چرخد. اگر نیروی مرکزگرای ماهواره $\frac{1}{16}$ وزن ماهواره در سطح زمین باشد، ارتفاع h چند برابر شعاع زمین است؟

پاسخ:

نیروی مرکزگرای ماهواره برابر با نیروی گرانشی وارد بر ماهواره در همان ارتفاع است بنابر این :

$$F=\frac{mv^2}{r}=G\frac{M_e m}{{r'}^2}=\frac{1}{16}\times G\frac{M_e m}{{r_e}^2}\to {r'}^2=16\times {r_e}^2$$

$$r'=4r_e$$

$$r'=h+r_e\to h=3\times r_e$$

تمرین 9: فاصله ماهواره A از سطح زمین به اندازه شعاع زمین، و فاصله ماهواره B تا سطح زمین 7 برابر شعاع زمین است. دوره گردش ماهواره B چند برابر دوره گردش ماهواره A است؟

پاسخ:

فاصله ماهواره ها از مرکز زمین به صورت زیر است:

$$r_A=r_e+r_e=2r_e \quad \text{و} \quad r_B=7r_e+r_e=8r_e$$

$$(\frac{T_B}{T_A})^2=(\frac{r_B}{r_A})^3=(\frac{8}{2})^3=64$$

$$\frac{T_B}{T_A}=8$$

تمرین 10: الف)شتاب گرانشی ناشی از خورشید در سطح زمین چقدر است؟

ب)شتاب گرانشی ناشی از ماه در سطح زمین چقدر است؟

$$M_{\text{خورشید}} = 1.99 \times 10^{30} kg \quad \text{و} \quad M_{\text{ماه}} = 7.36 \times 10^{22} kg$$

$$\text{فاصله زمین تا خورشید} = 149.6 \times 10^{6} km$$

$$\text{فاصله زمین تا ماه} = 3.84 \times 10^{5} km$$

پاسخ:

الف)شتاب گرانشی ناشی از خورشید برابر است با:

$$g_{sun} = G\frac{M_s}{{R_s}^2} = 6.67 \times 10^{-11} N.\frac{m^2}{kg} \times \frac{1.99 \times 10^{30} kg}{(149.6 \times 10^{9} m)^2} = 5.93 \times 10^{-3} N$$

ب) شتاب گرانشی ناشی از ماه برابر است با:

$$g_{\text{ماه}} = G\frac{M_{\text{ماه}}}{{R_{\text{ماه}}}^2} = 6.67 \times 10^{-11} N.\frac{m^2}{kg} \times \frac{7.36 \times 10^{22} kg}{(3.84 \times 10^{8} m)^2} = 3.32 \times 10^{-3} N$$

تمرین 11: الف)سفینه ای به جرم 3.00×10^4kg در وسط فاصله بین زمین و ماه قرار دارد. نیروی گرانشی خالصی را که از طرف زمین و ماه به سفینه در این مکان وارد می شود به دست آورید.

ب)در چه فاصله ای از زمین، نیروی گرانشی ماه و زمین بر سفینه یکدیگر را خنثی می کنند؟

پاسخ:

وسط فاصله بین زمین و ماه یعنی:

$$r=\frac{3.84\times10^5}{2}km=1.92\times10^5km$$

فاصله سفینه تا زمین و ماه برابر با مقدار بالا است. بنابر این نیروی گرانشی که از طرف ماه وارد می شود برابر است با:

$$F_{\text{ماه}}=G\frac{M_{\text{ماه}}m}{r_{\text{ماه}}^{\ 2}}=6.67\times10^{-11}N.\frac{m^2}{kg}\times\frac{7.36\times10^{22}\times3\times10^4kg^2}{(1.92\times10^8m)^2}$$

$$F_{\text{ماه}}=3.99\times10^{-3}N$$

و نیروی گرانشی که از طرف زمین وارد می شود برابر است با:

$$F_{\text{زمین}}=G\frac{M_{\text{زمین}}m}{r_{\text{زمین}}^{\ 2}}$$

$$=6.67\times10^{-11}N.\frac{m^2}{kg}\times\frac{5.98\times10^{24}\times3\times10^4kg^2}{(1.92\times10^8m)^2}$$

$$F_{\text{زمین}}=3.25\times10^{-3}N$$

ب) در فاصله r نیروی گرانشی زمین و ماه برابر است:

$$F_{\text{زمین}}=F_{\text{ماه}}\rightarrow G\frac{M_{\text{ماه}}m}{r_{\text{ماه}}^{\ 2}}=G\frac{M_{\text{زمین}}m}{r_{\text{زمین}}^{\ 2}}\rightarrow(\frac{r_{\text{زمین}}}{r_{\text{ماه}}})^2=\frac{M_{\text{زمین}}}{M_{\text{ماه}}}$$

$$\frac{r_{\text{زمین}}}{r_{\text{ماه}}} = 9.08$$

مجموع فاصله سفینه تا زمین و فاصله سفینه تا ماه برابر با کل فاصله زمین تا ماه است:

$$r_{\text{زمین}} + r_{\text{ماه}} = 3.84 \times 10^5 km \rightarrow 9.08 \times r_{\text{ماه}} + r_{\text{ماه}} = 3.84 \times 10^5 km$$

$$10.08 \times r_{\text{ماه}} = 3.84 \times 10^5 km \rightarrow r_{\text{ماه}} = 3.81 \times 10^4 km$$

$$r_{\text{زمین}} = 9.08 \times r_{\text{ماه}} \rightarrow r_{\text{زمین}} = 3.46 \times 10^5 km$$

Website: https://physicfa.ir

Telegram: https://t.me/physicfa