بخش اول : استدلال

گزاره : گزاره جمله ای است خبری که ممکن است یا درست یا نادرست باشد. گرچه درست بودن و یا نادرست بودن آن معلوم نیست و بر ما پوشیده است.

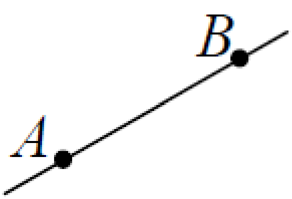
مثال : هر یک از جملات زیر گزاره هستند :

- ✓ عدد $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است.
- ✓ توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است.
- ✓ مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۵ درجه است.
- ✓ بین هر دو عدد طبیعی متوالی ، عدد طبیعی دیگری وجود ندارد.
- ✓ همه اعداد اول فرد هستند.

اصل : اصل ، حقیقت یا عبارتی است که درستی آن را قبول داریم و قبول درستی آن نیازی به دلیل و برهان (اثبات) ندارد.

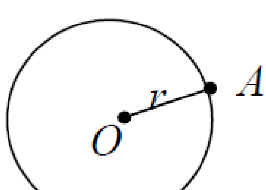
در اینجا به تعدادی از این اصل ها اشاره می کنیم :

الف) اصول هندسی (اصول اقلیدس)



۱- از هر دو نقطه متمایز (متفاوت) فقط و فقط یک خط راست می گذرد.

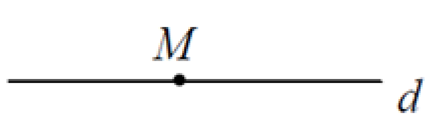
۲- بین هر دو نقطه متمایز واقع بر یک خط راست ، حداقل یک نقطه متمایز دیگر با آنها وجود دارد.



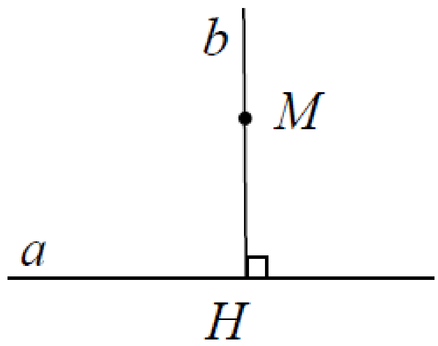
۳- به یک مرکز معین و شعاع معین فقط می توان یک دایره را رسم کرد.

۴- همه زاویه های قائمه بر یکدیگر قابل انطباق هستند.

۵- از هر نقطه خارج از یک خط ، فقط و فقط می توان یک خط به موازات آن رسم کرد. (اصل توازی)



۶- از هر نقطه خارج از یک خط (یا روی خط) فقط یک خط عمود می توان رسم کرد.(اصل تعامد)



ب) اصول متعارف

۱- دو چیز مساوی با یک چیز ، خود با هم مساویند.

$$\left.\begin{aligned} a=b \\ b=c \end{aligned}\right\} \rightarrow a=c$$

۲- دو طرف یک تساوی را می توان در یک غیر صفری مانند m ضرب نمود و مقادیر مساوی دیگری بدست آورد.

$$a=b \xrightarrow{m\neq 0} ma=mb$$

۳- اگر مقادیر مساوی را با مقادیر مساوی دیگر جمع کنیم حاصل جمع ها با یکدیگر مساوی خواهد بود.

$$\left.\begin{aligned} a=b \\ x=y \end{aligned}\right\} \rightarrow a+x=b+y$$

استدلال و انواع آن

عمل دلیل آوردن برای اثبات یک گزاره را استدلال می نامند. به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

۱- **استدلال استقرایی :** استدلالی است که ما را براساس تعداد محدودی مشاهده (یا تعدادی از حالت ها) به یک نتیجه کلی می رساند.

مثال : آیا مجموعه توان های طبیعی عدد ۲ نسبت به عمل ضرب بسته است؟ دلیل خود را به روش استدلال استقرایی بیان کنید.

✓ **حل :** ابتدا مجموعه توان های طبیعی عدد ۲ را می نویسیم :

$$A=\{۲^{۱},۲^{۲},۲^{۳},۲^{۴},۲^{۵},\dots\}$$

حال دو عضو دلخواه از مجموعه A را در هم ضرب می کنیم :

مشاهده ی اول $\quad ۲^{۲}\times ۲^{۳}=۲^{۵}\in A$

مشاهده ی دوم $\quad ۲^{۳}\times ۲^{۴}=۲^{۷}\in A$

مشاهده ی سوم $\quad ۲^{۲}\times ۲^{۵}=۲^{۷}\in A$

مشاهده ی چهارم $\quad ۲^{۳}\times ۲^{۳}=۲^{۶}\in A$

....

مشاهده می کنیم که حاصل ضرب هر دو عضو از مجموعه A به ما یک عضو از A را می دهد، پس این مجموعه **احتمالا** نسبت به عمل ضرب بسته است. کلمه احتمالا به این دلیل آمده است که چون تمام حالت ها بررسی نشده است و از نتیجه بدست آمده اطمینان قطعی نداریم.

۲- استدلال استنتاجی : استدلالی است که بر اساس حقایق درست پذیرفته شده (مانند تعاریف و اصول اولیه) ما را به یک نتیجه کلی می رساند.

مثال : آیا مجموعه توان های طبیعی عدد ۲ نسبت به عمل ضرب بسته است؟ دلیل خود را به روش استدلال استنتاجی بیان کنید.

✓ **حل :** ابتدا مجموعه توان های طبیعی عدد ۲ را می نویسیم :

$$S=\{۲^{۱},۲^{۲},۲^{۳},۲^{۴},\dots\}$$

حقیقت : مجموع هر دو طبیعی ، یک عدد طبیعی است.

حال با توجه به حقیقت گفته شده در بالا داریم :

$$\left.\begin{matrix} m\in N \\ n\in N \end{matrix}\right\}\rightarrow (m+n)\in N$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲^{m} \in S \\ ۲^{n} \in S \end{array}\right\} \rightarrow ۲^{m} \times ۲^{n} = ۲^{m+n} \in S$$

لذا حاصل ضرب هر دو عضو از S نیز عضو S است. یعنی مجموعه S نسبت به عمل ضرب بسته است. چون نتیجه بدست آمده فوق متکی بر یک حقیقت است، لذا از نتیجه بدست آمده اطمینان قطعی داریم.

نکات مهم

- **برای اثبات درستی یک گزاره باید استدلال کرد که لازم است این استدلال از نوع استدلال استنتاجی باشد.**
- **برای رد درستی یک گزاره، ارائه یک مثال نقض (استثناء) کافی است.**

مثال نقض به مثالی گفته می شود که درستی یک گزاره را رد کند.

مثال : برای هر یک از موارد زیر در صورت وجود یک مثال نقض بیاورید.

الف) تمام اعداد اول فرد هستند.

ب) هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.

پ) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق هستند.

ث) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگتر است.

ج) حاصل جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

قضیه : هر گزاره درست که قبول درستی آن نیازمند برهان باشد را قضیه می گویند.

هر قضیه معمولا از دو قسمت تشکیل شده است :

الف) **فرض** : آن قسمت از قضیه را گویند که درستی آن را قبول داریم.(اطلاعات داده شده در سوال)

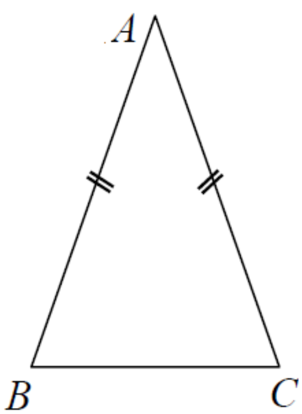
ب) **حکم** : آن قسمت از قضیه را گویند که باید درستی آن را نتیجه بگیریم.

- ✓ در واقع هر قضیه یک جمله شرطی است که جواب شرط آن را اثبات می کنیم ولی شرط را قبول داریم.

به الگوی روبرو توجه کنید : قضیه : اگر [(فرض)] آنگاه [(حکم)] .

(قبول داریم.) (ثابت می‌کنیم.)

مثال : قضیه : در هر مثلث متساوی الساقین ، دو زاویه مجاور به قاعده با هم برابرند.



به سادگی می توان این قضیه را به شکل زیر نوشت :

اگر مثلث متساوی الساقین باشد آنگاه دو زاویه مجاور به قاعده آن با هم برابرند.

فرض **حکم**

فرض : $AB = AC$ حکم : $\angle B = \angle C$

مثال : قضیه های زیر به صورت شرطی بیان کنید و فرض و حکم آنها را مشخص کنید.

الف) هر دو زاویه متقابل به رأس با هم برابرند.

ب) در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

عکس قضیه : اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه جا کنیم، آنچه حاصل می شود، ((عکس قضیه)) است. عکس یک قضیه می تواند درست یا نادرست باشد.

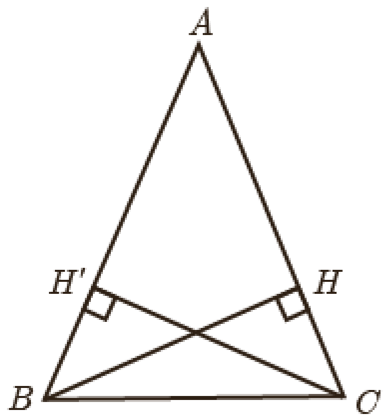
مثال اول

قضیه : اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کند.

عکس قضیه : اگر در یک چهار ضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

مثال دوم

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.



فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشندآنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$

قضیه های دو شرطی : قضیه هایی که در آن اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم ، باز هم قضیه ای به ما می دهد که از نظر منطقی درست است. قضیه های دو شرطی را با نماد $\leftrightarrow$ (این نماد را می خوانیم : " اگر و تنها اگر ") نشان می دهند. این نماد نشان دهنده آن است که هر کدام از طرفین می توانند طرف دیگر را نتیجه بدهند ; لذا یا هر دو طرف درست است یا هر دو طرف نادرست است.

در واقع در قضیه های دو شرطی، عکس یک قضیه شرطی خود یک قضیه شرطی است!

مثال ها

- در یک مثلث دو ضلع با هم برابرند ; اگر و تنها اگر زاویه های رو به رو به آنها با هم برابر باشند.
- در مثلث متساوی الاضلاع یک پاره خط نیمساز است ; اگر و تنها اگر میانه باشد.

تمرین : با توجه به قضیه فیثاغورس اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC ، قائمه باشد، آنگاه:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

در این صورت عکس قضیه را بنویسید و ثابت کنید عکس آن نیز درست است و قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید.

پس به طور کلی و خلاصه در مورد استدلال های گفته شده داریم :

استقرایی	براساس تعداد محدودی از مشاهدات است.	**تجربی است**	**از جزء به کل**	**نتایج آن احتمالی است**
استنتاجی	بر اساس حقایق پذیرفته شده است.	**منطقی است**	**از کل به جزء**	**نتایج آن قطعی است.**

تمرین

- **در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم، عکس آنچه که داده شده است را بنویسید.**

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهد بود.

ب) اگر در یک چهار ضلعی اضلاع روبرو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس های یک چهار ضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل یکدیگرند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع برابر نباشند، ((ضلع متناظر به ارتفاع بزرگتر)) کوچکتر است از ((ضلع مقابل به ارتفاع کوچکتر)). (**راهنمایی :** شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

<u>برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)</u>

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می شود، برهان غیر مستقیم یا برهان خلف نام دارد. در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض میکنیم حکم درست نباشد (فرض خلف)و به یک تناقض یا یک نتیجه غیر ممکن می رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می شود و خود حکم را می پذیریم.

مسئله: A (فرض) $\Rightarrow$ B (حکم)

اثبات به روش برهان خلف :

A درست و B نادرست $\underbrace{\Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$

① A درست نیست

② تناقض منطقی

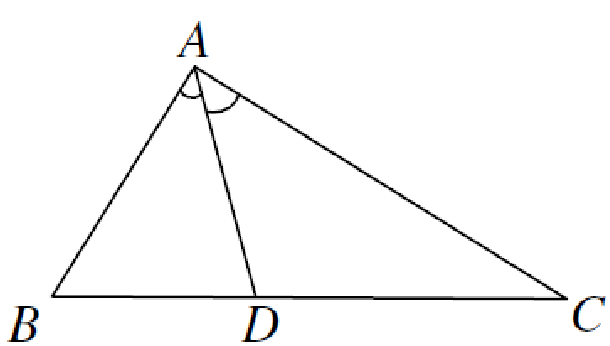
پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌توانند اتفاق بیفتد.

مثال ها

۱- اگر $n \in N$ و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

حل : با استفاده از برهان خلف فرض کنیم که مساله نادرست باشد. یعنی n عددی فرد نباشد.
بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می توان نوشت $n = 2k$ به طوری که k یک عدد طبیعی است.
بنابراین $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مساله در تناقض است،
لذا از ابتدا n نمی توانست عددی زوج باشد.

۲- در مثلث ABC شکل مقابل AD نیسماز زاویه A است. ثابت کنید اگر $BD \neq DC$ آنگاه $AB \neq AC$.



فرض : $BD \neq DC$

حکم : $AB \neq AC$

حل : فرض کنیم که $AB = AC$ (فرض خلف) پس مثلث ABC متساوی الساقین است. از طرفی می دانیم که در هر مثلث متساوی الساقین نیمساز زاویه رأس، میانه وارد بر قاعده نیز می باشد. حال چون مثلث ABC متساوی الساقین است، پس نیمساز زاویه رأس آن یعنی A میانه وارد بر قاعده نیز می باشد و چون میانه ضلع مقابل به خودش را نصف می کند، لذا نتیجه می شود که $BD = DC$ است و خب این خلاف فرض مساله است. در نتیجه فرض خلف باطل می شود و حکم ثابت است و آن را می پذیریم یعنی $AB \neq AC$.

<u>تمرین :</u> با برهان خلف ثابت کنید نمی توان از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

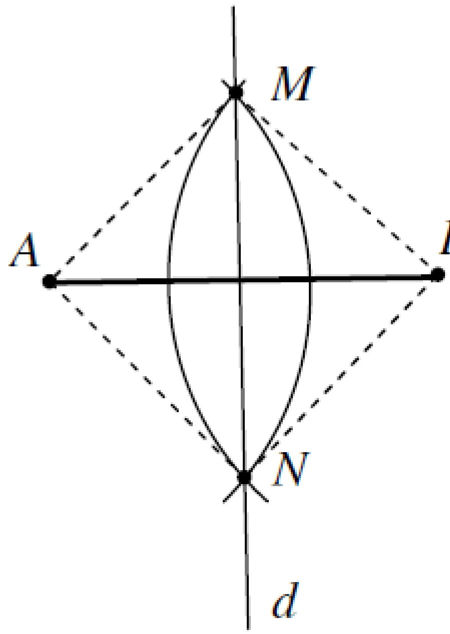
<u>بخش دوم : نگاهی به مسائل ترسیمی</u>

یکی از مسائل اساسی در هندسه مسائلی است که منجر به ترسیم یک شکل با یک ویژگی معین شود. ابزارهایی که در حل اینگونه مسائل استفاده می شود فقط خط کش و پرگار می باشد.

در واقع انسان از دیرباز در حل بسیاری از مسائل هندسی از ترسیم های هندسی کمک گرفته است.

در ادامه چند نمونه از این ترسیم های هندسی که نتایج مهمی هم در بردارند را معرفی می کنیم.

الف) رسم عمود منصف یک پاره خط



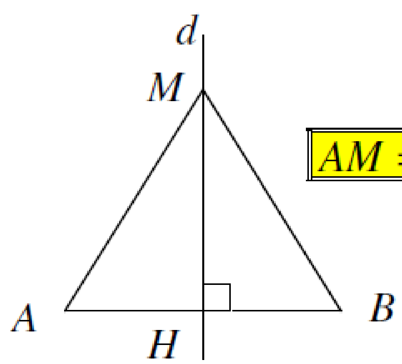
ابتدا دهانه پرگار را به اندازه ای باز می کنیم که شعاع آن از نصف طول پاره خط بیشتر باشد. سپس از دو سر پاره خط AB دو کمان با شعاع های مساوی رسم کرده تا این دو کمان همدیگر را در نقاط N و M قطع کنند. چون دو نقطه N و M از دو سر پاره خط AB به یک فاصله اند، پس روی عمود منصف AB قرار دارند. لذا خط گذرا از این دو نقطه یعنی خط d عمود منصف پاره خط AB است.

نتیجه

هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر همان پاره خط به یک فاصله است.

و هر نقطه که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد،

روی عمود منصف همان پاره خط قرار دارد.



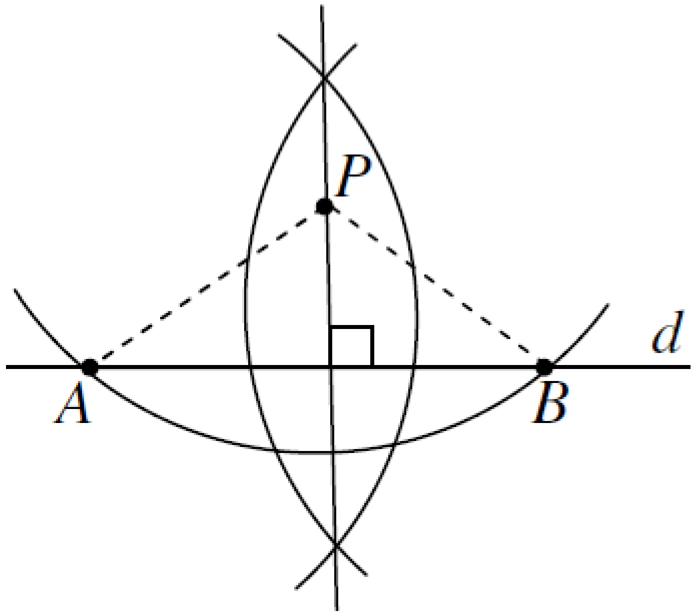
$\boxed{AM = BM}$

به عبارت دیگر می توان گفت : " **عمود منصف یک پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر همان پاره خط به یک فاصله است.** "

<u>**تمرین :**</u> با توجه به شکل بالا در قسمت نتیجه، نشان دهید نقطه M از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.(استفاده از همنهشتی مثلث)

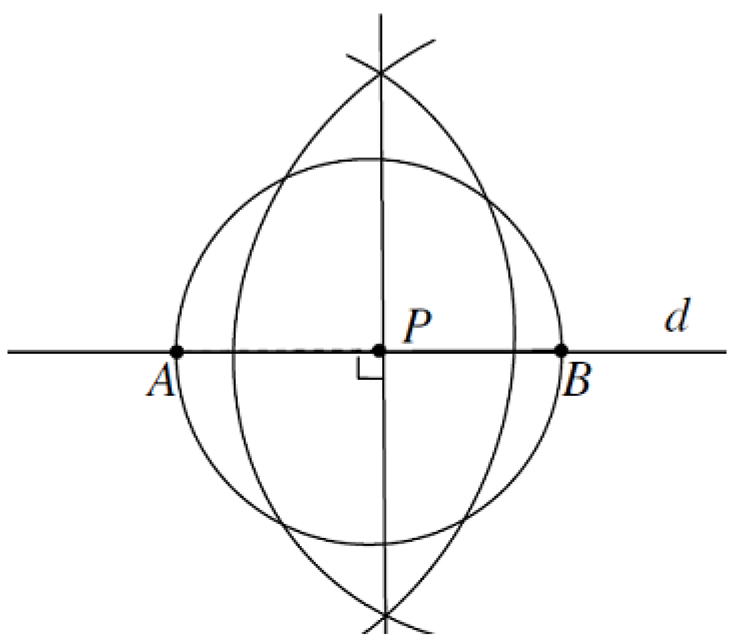
ب) رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه خارج از آن

از نقطه P یک کمان را طوری رسم می کنیم که خط d را در نقاط B و A قطع کند، (برای رسم کمان دهانه پرگار را بیشتر از فاصله نقطه P تا خط d باز می کنیم و به مرکز P یک کمان میزنیم.) اکنون عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم و می دانیم که فاصله نقطه P از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است و عمود منصف رسم شده از نقطه P می گذرد و بر خط d عمود است.



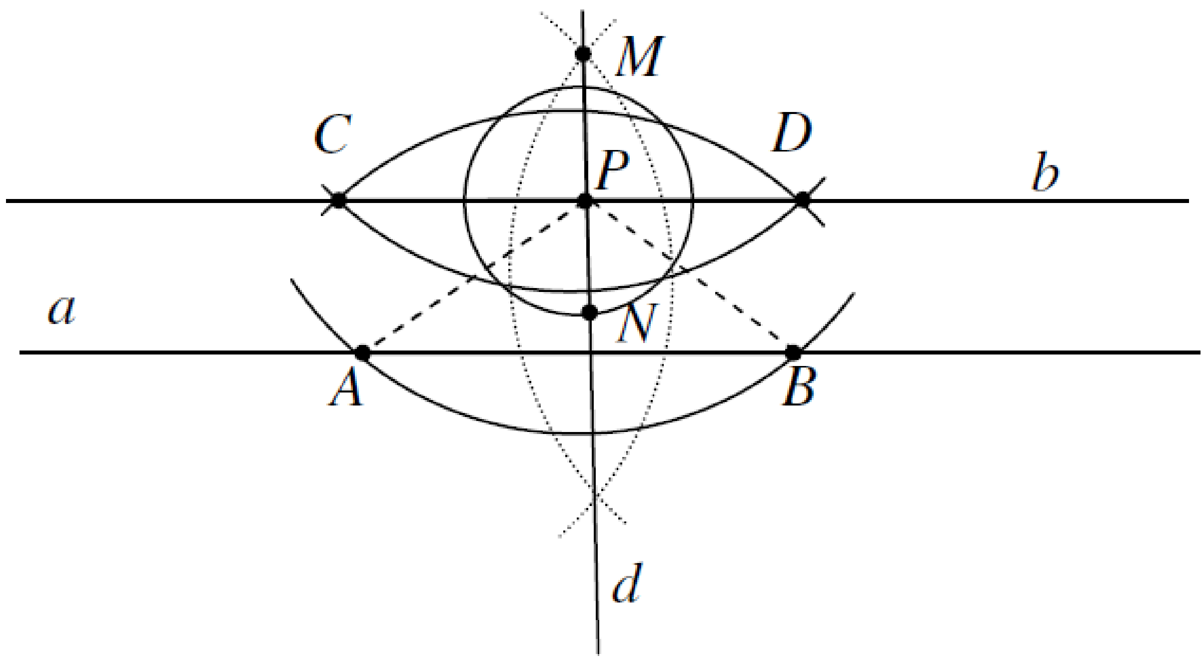
پ) رسم خط عمود بر یک خط ، از نقطه ای روی آن

به مرکز نقطه P دایره ای را رسم کرده تا خط d را در نقاط B و A قطع کند، اکنون عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم که همان جواب مساله است.

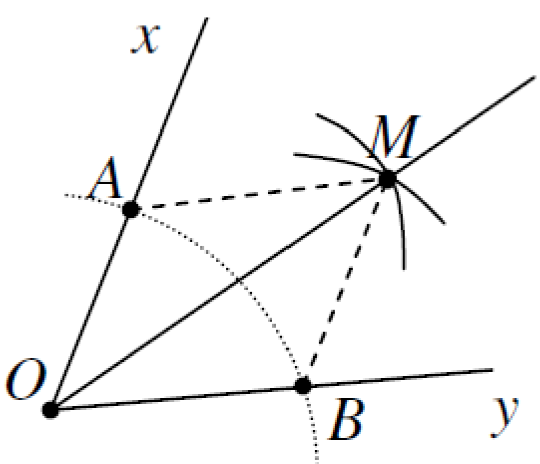


ت) رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه ای غیر واقع بر آن

ابتدا از نقطه P واقع در خارج از خط a یک خط مانند d عمود بر a رسم می کنیم. این خط از نقطه P می گذرد. اکنون از نقطه P واقع بر خط d ، خط b را عمود بر d رسم می کنیم. چون $d \perp a$ و $b \perp d$ ، پس $a \parallel b$ (**دو خط عمود بر یک خط با یکدیگر موازیند**) لذا خط b جواب است.



ث) رسم نیمساز یک زاویه

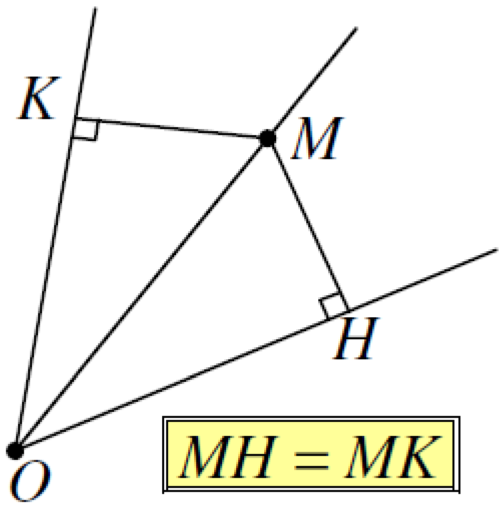


از رأس زاویه xOy یک کمان را طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه را در نقاط B و A قطع کند. اکنون از نقاط B و A دو کمان با شعاع مساوی رسم می کنیم که همدیگر را در نقطه ای مانند M قطع کنند. چون دو مثلث OBM و OAM با یکدیگر همنهشت هستند پس دو زاویه $\measuredangle BOM$ و $\measuredangle AOM$ با یکدیگر برابر هستند.

پس OM نیمساز زاویه xOy می باشد و جواب مساله است.

نتیجه

هر نقطه که روی نیسماز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیسماز آن زاویه قرار دارد.



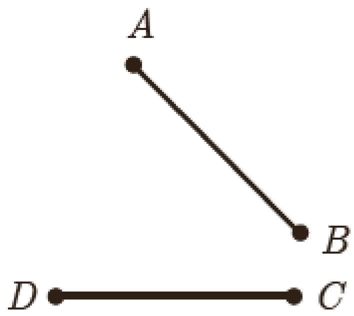
به عبارت دیگر می توان گفت : " **نیمساز یک زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله هستند**".

تمرین : با توجه به شکل روبرو نشان دهید که اگر نقطه M روی نیمساز زاویه $\measuredangle KOH$ باشد، فاصله آن از دو ضلع زاویه مذکور به یک اندازه است.

تمرین ۱ : الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده اند.نقطه ای بیابید که از دو نقطه B و A به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و A هم به یک فاصله باشد.

ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف را O می نامیم. اگر نقطه O روی عمود منصف پاره خط BC باشد و G دایره ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس های چهار ضلعی $ABCD$ نسبت به دایره G چه

وضعیتی دارند؟چرا؟



<u>تمرین ۲ :</u> مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید.

نقاط C و B نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟چرا؟

<u>تمرین ۳ :</u> فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلث متساوی الساقینی که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

ت) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن ۸ سانتی متر مربع باشد.

نسبت و تناسب

در پایه های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده اید .می دانیم که هر دو نسبت مساوی یک تناسب تشکیل می دهند.

می دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می توان ثابت کرد.

با فرض اینکه تمام مخرج ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow ad=bc$ **(طرفین وسطین)**

ب) $ad=bc \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ **(تبدیل حاصل ضرب به تناسب)**

پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \implies \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \implies \begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{d}{b} \\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \end{cases}$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \implies \begin{cases} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \end{cases}$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \implies \begin{cases} \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c} \end{cases}$ (تفصیل نسبت در صورت یا مخرج)

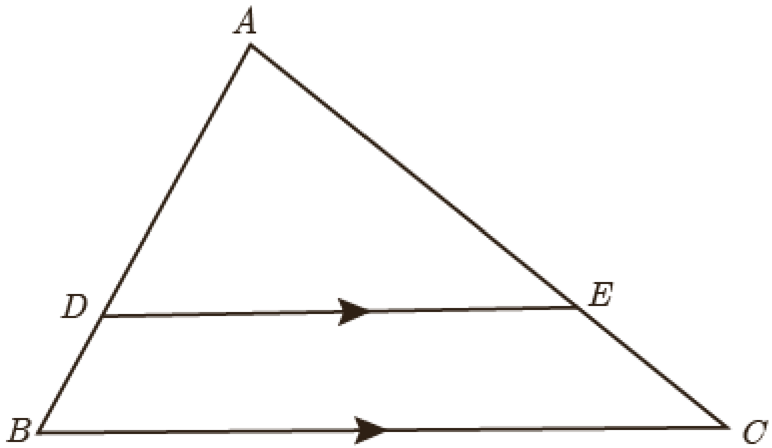
راهنمایی: در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دوطرف عدد ۱ را کم کنید.

رابطه تالس و کاربردهایی از آن

قضیه تالس : اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر یا امتداد آنها را قطع کند، روی آنها پاره خط های متناسب بوجود می آورد.

فرض کنید مانند شکل زیر پاره خط DE موازی ضلع BC باشد. می خواهیم نشان دهیم که :

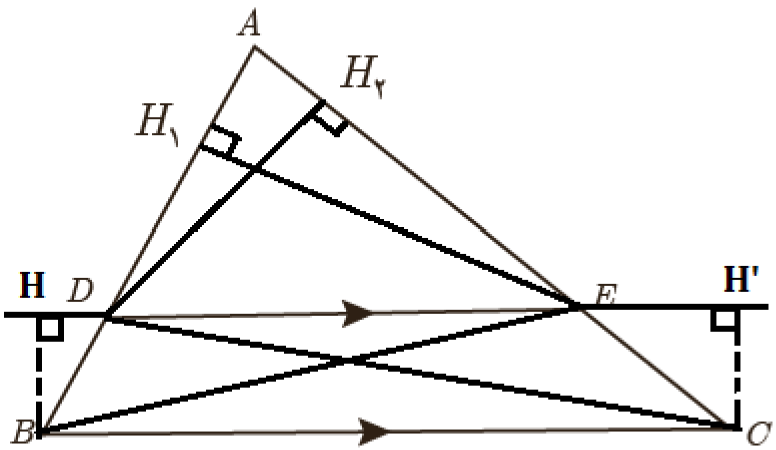
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$



مرحله اول : ابتدا از نقطه D به C و از نقطه E به B وصل کنید. مساحت مثلث های DEB و DEC که آنها را با S_{DEB} و S_{DEC} نشان می دهیم، با هم برابر هستند. زیرا اگر از C و B به ترتیب ارتفاع های CH' و BH را بر امتداد DE رسم کنیم، (شکل صفحه بعد) داریم : $S_{DEC}=\frac{1}{2}\times CH'\times DE$ و $S_{DEB}=\frac{1}{2}\times BH\times DB$

و در نهایت داریم :

$$\begin{cases} BH=CH' \\ DE=DE \end{cases} \Longrightarrow S_{DEB}=S_{DEC}$$



مرحله دوم : از نقطه E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید و سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

در این صورت با توجه به مطالب ذکر شده در بالا داریم :

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{1}{2}\times EH_1\times AD}{\frac{1}{2}\times EH_1\times DB}=\frac{AD}{DB}\quad(1)\qquad\qquad \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{1}{2}\times DH_2\times AE}{\frac{1}{2}\times DH_2\times EC}=\frac{AE}{EC}\quad(2)$$

پس با توجه به اینکه در مرحله اول $S_{DEB}=S_{DEC}$ است. پس در رابطه شماره ۲ در مرحله دوم با قرار دادن S_{DEB} به جای S_{DEC} داریم :

$$\begin{cases}\dfrac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\dfrac{AD}{DB}\\[2ex]\dfrac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\dfrac{AE}{EC}\end{cases}\Rightarrow\quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

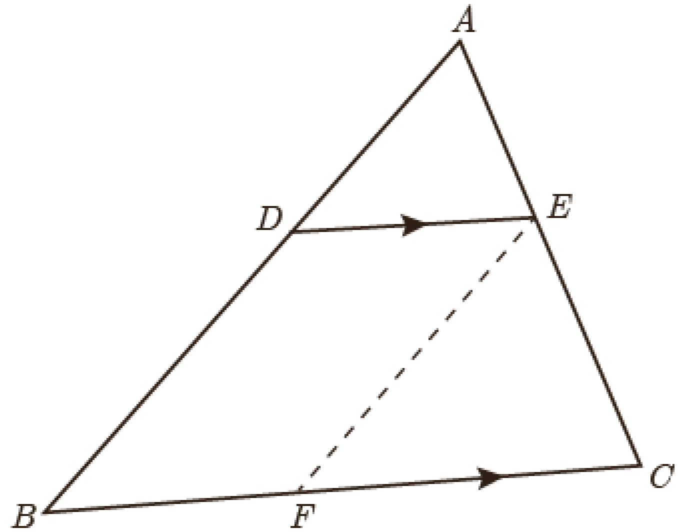
نتیجه

رابطه تالس را می توان به صورت زیر هم نوشت :

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\ \Rightarrow\left(\text{ترکیب نسبت در مخرج}\right)\ \frac{AD}{DB+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\ \Rightarrow\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

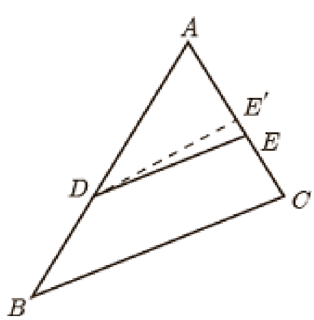
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\ \Rightarrow\left(\text{تفصیل نسبت در صورت}\right)\ \frac{AB-AD}{AB}=\frac{AC-AE}{AC}\ \Rightarrow\ \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

تعمیم قضیه تالس : در شکل زیر پاره خط های DE و BC با یکدیگر موازی هستند. و با توجه به قضیه تالس داریم :



$$\begin{cases} \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \\ \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{AE}{AC} \\ BF = DE \text{ (چهار ضلعی } DEFB \text{ متوازی اضلاع است)} \end{cases} \Longrightarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

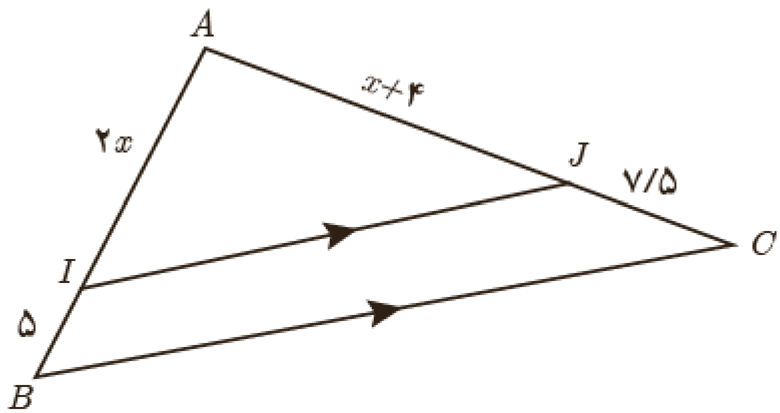
عکس قضیه تالس : مانند شکل مقابل در مثلث ABC ، اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ باشد، آنگاه $DE \parallel BC$.



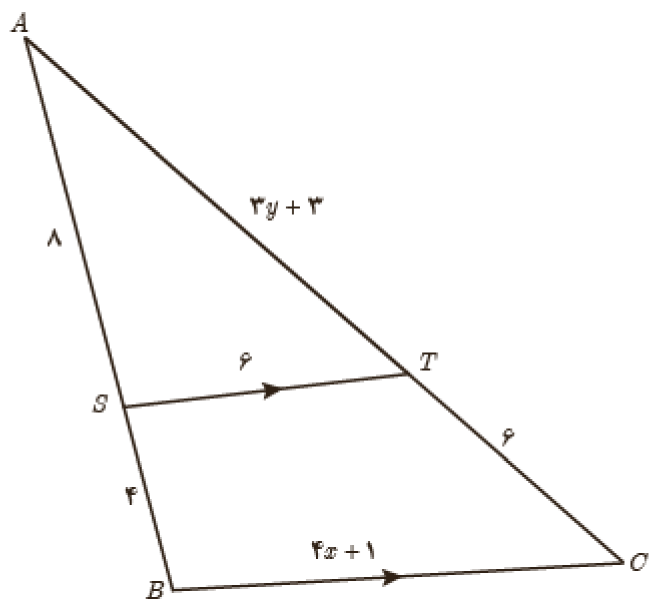
اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$. حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE = AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \parallel BC$ و $DE \nparallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرضِ غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد، یعنی $DE \parallel BC$ است.

تمرین

۱- با توجه به شکل زیر، مقدار x و اندازه پاره خط های AJ و AI را بدست آورید.

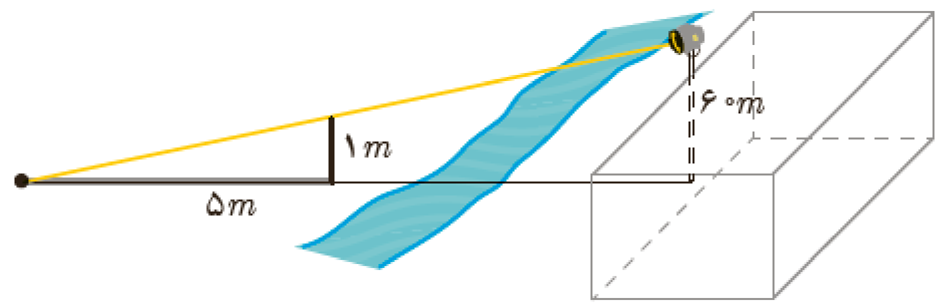


۲- در شکل زیر، $ST \parallel BC$ است، مقدار y و x را بدست آورید.

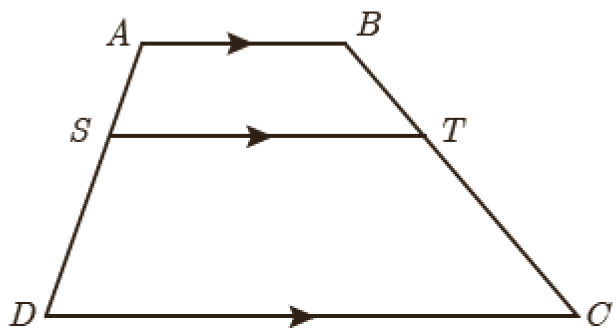


۳- مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را با توجه به کسر $\frac{3b+7}{7+2b} = \frac{3a+10}{10+2a}$ بدست آورید.

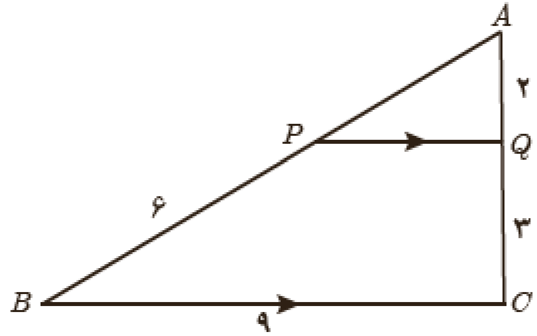
۴- بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند .برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است .فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



۵- در ذوزنقه زیر، $AB \parallel ST \parallel DC$ است، ثابت کنید : $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$



۶- در شکل زیر، $BC \parallel PQ$ است، طول پاره خط های PQ و AP را بدست آورید.

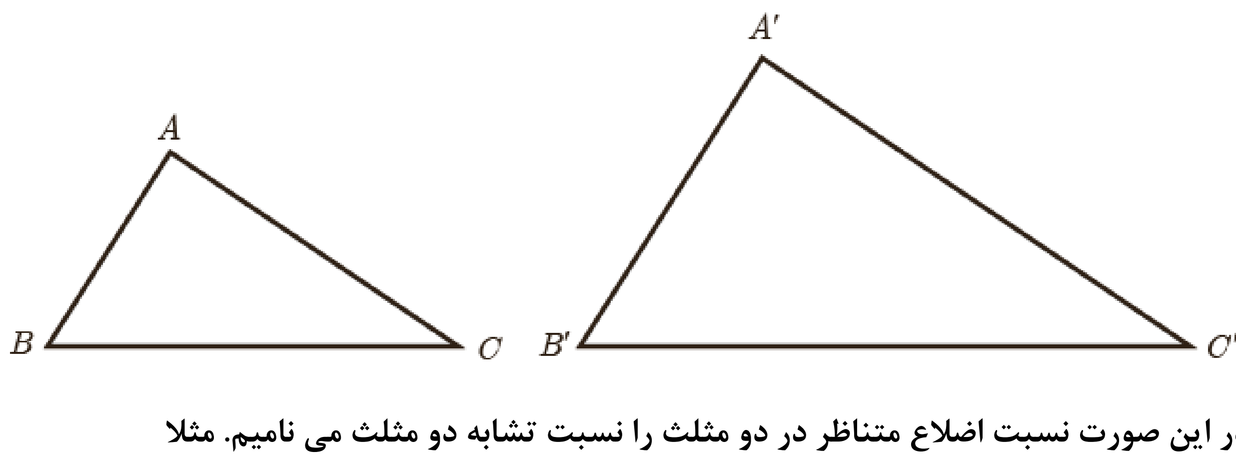


۷- ثابت کنید در هر مثلث پاره خطی که وسط های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

تشابه

در پایه نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه اند، هرگاه زوایای متناظر با هم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشند.

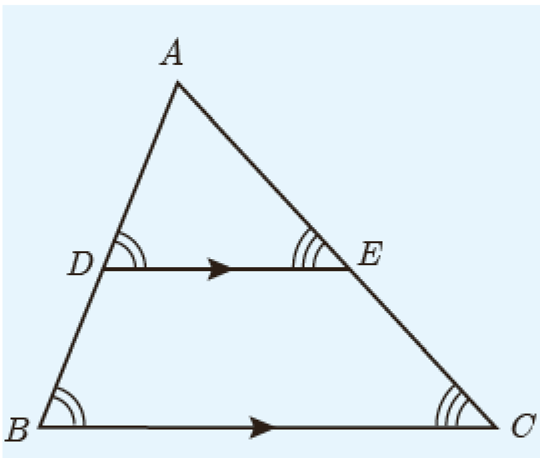
$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A'} \text{ و } \hat{B}=\hat{B'} \text{ و } \hat{C}=\hat{C'} \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می نامیم. مثلا اگر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{2}{3}$ می گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{2}{3}$ متشابه است.

در این صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{3}{2}$ متشابه خواهد بود.

قضیه اساسی تشابه مثلث : اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث ، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی بوجود می آید که با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



با استفاده از قضیه اساسی تشابه مثلث ها می توان سه قضیه بعد را که حالت های تشابه دو مثلث را بیان می کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.

قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C')$$

قضیه ۲: هرگاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه اند.

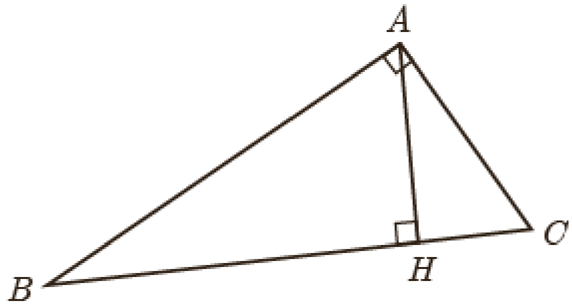
$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}, \hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'\right)$$

قضیه ۳ : هرگاه اندازه های سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

برخی روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم الزاویه به وجود می آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه اند.



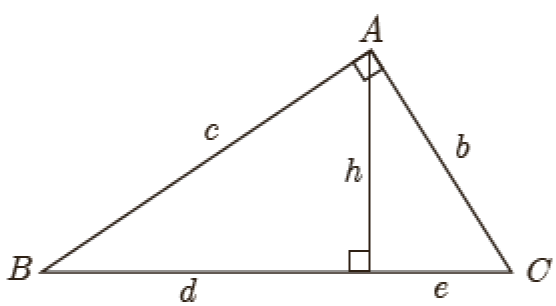
۱ $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{H}C \Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BC}=\frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^{۲}=HC\times BC$

۲ $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{H}B \Rightarrow \frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}=\frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^{۲}=HB\times BC$

۳ $A\overset{\Delta}{H}B \sim A\overset{\Delta}{H}C \Rightarrow \frac{AH}{BH}=\frac{AC}{AB}=\frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^{۲}=CH\times BH$

تمرین

۱- درمثلث قائم الزاویه زیر در هر مورد سعی کنید با ساده ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



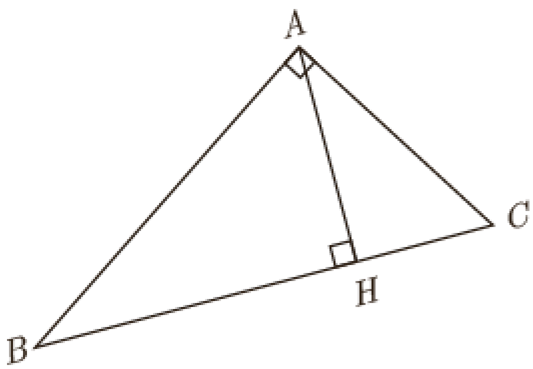
الف) $h=5$ ، $d=7$ ، $e=?$

ب) $d=5$ ، $e=3$ ، $b=?$ ، $c=?$

پ) $h = ?$ ، $b = 6$ ، $c = 8$

۲- در مثلث قائم الزاویه زیر در هر حالت، اندازه پاره خط خواسته شده را به دست آورید.

الف) $AC = ?$ ، $AB = ?$ ، $AH = ?$ ، $BH = 9$ ، $BC = 10$

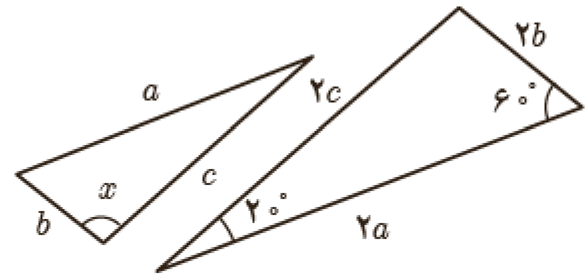


ب) $AB = ?$ ، $AH = ?$ ، $BC = ?$ ، $CH = 2$ ، $AC = 5$

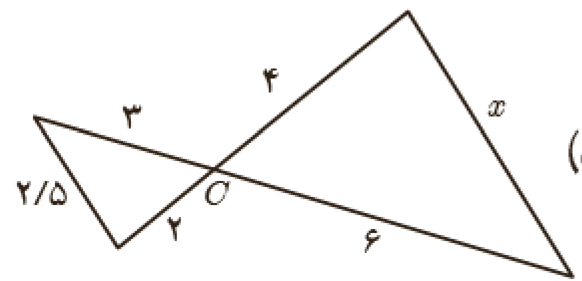
پ) $AC = ?$ ، $BC = ?$ ، $BH = ?$ ، $AH = 6$ ، $AB = 12$

۳- در هر قسمت تشابه مثلث ها را ثابت کنید و مقدار y و x را بدست آورید.

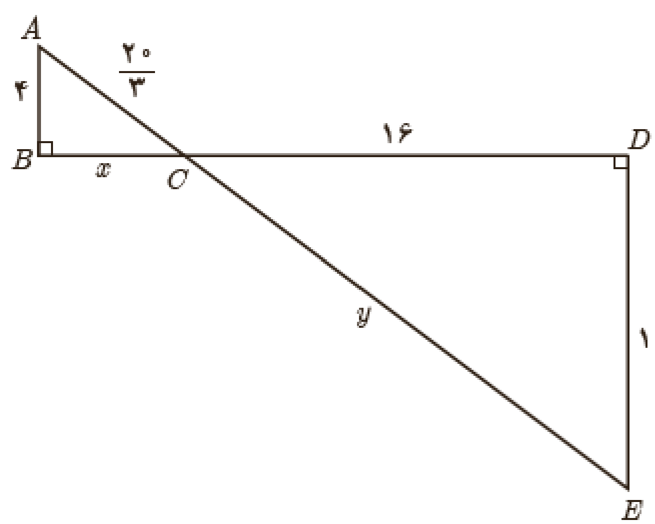
الف)



ب)



پ)

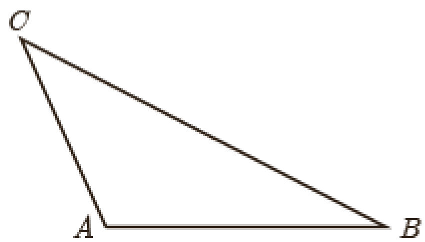


نکته مهم : اگر دو مثلث $A'B'C'$ و ABC با هم متشابه باشند و نسبت تشابه آنها برابر K باشد در این صورت داریم :

$$\frac{\text{محیط } ABC}{\text{محیط } A'B'C'} = K \qquad \text{و} \qquad \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } A'B'C'} = K^2$$

۱- دو مثلث $A'B'C'$ و ABC را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید.

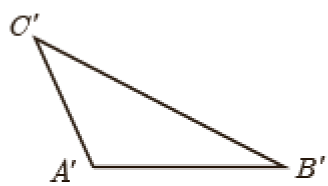
به گونه ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ حال ارتفاع های $A'H'$ و AH را در دو مثلث رسم کنید.



الف) ثابت کنید مثلث های $A'H'B'$ و AHB با هم متشابه اند.

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را بدست آورید.

پ) نسبت مساحت های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را بدست آورید.



ت) نسبت محیط های دو مثلث $A'B'C'$ و ABC را بدست آورید.