

فصل ۲

ملاحظات:

تابع سینوس: فرم کلی این تابع به صورت $y = a \sin(bx) + c$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad \text{دوره تناوب}$$

$$\text{کمترین مقدار تابع} = \text{Min}(y) = c - |a|$$

$$\text{بیشترین مقدار تابع} = \text{Max}(y) = c + |a|$$

مثال: دوره تناوب، کمترین و بیشترین مقدار تابع‌ها زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف)} \quad y = 2 \sin \omega x + 3$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \text{Min}(y) = 3 - 2 = 1, \quad \text{Max}(y) = 3 + 2 = 5$$

$$\text{ب)} \quad y = -2 \sin(-\pi x) - 1$$

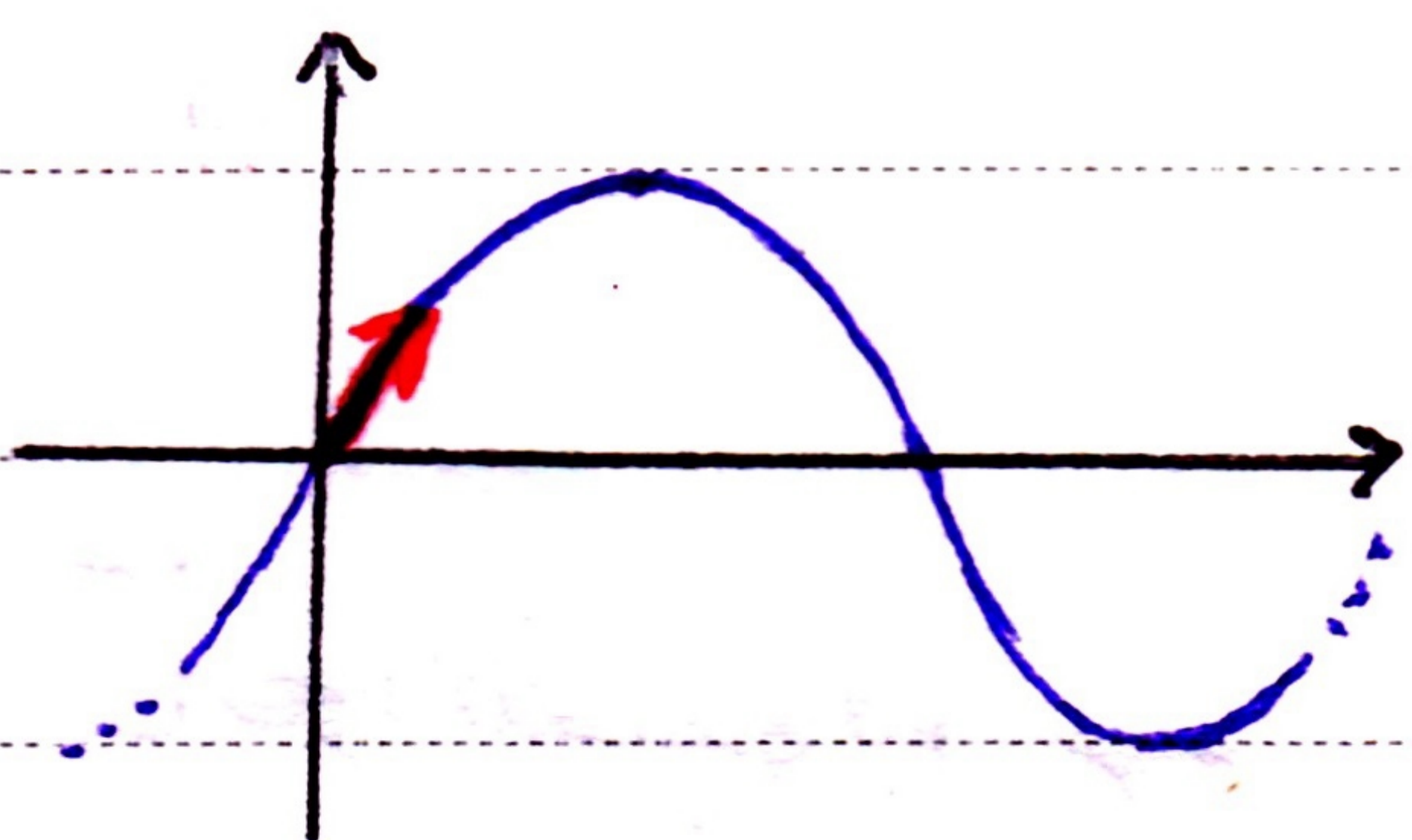
$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad \text{Min}(y) = -1 - 2 = -3, \quad \text{Max}(y) = -1 + 2 = 1$$

$$\text{پ)} \quad y = 4 - \sin\left(\frac{x}{4}\right) \quad \rightarrow \quad a = -1, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = 4$$

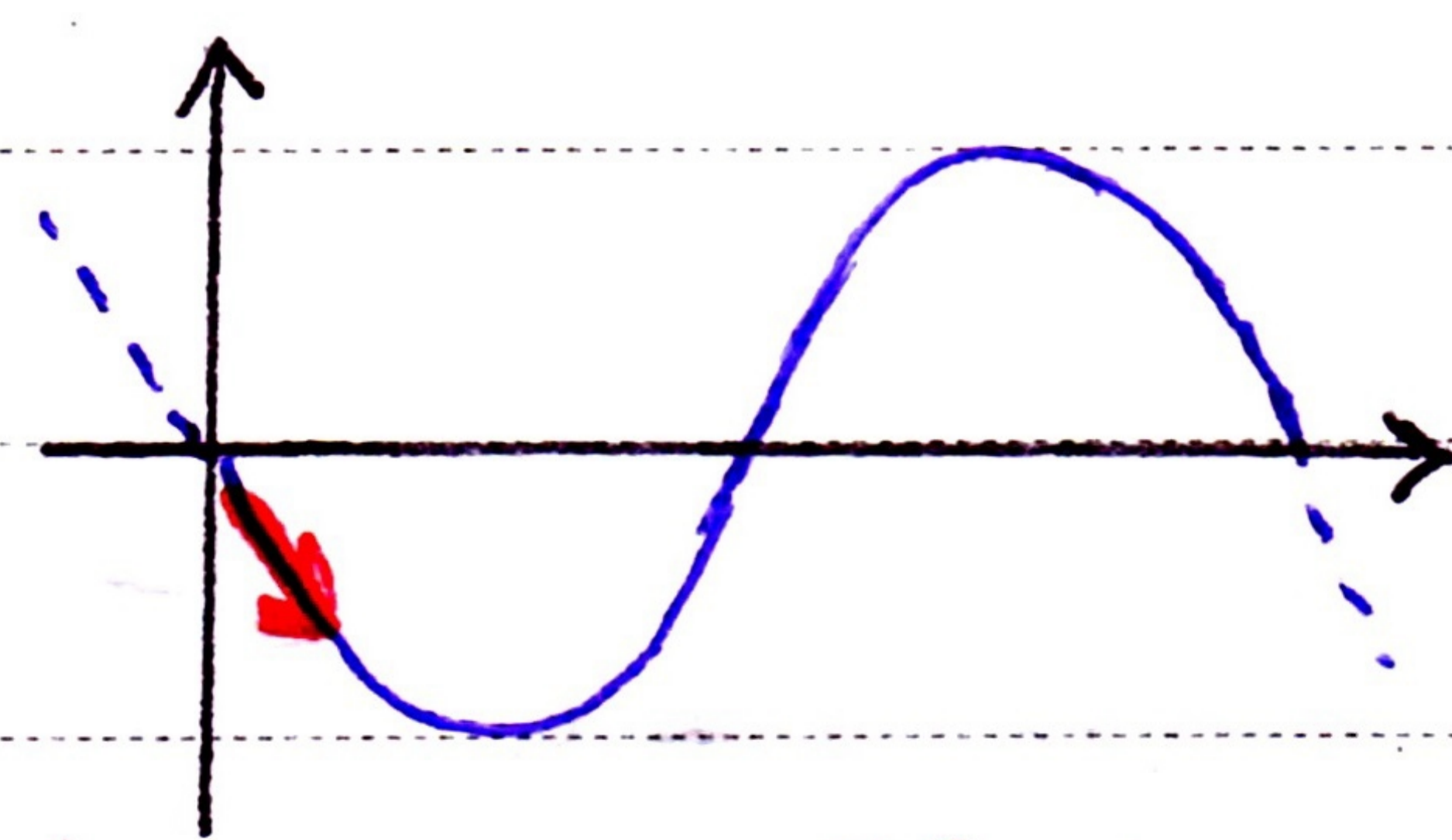
$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

$$\text{Min}(y) = 4 - 1 = 3, \quad \text{Max}(y) = 4 + 1 = 5$$

نکته مهم:

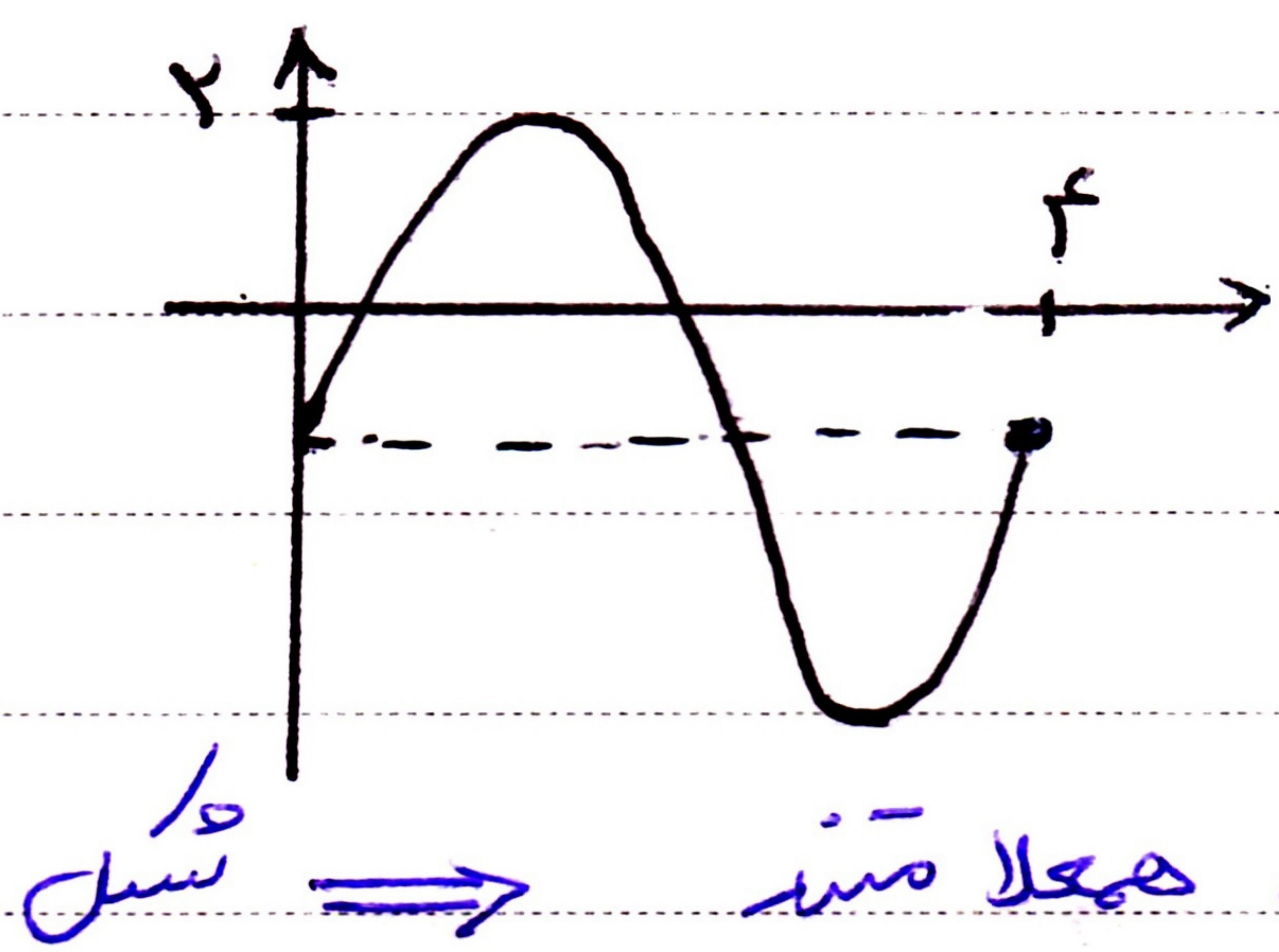


a, b هم‌علامتند



a, b مختلف‌العلامت‌اند

مثال: شکل رو برود، قسمتی از نمودار تابع



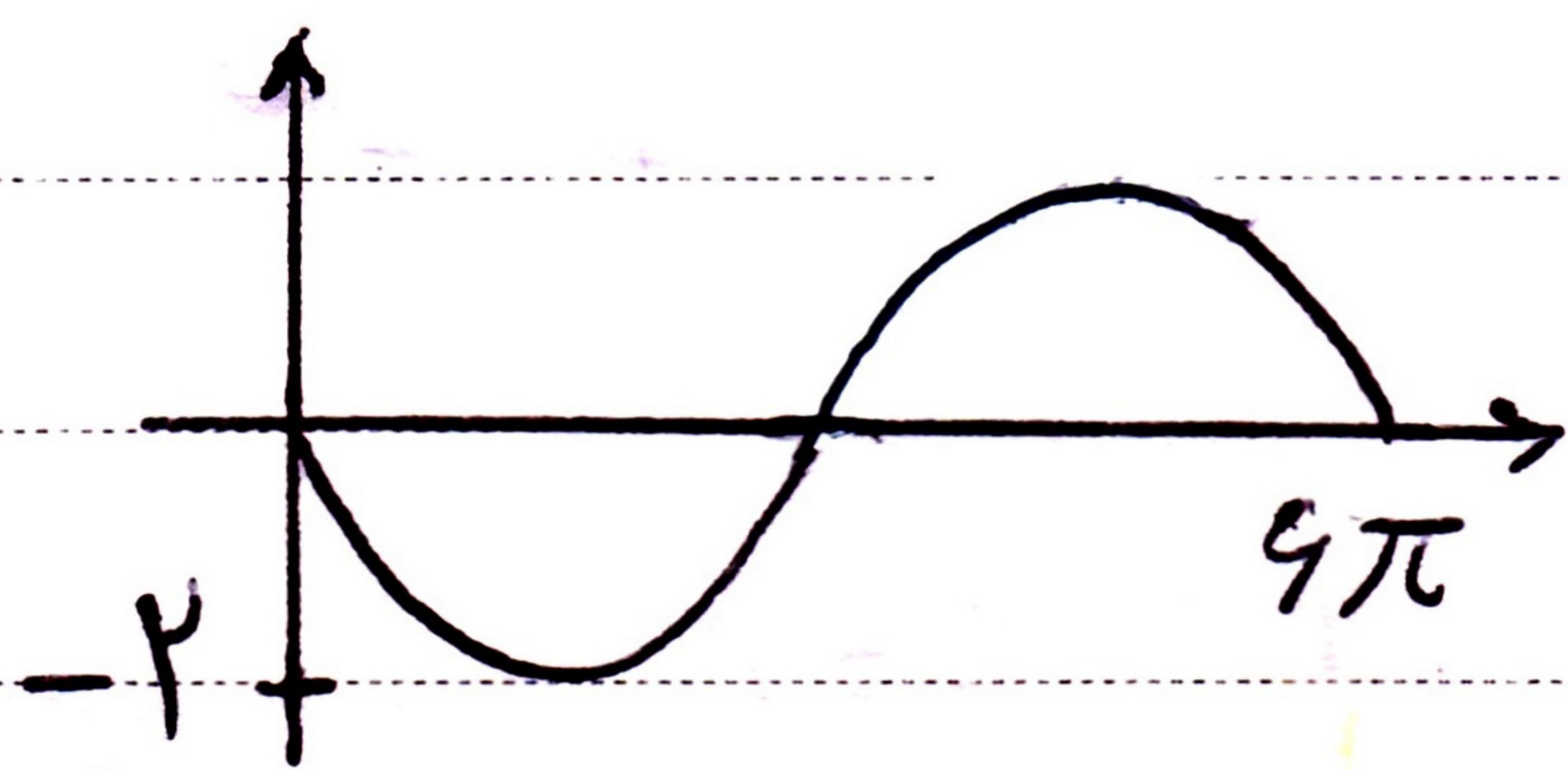
۱- $y = a \sin(b\pi x) - 1$ است. a, b را بیابید.

دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$

$\text{Max}(y) = -1 + |a| = 2 \Rightarrow |a| = 3$

$\begin{cases} a = 3, b = \frac{1}{2} \\ a = -3, b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

مثال: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(bx)$ است. a, b را بیابید.



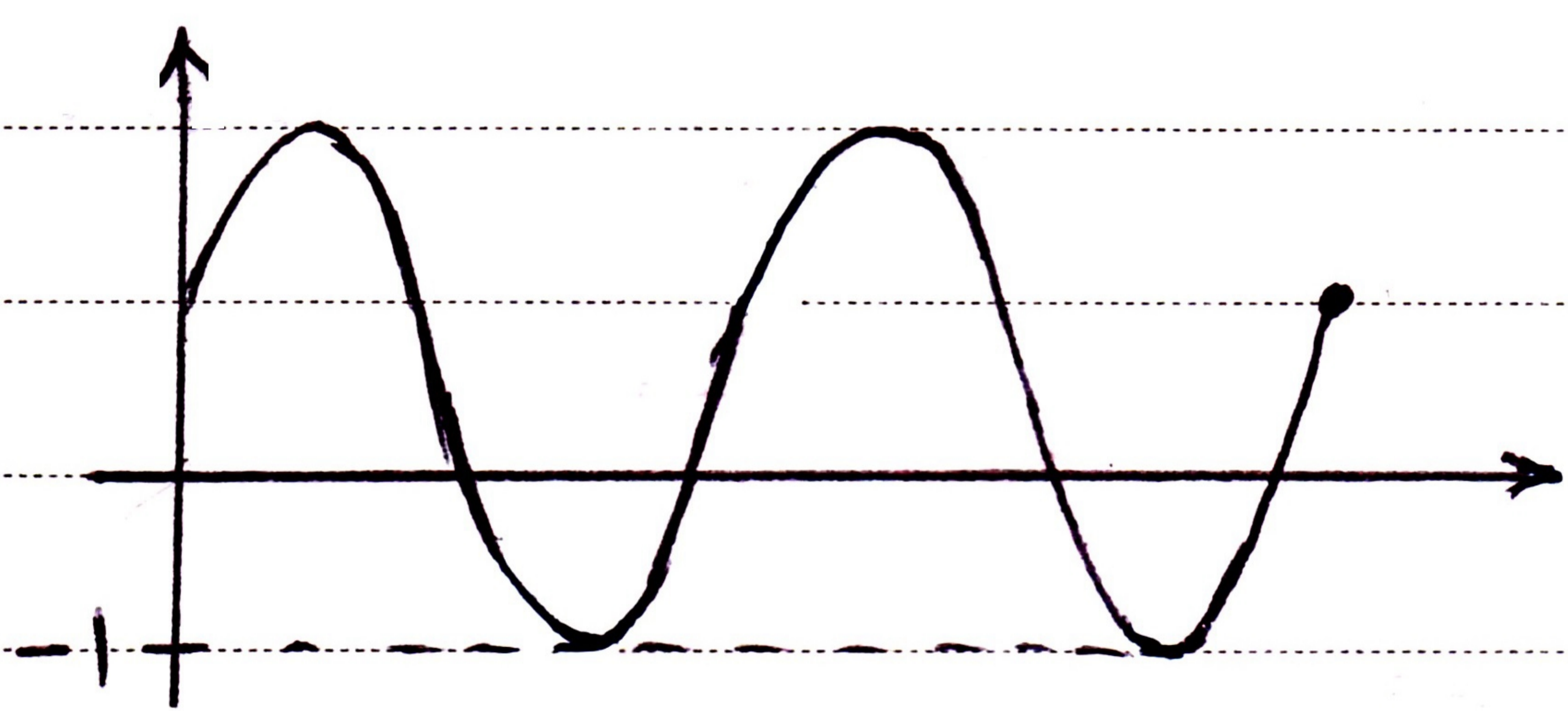
a, b مختلف علامت دارند

دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$

$\text{Min}(y) = -|a| = -2 \Rightarrow |a| = 2$

$\begin{cases} a = 2, b = -\frac{1}{3} \\ a = -2, b = \frac{1}{3} \end{cases}$

مثال: شکل رو برود و نمودار تابع



$y = 1 + a \sin(b\pi x)$

در بازه $(0, \frac{4}{3})$ است.

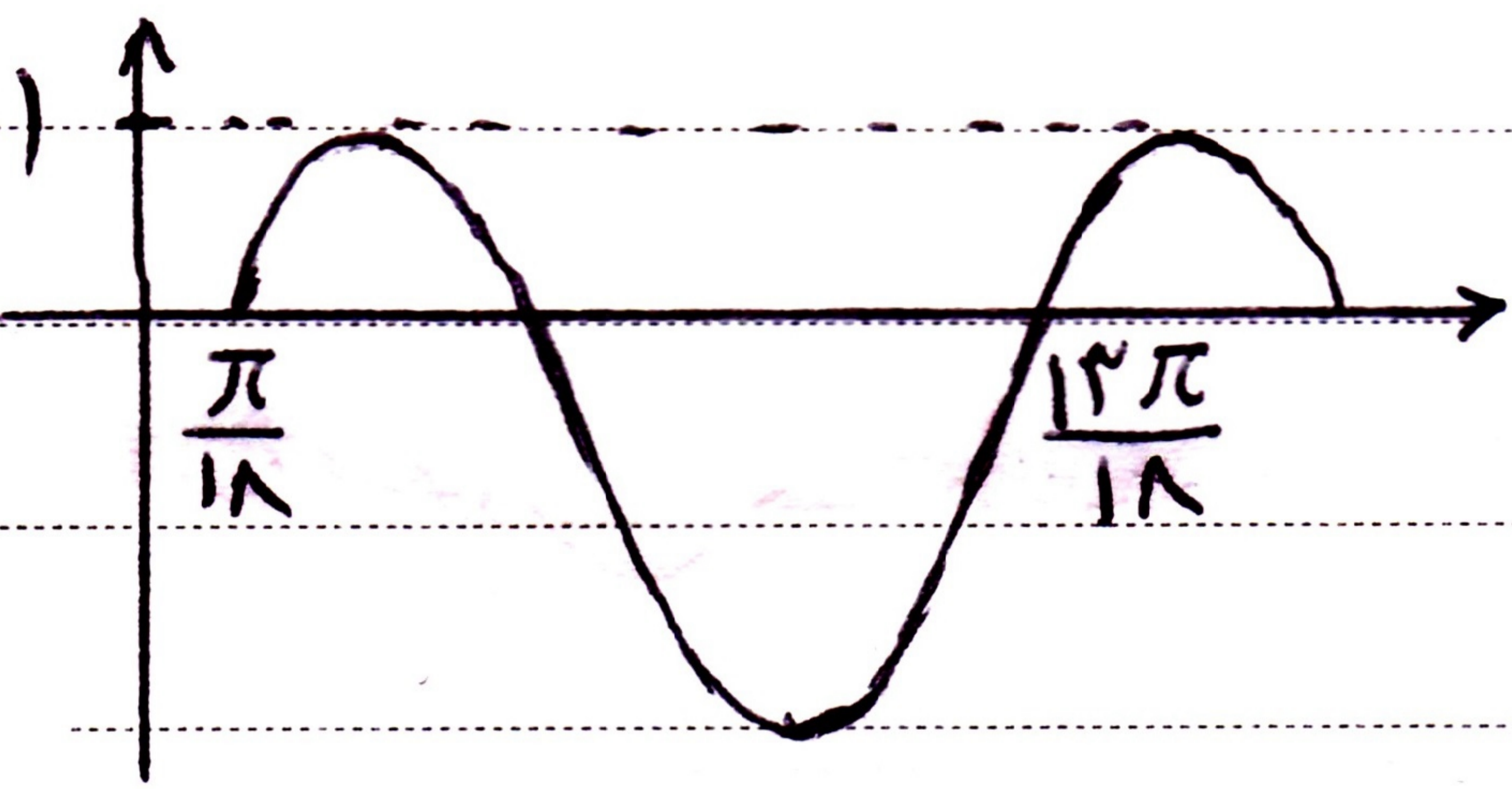
a, b را حساب کنید.

a, b معلومند

دوره تناوب $\Rightarrow 2T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = \frac{2 \times 3}{2} = 3$

$\text{Min}(y) = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2$

$\begin{cases} a = 2, b = 3 \\ a = -2, b = -3 \end{cases}$



مثال: با توجه به نمودار تابع

$$y = a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + bx\right)$$

a و b را محاسبه کنید

$$y = a + 2 \sin(bx)$$

b مثبت است $\Rightarrow b = 2$ و a همعلامتند \Rightarrow شکل

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -\sin\theta \quad \text{یادآوری}$$

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \xrightarrow{b \text{ مثبت}} b = 3$$

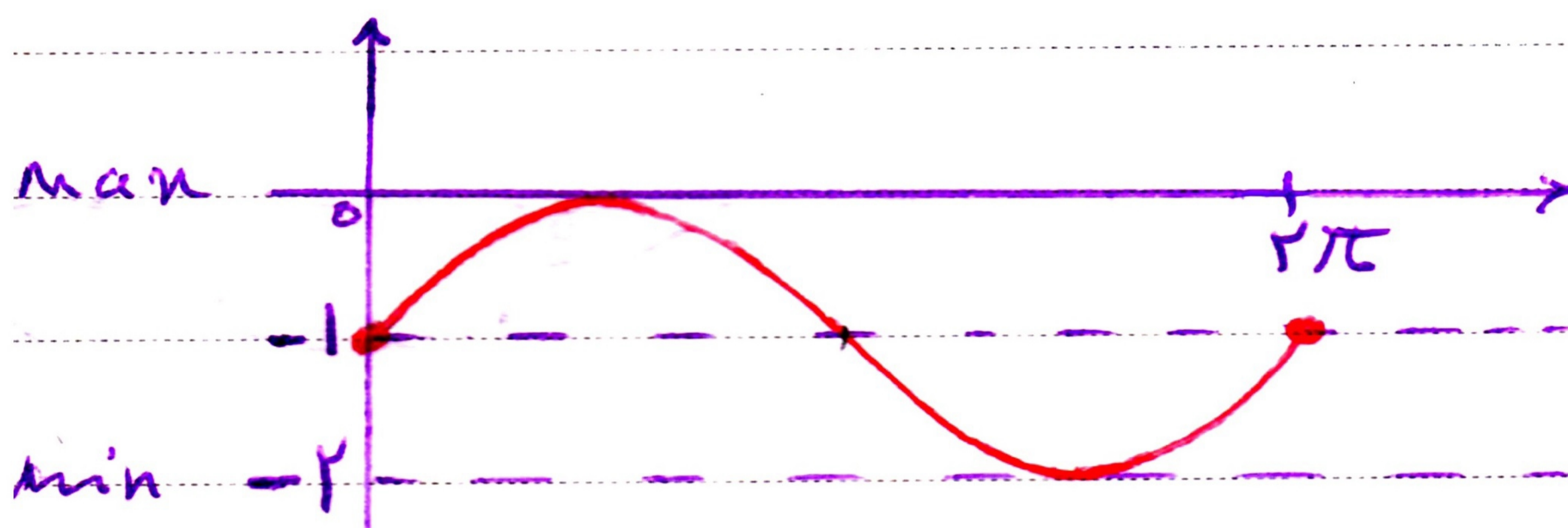
$$\text{Max}(y) = a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $y = \sin x - 1$ \rightarrow ابتدا نمودار $\rightarrow a, b$ همعلامتند

$$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi, \quad x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 0 - 1 = -1$$

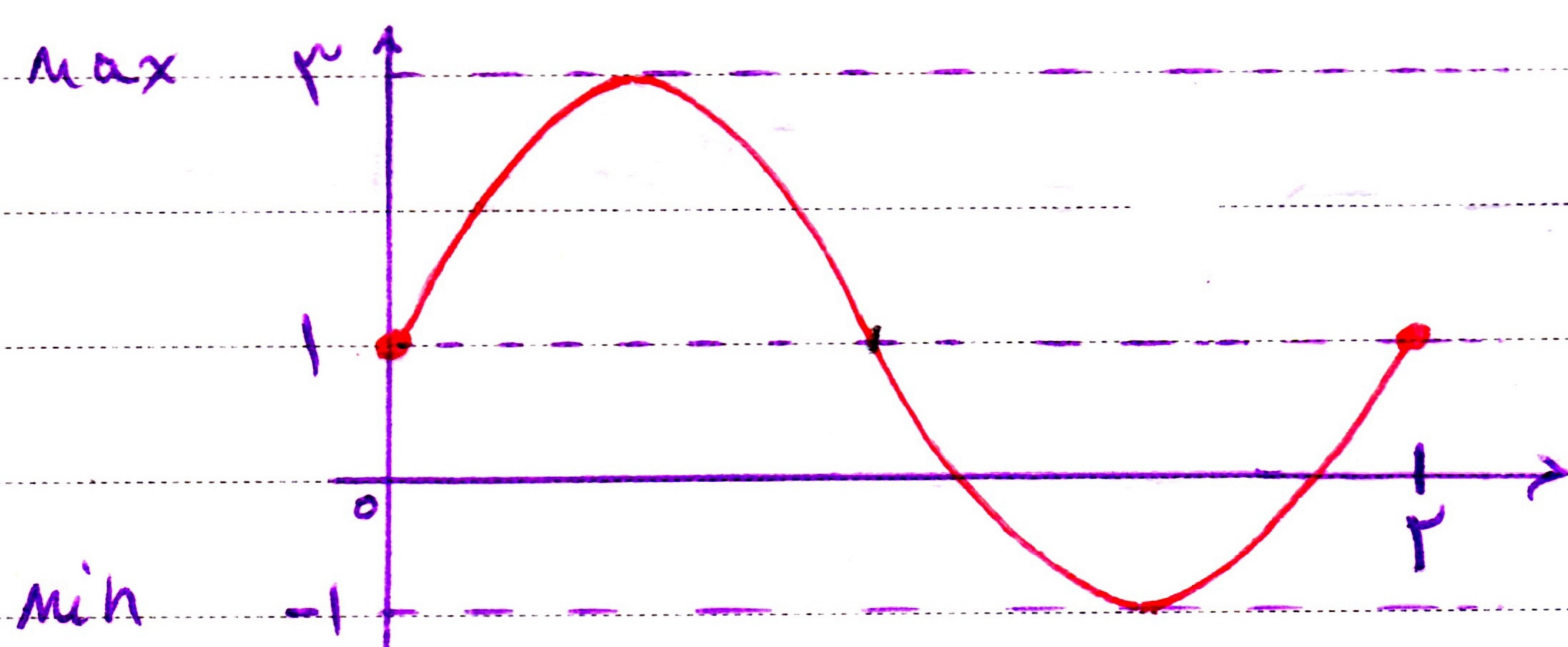
$$\text{Min}(y) = -1 - 1 = -2 \quad \text{و} \quad \text{Max}(y) = -1 + 1 = 0$$



ب) $y = 2 \sin(\pi x) + 1$ \rightarrow ابتدا نمودار $\rightarrow a, b$ همعلامتند

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 2 \times 0 + 1 = 1$$

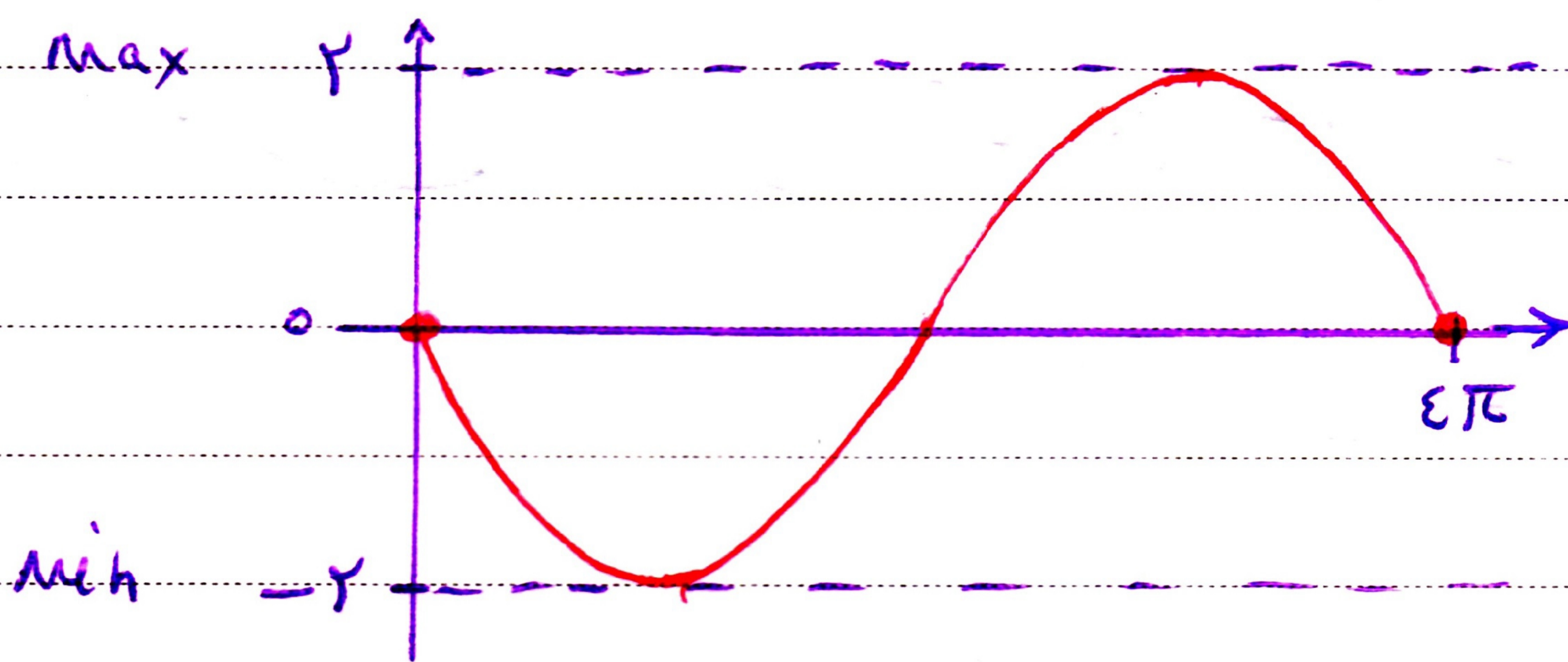
$$\text{Min}(y) = 1 - 2 = -1, \quad \text{Max}(y) = 1 + 2 = 3$$



ابتداء نزولی \rightarrow a, b مختلف علامه اند \rightarrow $y = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ (ب)

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, \quad x=0 \rightarrow y = -2 \times 0 = 0$$

$$\min = -2, \quad \max = 2$$



مثال: مقادیر a و c را چنان بیابید بهترین و کمترین مقدار تابع زیر به ترتیب برابر $\frac{3}{2}$

$$y = a \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{\cos x} \underbrace{\sin(3\pi - x)}_{\sin x} + c$$

یادآور: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
 $\sin(3\pi - x) = \sin x$

$$\Rightarrow y = a \cos x \sin x + c$$

توجه: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{2} \sin 2x + c$$

$$\min(y) = c - \left|\frac{a}{2}\right| = -1 \quad \xrightarrow{+} \quad 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\max(y) = c + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \quad \xrightarrow{+} \quad 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تابع کسینوس: فرم کلی این تابع $y = a \cos(bx) + c$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad (\text{دوره تناوب})$$

$$\text{کمترین مقدار تابع: } \min(y) = c - |a|$$

$$\text{بیشترین مقدار تابع: } \max(y) = c + |a|$$

مثال: دوره تناوب، کمترین و بیشترین مقدار تابع های زیر را درجین کنید.

$$\text{الف) } y = d \cos(-2x) - 2$$

$$T = \frac{2\pi}{2} \quad , \quad \min(y) = -2 - d = -7 \quad , \quad \max(y) = -2 + d = 2$$

$$\text{ب) } y = -\frac{1}{2} \cos(\pi x) + 3$$

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad , \quad \min(y) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad , \quad \max(y) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{پ) } y = 4 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow a = -1, b = \frac{1}{2}, c = 4$$

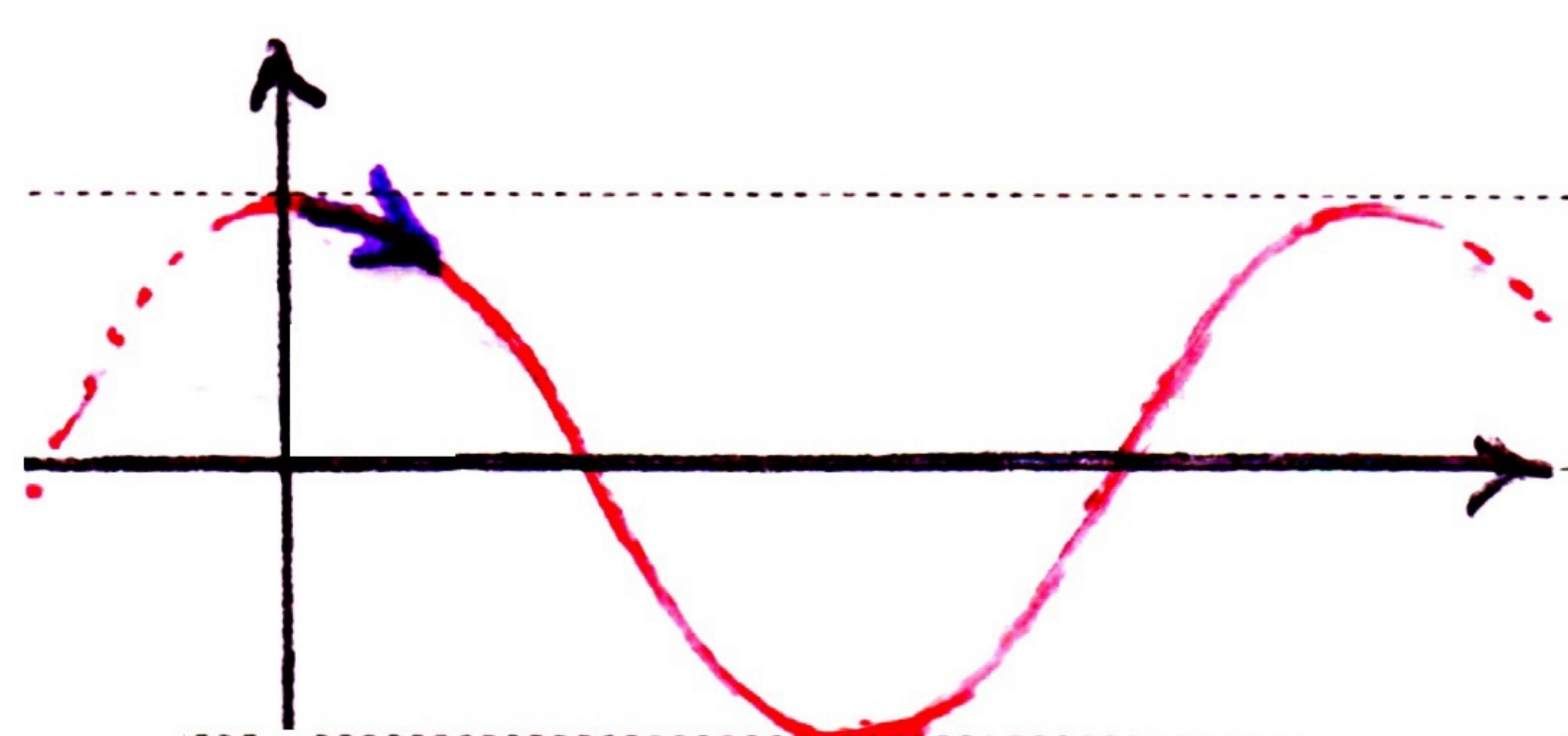
$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad , \quad \min(y) = 4 - 1 = 3 \quad , \quad \max(y) = 4 + 1 = 5$$

مثال: اگر A, B به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار تابع $y = -3 \cos x + 2$ باشند، مقدار $2A + B$ کدام است؟

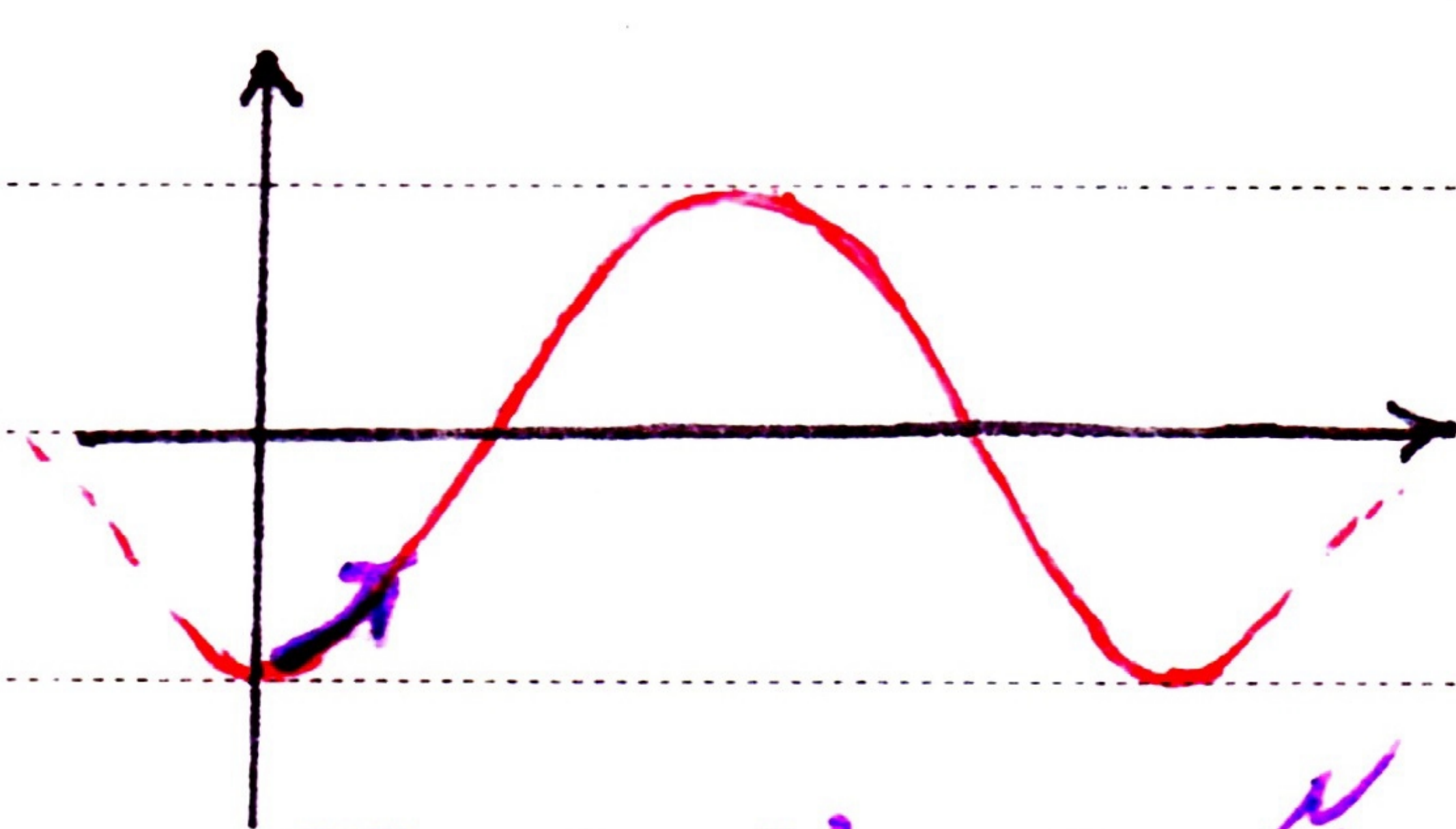
$$\min(y) = 2 - 3 = -1 \Rightarrow A = -1 \rightarrow 2A + B = -2 + d = 2$$

$$\max(y) = 2 + 3 = 5 \Rightarrow B = 5$$

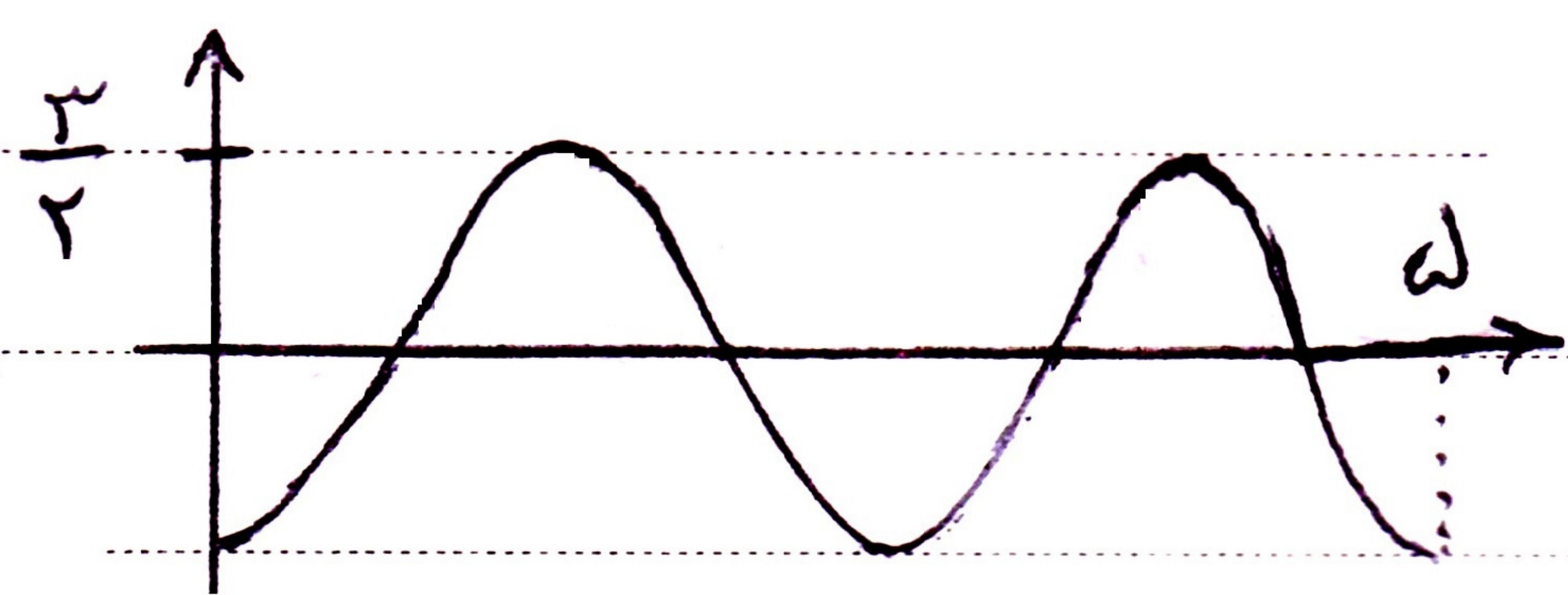
نکته مهم:



اگر a مثبت باشد



اگر a منفی باشد

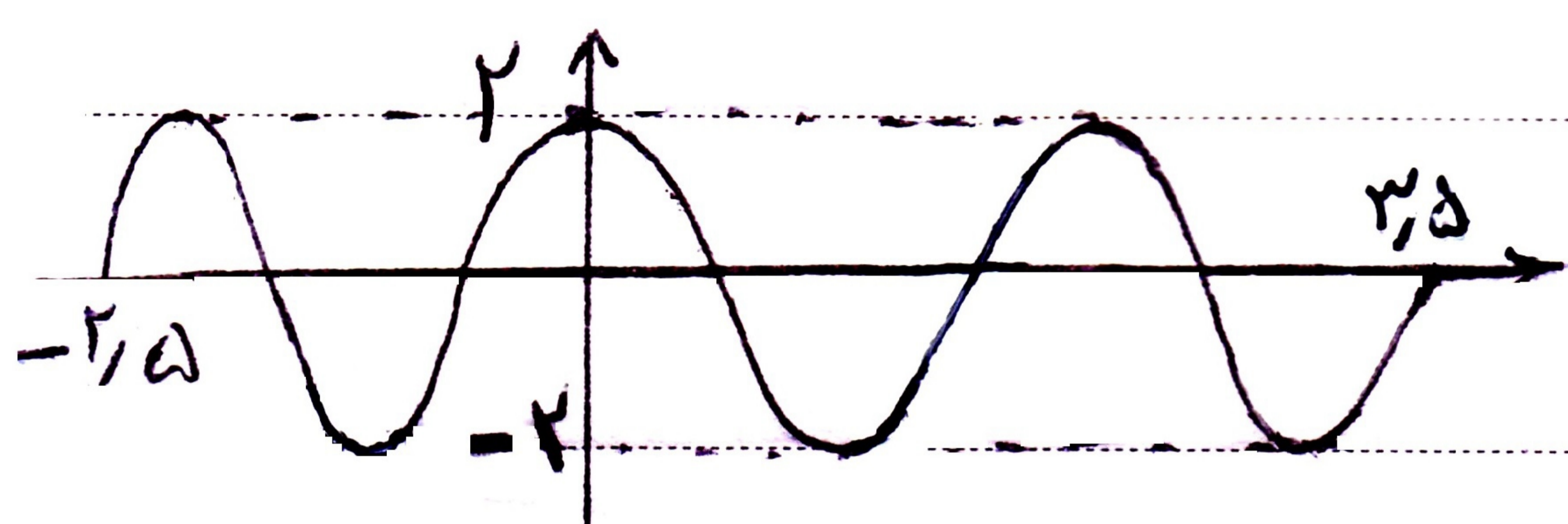


مسئله: شکل رو بر و قسمت از نمودار تابع
 $y = a \cos(b\pi x)$ است. بیشترین
 مقدار $a+b$ نام است؟
 ۲,۲ ۰,۷ -۰,۷ -۱,۸

$$T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{2} \Rightarrow |b| = \frac{2}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{2}{2}$$

$$\max(y) = |a| = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$a+b = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

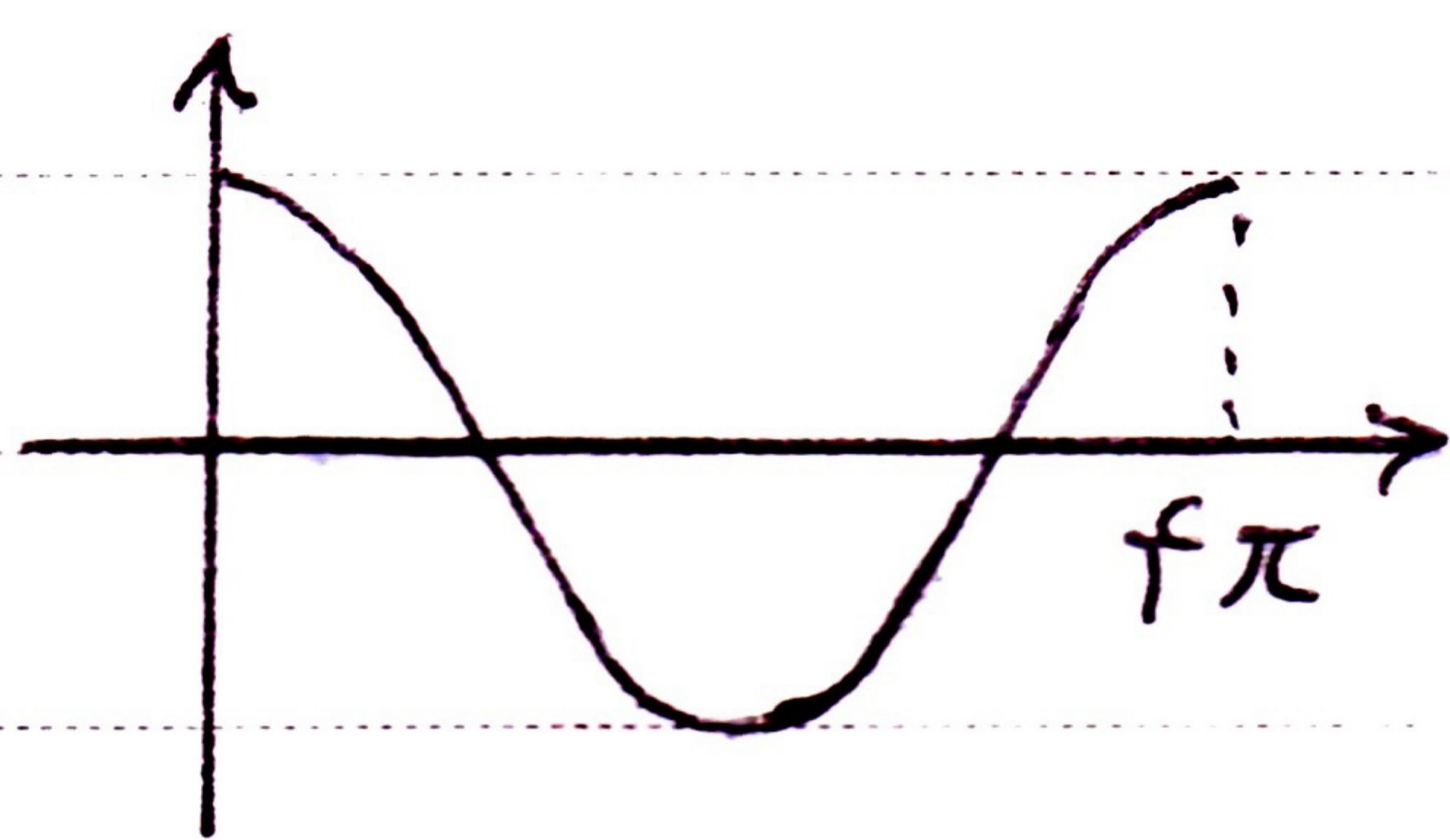


مسئله: شکل رو بر و قسمت از نمودار تابع
 $y = a \sin(\pi(\frac{1}{2} + bx))$ است. a, b را
 بیابید.

$$y = a \sin(\frac{\pi}{2} + b\pi x) = -a \cos(b\pi x)$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{2} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|\pi} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$\max(y) = |a| \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \rightarrow \boxed{a = -2}$$



مسئله: شکل مقابل قسمت از نمودار تابع
 $y = \frac{1}{2} + 2 \cos(mx)$ است. مقدار تابع در
 نقطه $x = \frac{2\pi}{3}$ را بدست آورید.

$$T = \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{تابع: } y = \frac{1}{2} + 2 \cos(\frac{1}{2}x) \xrightarrow{x = \frac{2\pi}{3}} y = \frac{1}{2} + 2 \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

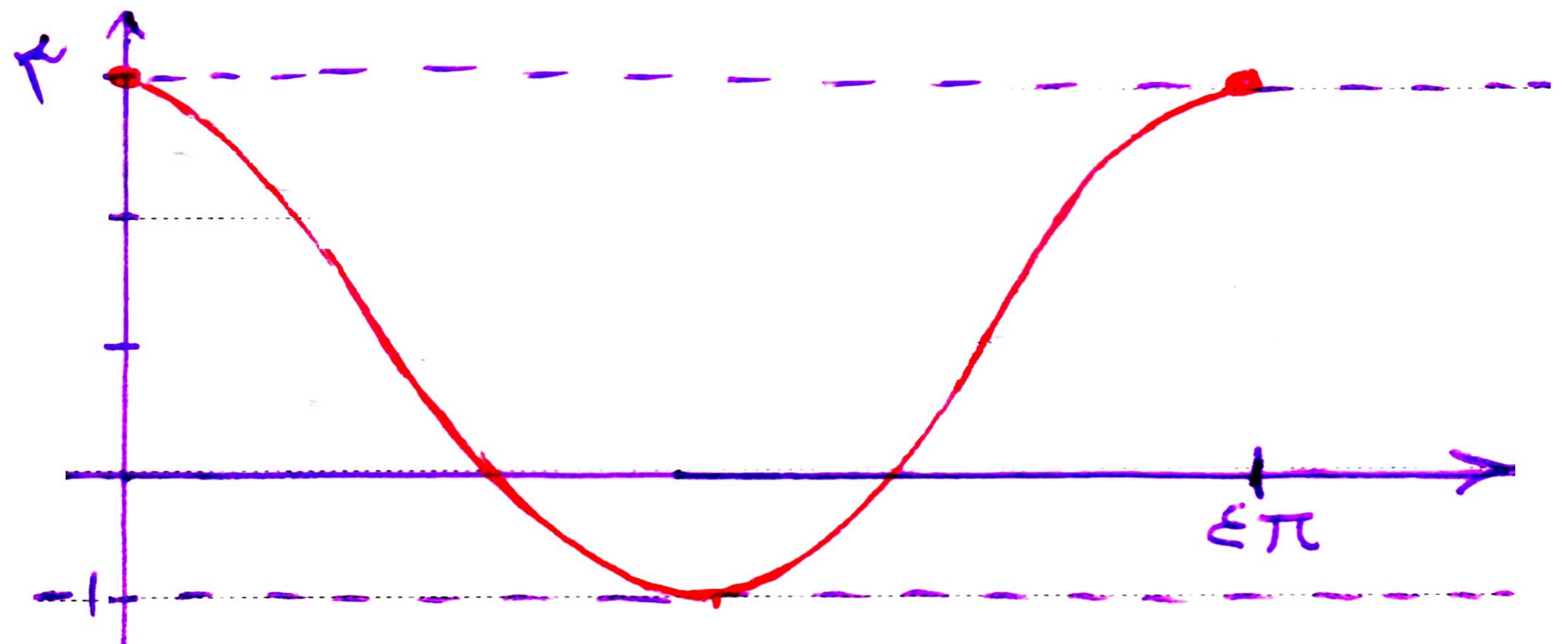
مثال: نمودار حرکتی از توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید

الف) $y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \rightarrow T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi, x=0 \rightarrow y = 2 \times 1 + 1 = 3$

$\min(y) = 1 - 2 = -1$

$\max(y) = 1 + 2 = 3$

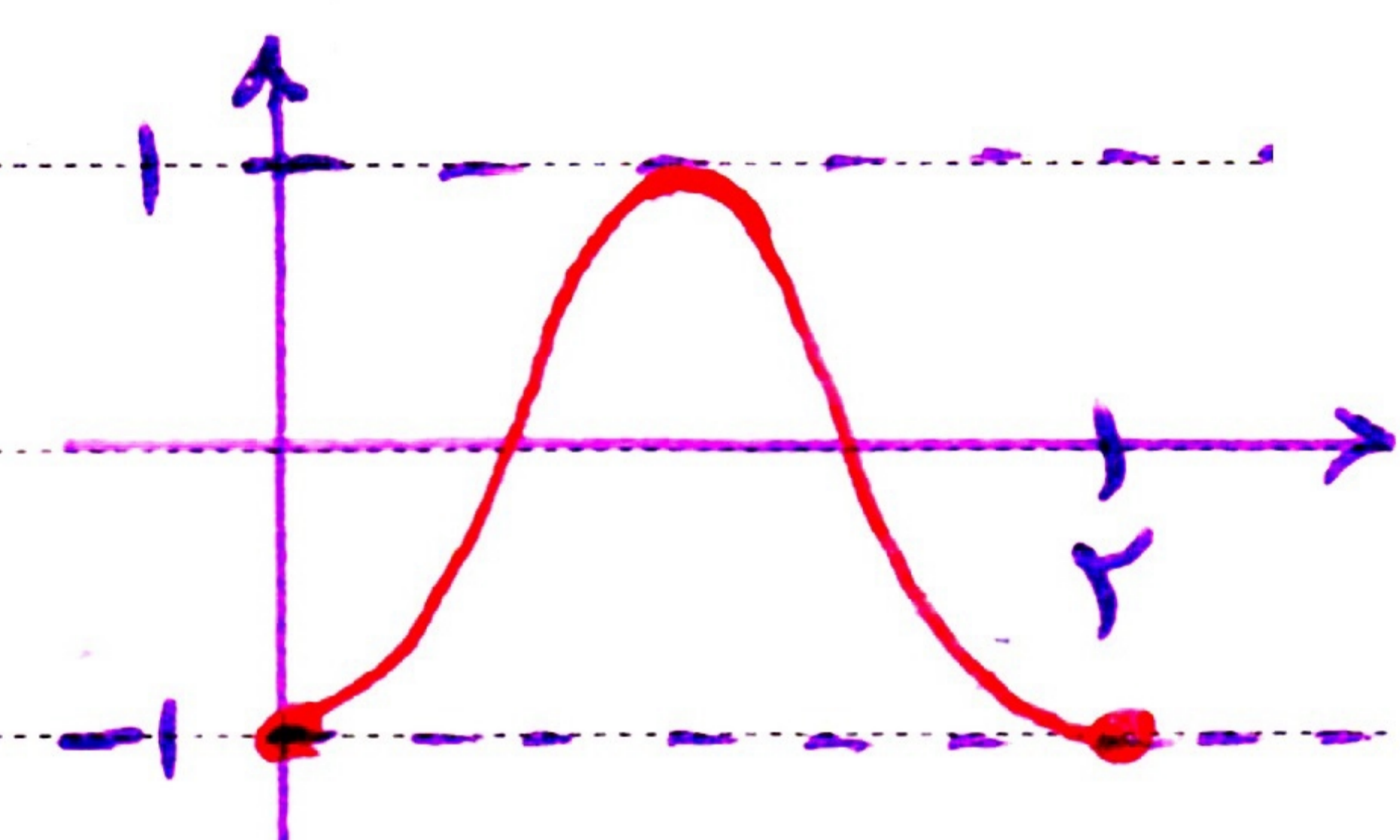
$a = 2 \rightarrow$ مثبت



ب) $y = -\cos(\pi x)$

$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, x=0 \rightarrow y = -1$

$\min(y) = -1$ و $\max(y) = 1$



$a = -1 \rightarrow$ منفی

مثال: دوره تناوب، بیشترین مقدار و کمترین مقدار توابع زیر را تعیین کنید

الف) $y = 2 \cos^2(3x) - 5$

یادآوری:

$y = 2 \times \frac{1 + \cos 6x}{2} - 5 \Rightarrow y = \cos 6x - 4$

$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \min(y) = -4 - 1 = -5$

$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$\max(y) = -4 + 1 = -3$

ب) $y = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2$

$y = 4 \times \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} + 2 \Rightarrow y = -2 \cos(\pi x) + 4$

$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \min(y) = 4 - 2 = 2$ و $\max(y) = 4 + 2 = 6$

مثال: وزنه ای به انتگرایی غیر متصل است و به طور پیوسته بالای پایین می رود.
 ثانیه بعد از آغاز حرکت، فاصله این وزنه از سطح زمین، طبق رابطه زیر بر حسب
 سانتی متر می آید: $d = 12 + 2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$

فاصله بیش بالترین و پایین ترین نقطه این وزنه ها از آن عبور می کند چقدر

$\min(d) = 12 - 2 = 10$) $14 - 10 = 4$ سانتی متر است

$\max(d) = 12 + 2 = 14$