فصل ششم : حجم و سطح

درس اول: حجم های هندسی

حجم: به مقدار فضایی که یک جسم اشغال می کند حجم می گویند و در محاسبات آن را با v نمایش می دهند.

اگر به اطراف خود دقت کنیم میبینیم که همه ی اشیاء در اطراف ما حجم دارند و می توان بر اساس ویژگی های ظاهری آن ها را دسته بندی کرد.

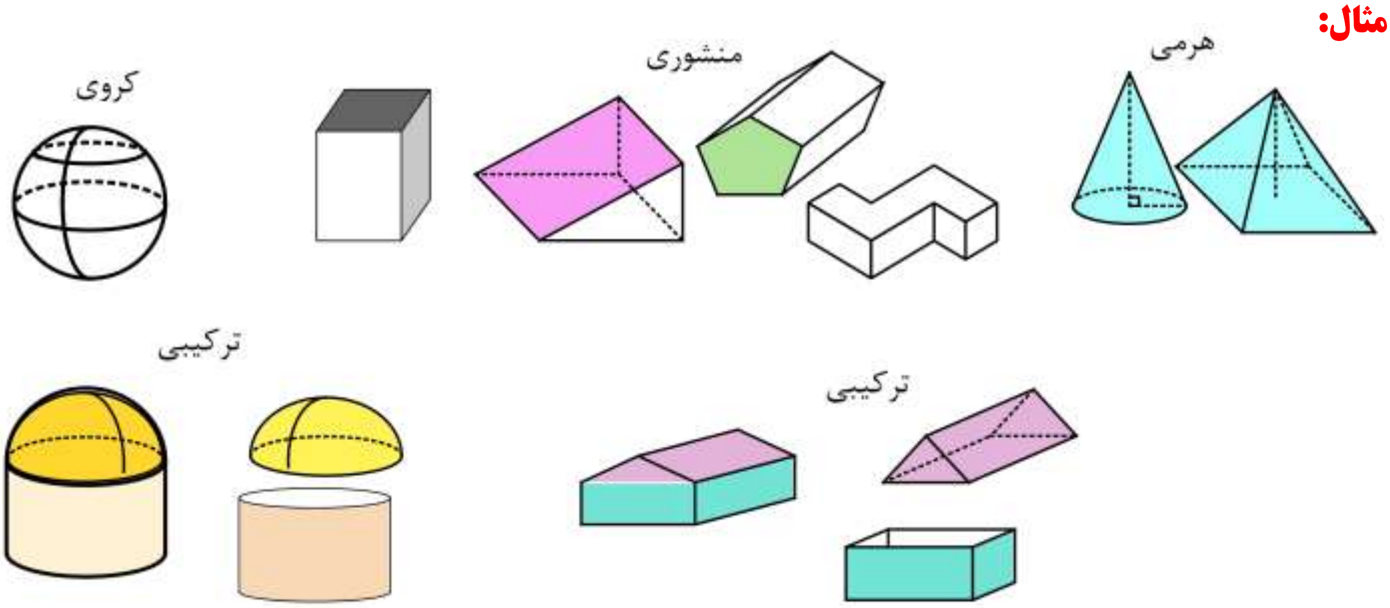
انواع حجم ها:

۱) حجم های هندسی: شکل مشخص و تعریف شده ای دارند مانند مکعب ، کره ، استوانه و ...

۲) حجم های غیرهندسی: شکل مشخص و تعریف شده ای ندارند مانند تکه سنگ ، مجسمه و ...

حجم های هندسی نیز به سه دسته ی اصلی **منشوری** ، **هرمی** و **کروی** تقسیم بندی می شوند. برخی از حجم های هندسی نیز ترکیبی از این سه نوع هستند.

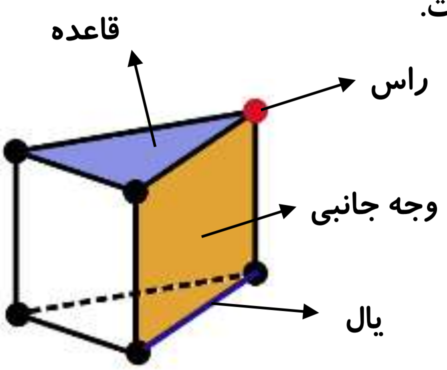
مثال:



با توجه به ویژگی شکل های بالا می توان برای هر دسته تعریفی بیان کرد.

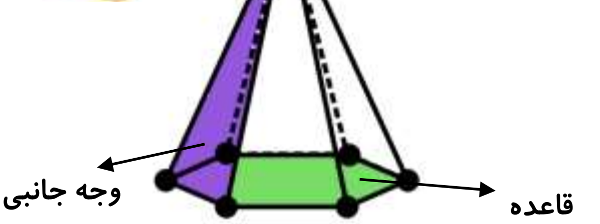
حجم های منشوری

حجم های منشوری بین دو صفحه ی موازی قرار میگیرند(به این دو صفحه **قاعده** می گویند.) و سطح های اطراف که به آن ها **سطح جانبی** می گویند از مستطیل ساخته شده است.



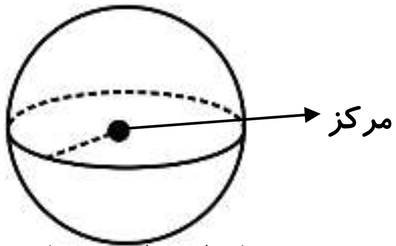
حجم های هرمی

دارای یک قاعده هستند و سطح جانبی آن از مثلث تشکیل می شود که در یک راس مشترک هستند.

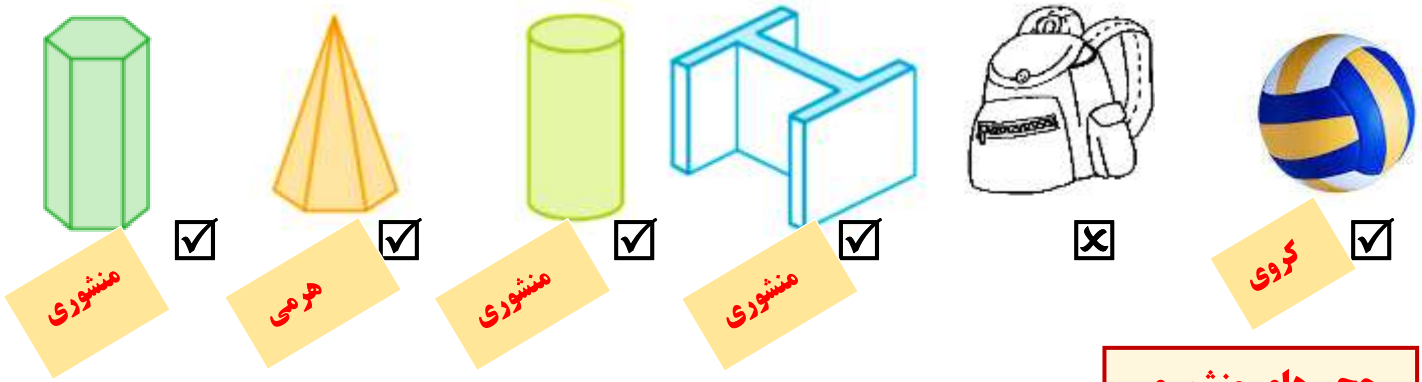


حجم های کروی

کُره یک جسم هندسی کاملا گرد در فضا است. (مانند توپ) که هر نقطه روی سطح قرار دارد در فاصله ی یکسان از مرکز کره قرار دارد. به این فاصله شعاع کره می گویند.



سوال: حجم های هندسی را مشخص کنید و نوع آن (منشوری ، هرمی یا کروی بودن هر کدام) را تعیین کنید



حجم های منشوری

حجم های منشوری بین دو سطح موازی قرار دارند و بر اساس تعداد پهلو ها یا همان سطح های اطرافشان نامگذاری می شوند به طور مثال منشوری با قاعده ی مثلث را یک منشور سه پهلو می نامیم.

به دو سطح موازی و هم نهشت ، **قاعده ی منشور** می گوییم.

به سطح های اطراف منشور که معمولا مستطیل و گاهی متوازی الاضلاع هستند **سطح جانبی** می گوییم

به محل برخورد سطح ها **یال** می گوییم.

به نقطه ی برخورد هر سه سطح، **راس** می گوییم.

فاصله ی دو قاعده را **ارتفاع** منشور می نامیم.

برای درک بهتر مفاهیم بالا به این مثال توجه کنید.

مثال:

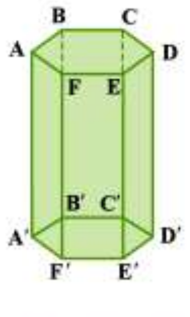
تعداد راس ها : ۱۲

تعداد وجه های جانبی: ۶

تعداد یالها: ۱۸

تعداد قاعده ها: ۲

تعداد وجه ها: ۸



منشور شش پهلو

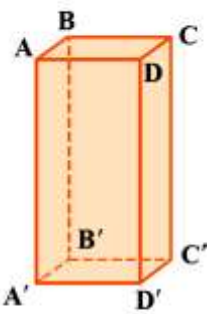
تعداد راس ها : ۸

تعداد وجه های جانبی: ۴

تعداد یالها: ۱۲

تعداد قاعده ها: ۲

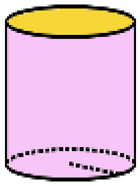
تعداد وجه ها: ۶



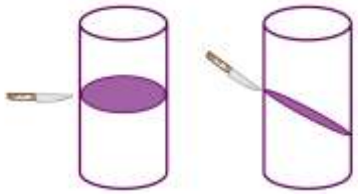
منشور چهارپهلو

@riazicafe

طبق الگویی که در مثال های بالا مشاهده می شود یک منشور nپهلو ، n وجه جانبی ، n ۲ راس ، n ۳ یال و n+۲ وجه دارد.

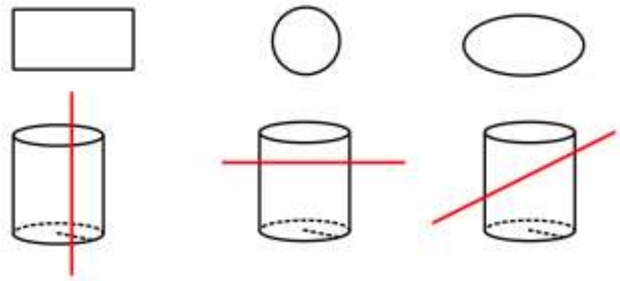


نکته: استوانه نوعی حجم منشوری است که قاعده اش دایره است.



اگر با استفاده از خمیر بازی (یا برش دادن سیب زمینی) یک استوانه بسازیم و با چاقو آن را برش دهیم و سطح برش خورده را رنگ کرده و روی کاغذ بزنیم ، با توجه به نحوه ی برش زدن ممکن است تصویر روی کاغذ شبیه دایره بیضی یا مستطیل باشد. به این کار مقطع زدن می گویند.

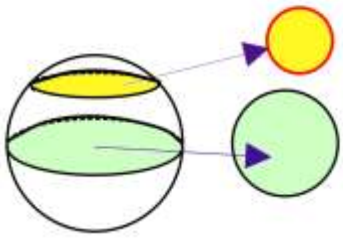
با مقطع زدن یک استوانه و با توجه به نوع برش (خط قرمز مسیر حرکت چاقو را نشان می دهد) ، سطح های زیر ایجاد می شود



سوال۱: مقطع یک کره چیست؟

آیا ممکن است مقطع یک کره و مکعب مثل هم باشند؟

پاسخ: یک کره به هر طریقی مقطع بزنیم تصویر حاصل یک دایره است که بزرگی آن به اندازه ی شعاع کره و یا کوچکتر از آن است.(شکل۱)

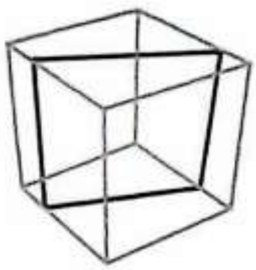


نکته: اگر صفحه ی مقطع از مرکز کره بگذرد شعاع دایره ی سطح مقطع برابر با شعاع کره و بزرگترین حالت ممکن است.

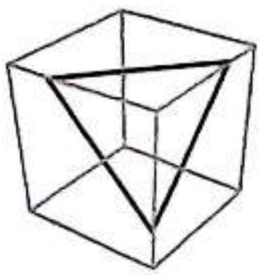
مقطع یک مکعب چندضلعی است. با توجه به نوع برش ممکن است مثلث مربع مستطیل پنج ضلعی و شش ضلعی باشد. پس مقطع کره و مکعب نمی تواند شبیه به همدیگر باشد.

مقطع شش ضلعی

مقطع پنج ضلعی



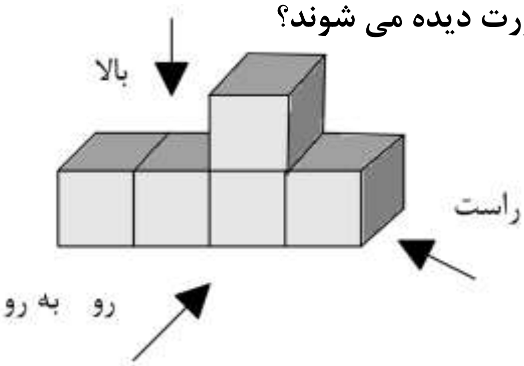
مقطع چهارضلعی

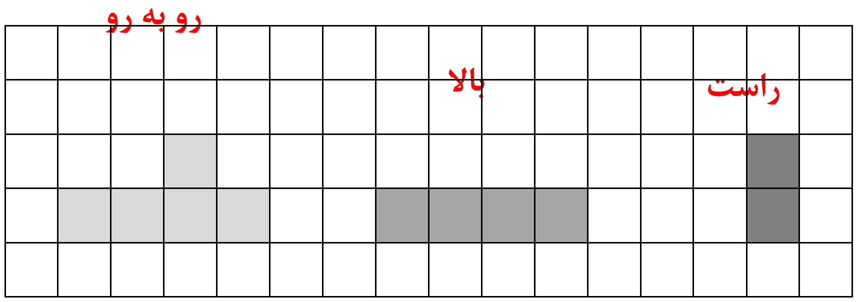


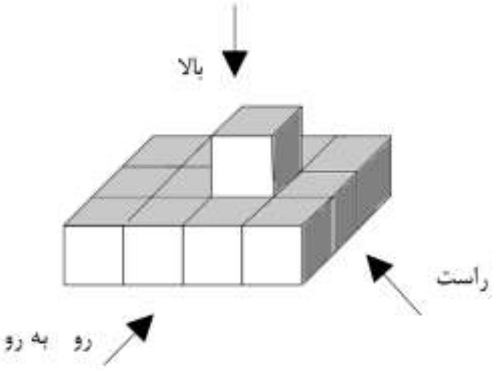
مقطع مثلث

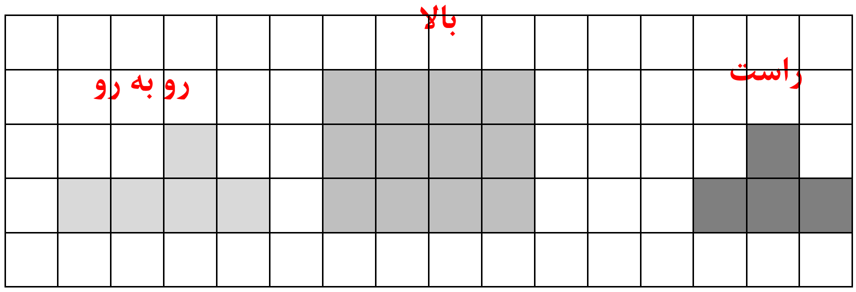
سوال۲ : هر کدام از حجم های رسم شده از جهت های مختلف به چه صورت دیده می شوند؟

پاسخ:

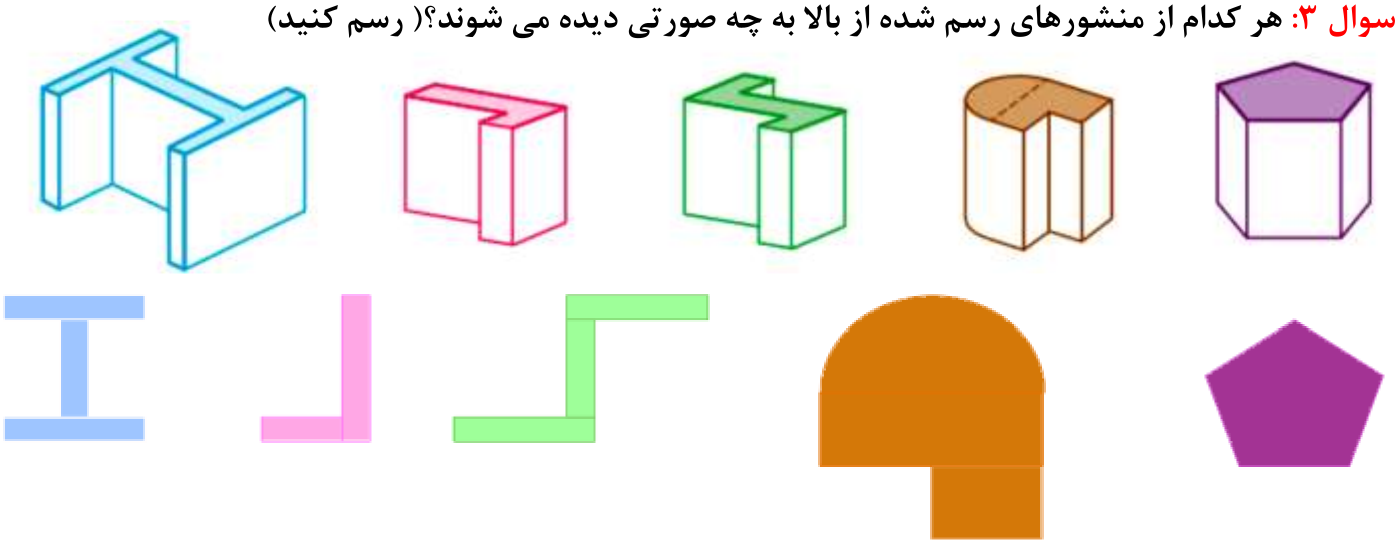








سوال ۳: هر کدام از منشورهای رسم شده از بالا به چه صورتی دیده می شوند؟(رسم کنید)



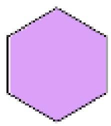
نکته: همانطور که در مثال های بالا دیدید ، دید از بالا یا مقطع یک منشور ، همان قاعده ی منشور است.

سوال۴: مقطع هر کدام از منشورهای زیر را رسم کنید.

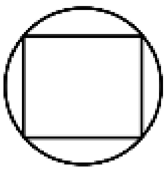
الف) یک منشور شش پهلو

ب) یک مکعب درون استوانه

پاسخ الف



پاسخ ب

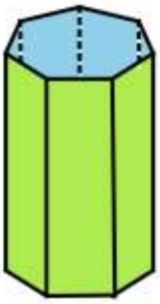


سوال۵: با توجه به هر شکل به سوالات زیر پاسخ دهید.

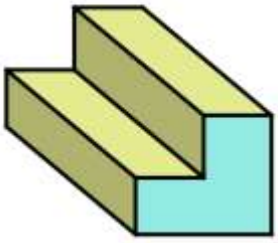
۱)تعداد وجه های جانبی:

۲)تعداد راس ها:

۳)تعداد یال ها:



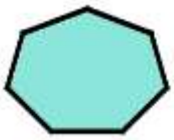
الف



ب

پاسخ:

الف) قاعده ی منشور یک هفت ضلعی است.

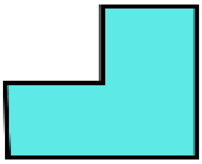


تعداد وجه های جانبی به اندازه ی اضلاع قاعده است پس: ۷ وجه جانبی دارد.

تعداد راس ها دو برابر تعداد اضلاع قاعده است پس: ۱۴ راس دارد .

تعداد یال ها سه برابر تعداد اضلاع قاعده است پس: ۲۱ یال دارد.

ب) قاعده ی منشور یک ۶ ضلعی است.



تعداد وجه های جانبی به اندازه ی اضلاع قاعده است پس: ۶ وجه جانبی دارد.

تعداد راس ها دو برابر تعداد اضلاع قاعده است پس: ۱۲ راس دارد .

تعداد یال ها سه برابر تعداد اضلاع قاعده است پس: ۱۸ یال دارد.

کاردستی: به کمک نی و خمیر بازی و مانند نمونه های زیر منشورهای مختلف بسازید و به سوال قبل پاسخ دهید.

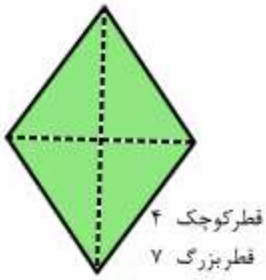
فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های صفحه ی ۷۲ از کتاب درسی را حل کن.

محاسبه ی حجم منشوری

در دوره ی ابتدایی با مساحت دایره و چندضلعی ها و حجم مکعب مستطیل آشنا شده اید. برای یادآوری مطالب به جدول و مثالهای زیر توجه کنید.

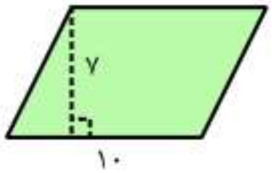
نام شکل	فرمول مساحت	نام شکل	فرمول مساحت
مربع	خودش × یک ضلع	مثلث	۲ ÷ (ارتفاع × قاعده)
مستطیل	عرض×طول	لوزی	۲ ÷ (قطر بزرگ × قطر کوچک)
متوازی الاضلاع	قاعده×ارتفاع	ذوزنقه	۲ ÷ (ارتفاع × مجموع دوقاعده)
دایره : ۳/۱۴ × شعاع × شعاع یا π× شعاع × شعاع			

مثال ۱) مساحت شکل های زیر را به دست آورید.



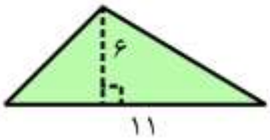
مساحت لوزی $= \dfrac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{۲}$

$s = \dfrac{۴ \times ۷}{۲} = ۱۴$



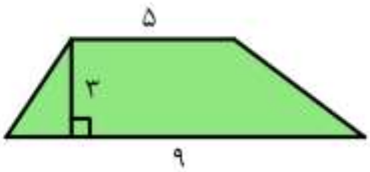
ارتفاع × قاعده = مساحت متوازی الاضلاع

$S = ۷ \times ۱۰ = ۷۰$



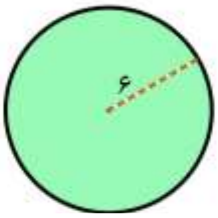
مساحت مثلث $= \dfrac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$

$s = \dfrac{۶ \times ۱۱}{۲} = ۳۳$



مساحت ذوزنقه $= \dfrac{\text{مجموع دو قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$

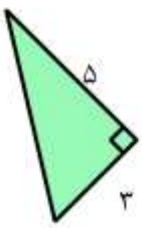
$s = \dfrac{۳ \times (۵+۹)}{۲} = ۲۱$



شعاع $: r$ $\quad \pi \simeq ۳$

مساحت دایره $= r \times r \times \pi$

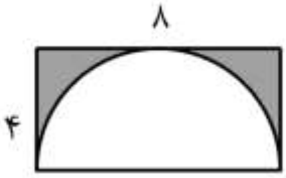
$S = ۶ \times ۶ \times ۳ = ۱۰۸$



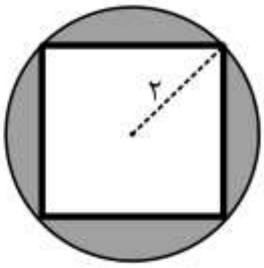
مساحت مثلث $= \dfrac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$

$s = \dfrac{۳ \times ۵}{۲} = ۷/۵$

مثال ۲) مساحت قسمت رنگ شده را به دست آورید.



الف



ب

پاسخ:

الف) ابتدا مساحت مستطیل با طول ۸ و عرض ۴ و مساحت نیم دایره ای به شعاع ۴ را محاسبه می کنیم سپس مساحت نیمدایره را از مساحت مستطیل کم می کنیم:

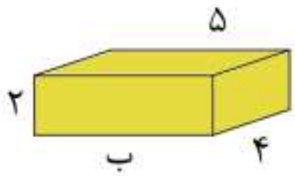
مستطیل $s = ۴\times۸=۳۲$ نیم دایره $s = \frac{۴\times۴\times۳}{۲} = ۲۴$ $\Rightarrow$ رنگی $s = ۳۲-۲۴=۸$

ب) مساحت دایره ای به شعاع ۲ و مربعی به قطر ۴ را محاسبه و تفریق را انجام می دهیم

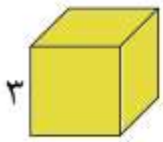
نکته: برای محاسبه ی مساحت مربعی به قطر ۴ از دستور مساحت لوزی استفاده می کنیم

دایره $s = ۲\times۲\times۳=۱۲$ لوزی $s = \frac{۴\times۴}{۲} = ۸$ $\Rightarrow$ رنگی $s = ۱۲-۸= ۴$

مثال ۳) حجم شکل های مقابل را به دست آورید.



ب



الف

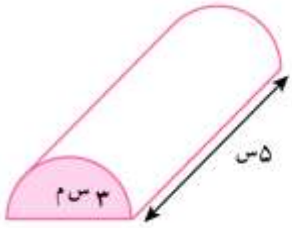
نکته: با توجه به دانسته های قبل می دانیم مقدار حجم را با v نمایش می دهیم و برای محاسبه ی حجم مکعب مستطیل از رابطه ی طول× عرض × ارتفاع استفاده می شود پس :

ب) مکعب مستطیل $v = ۵\times۲\times۴=۴۰$ و   الف) مکعب $v = ۳\times۳\times۳=۲۷$

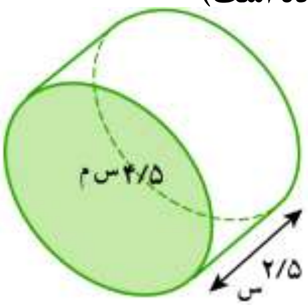
یکی از دسته های حجم های هندسی منشور ها هستند. منشور به یک شکل سه بعدی گفته می شود که دارای دو سطح موازی به نام قاعده است. به سطح های اطراف قاعده "وجه های جانبی " گفته می شود. به فاصله ی دو قاعده "ارتفاع منشور" می گویند. به طور کلی برای محاسبه ی حجم شکل های منشوری مساحت قاعده ی منشور را در ارتفاع منشور ضرب می کنیم. اگر مساحت قاعده را با حرف s و ارتفاع منشور را با h نامگذاری کنیم حجم منشور با رابطه ی $v = s \times h$ به دست می آید.

به مثالهای زیر توجه کنید. (قاعده ی هر منشور رنگ شده و مساحت آن کنارش نوشته شده است)

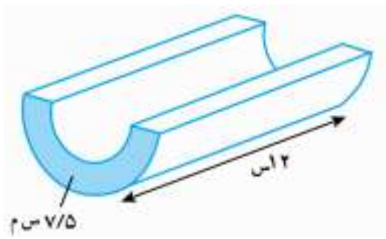
$v = ۳ \times ۵ = ۱۵$
سانتیمتر مکعب



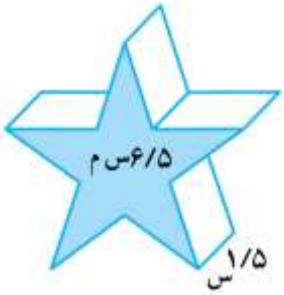
$v = ۴/۵ \times ۲/۵ = ۱۱/۲۵$
سانتیمتر مکعب



$v = ۷/۵ \times ۱۲ = ۹۰$
سانتیمتر مکعب



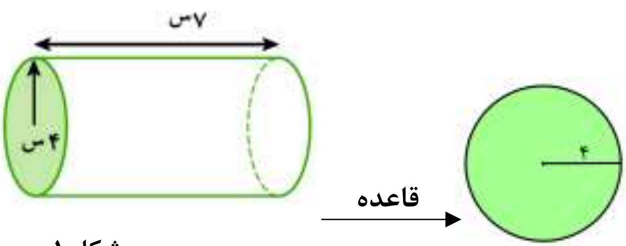
$v = ۶/۵ \times ۱/۵ = ۹/۷۵$
سانتیمتر مکعب



نکته ۱ : برای اندازه گیری حجم از واحدهای مختلفی مانند مترمکعب ($m^۳$) سانتی متر مکعب ($cm^۳$) لیتر (L) سی سی (CC) و ... استفاده می شود .

نکته ۲: هر متر مکعب ، ۱۰۰۰ لیتر است ، هر لیتر، ۱۰۰۰سی سی یا ۱۰۰۰ سانتیمتر مکعب است.

سوال الف: حجم هر کدام از شکل های زیر را محاسبه کنید. (π را ۳ در نظر بگیرید)

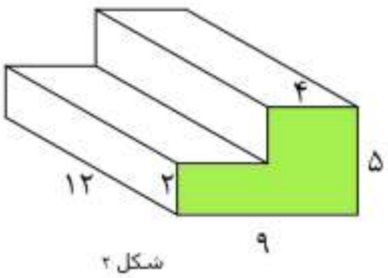


شکل ۱

پاسخ ۱) : مساحت دایره ای به شعاع ۴ برابر است با :

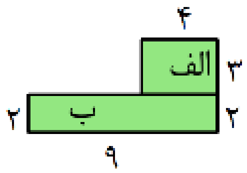
$s = ۴\times۴\times۳=۴۸\ cm^۲$ پس حجم شکل برابر است با:

$v = s \times h = ۴۸\times۷=۳۳۶\ cm^۳$



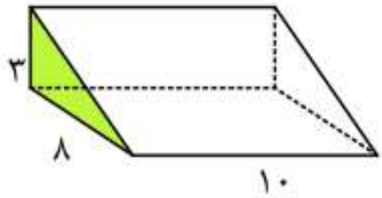
شکل ۲

پاسخ ۲): قاعده ی منشور دو مستطیل است پس مساحت قاعده برابر است با :



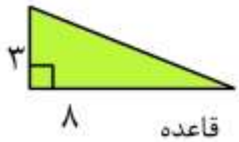
$s_{الف} = ۳\times۴ = ۱۲$ و $s_{ب} = ۲\times۹ = ۱۸ \rightarrow s = ۱۲+۱۸ = ۳۰$

$v = s \times h = ۳۰\times۱۲=۳۶۰$



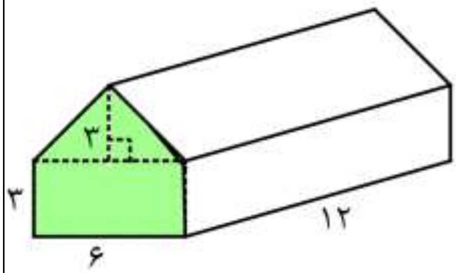
شکل ۳

پاسخ ۳: ابتدا توجه کنیم قاعده ی منشور مثلث زیر است:



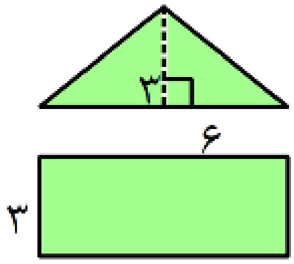
$$s = \frac{۳ \times ۸}{۲} = ۱۲$$

بنابراین حجم منشور برابر است با : $v = s \times h = ۱۲\times۱۰=۱۲۰$



شکل ۴

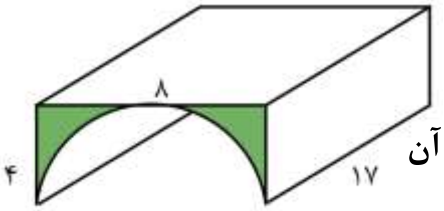
پاسخ ۴: قاعده ی منشوربه صورت شکل زیر(مثلث و مستطیل) است.



پس مساحت آن برابر است با:

$s = \frac{۳\times۶}{۲}=۹$ مثلث و $s = ۳\times۶ = ۱۸$ مستطیل $\rightarrow$ کل $S = ۹+۱۸ = ۲۷$

بنابراین حجم منشور برابر است با : $v = s \times h = ۲۷\times۱۲=۳۲۴$



شکل ۵

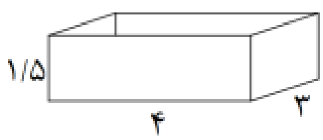
پاسخ ۵: ابتدا توجه کنیم قاعده ی منشور مستطیلی با ابعاد ۴ و ۸ است که از آن یک نیم دایره به قطر ۸ حذف شده پس:

$s = ۴\times۸ = ۳۲$ مستطیل و $s = \frac{۴\times۴\times۳}{۲} = ۲۴$ نیم دایره $\rightarrow$ رنگی $s = ۳۲-۲۴ = ۸$

بنابراین حجم منشور برابر است با : $v = s \times h = ۸\times۱۷=۱۳۶$

سوال ب :

حوضی به شکل مکعب مستطیل با ابعاد ۴ و ۳ و ۱/۵ متر است. این حوض خالی را با شیر آبی که در هر دقیقه ۶۰ لیتر آب وارد آن می کند ، پر می کنیم. چند ساعت طول می کشد تا حوض پر شود؟



پاسخ: ابتدا حجم حوض را محاسبه می کنیم: $v = ۴ \times ۳\times۱/۵ = ۱۸\ m^۳$

هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است پس: $v = ۱۸\ m^۳ = ۱۸\times۱۰۰۰ = ۱۸۰۰۰\ L$

در هر دقیقه ۶۰ لیتر آب وارد حوض می شود بنابراین: دقیقه ۱۸۰۰۰÷۶۰=۳۰۰ طول می کشد تا حوض پر از آب گردد. هر ساعت ۶۰ دقیقه است بنابراین ۳۰۰÷۶۰=۵ پس ۵ ساعت طول می کشد تا حوض از آب پر شود.

سوال ج:

یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰سانتی متر و شعاع قاعده ی آن ۸ سانتی متر است. آب داخل این پارچ را در لیوان هایی به شکل استوانه به ارتفاع ۱۰ سانتیمتر و شعاع قاعده ی ۴ سانتیمتر می ریزیم. این آب چند لیوان را پر می کند؟

پاسخ: برای پیدا کردن تعداد لیوان ها باید حجم پارچ آب را بر حجم لیوان تقسیم کنیم. با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه : $v =$ شعاع × شعاع × π × ارتفاع

$$\text{تعداد ها لیوان} = \frac{\text{حجم پارچ}}{\text{حجم لیوان}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۸}}\times\overset{۲}{\cancel{۸}}\times\cancel{\pi}\times\overset{۳}{\cancel{۳۰}}}{\cancel{۴}\times\cancel{۴}\times\cancel{\pi}\times\cancel{۱۰}} = ۱۲$$

سوال د:

ارتفاع یک منشور ۱۰ متر و قاعده ی آن متوازی الاضلاعی به قاعده ی ۵ متر و ارتفاع ۳ متر است. حجم این منشور چند لیتر است؟

پاسخ: دقت کنیم قاعده ی منشور متوازی الاضلاع است و مساحت آن از دستور قاعده × ارتفاع محاسبه می شود . پس : $v = s \times h = (۵\times۳)\times ۱۰ = ۱۵۰\ m^۳$ یا ارتفاع × مساحت قاعده = حجم

هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است بنابراین حجم این منشور ۱۵۰۰۰۰=۱۰۰۰×۱۵۰ لیتر است

فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر سایر تمرین های صفحه ی ۷۵ از کتاب درسی را حل کن.

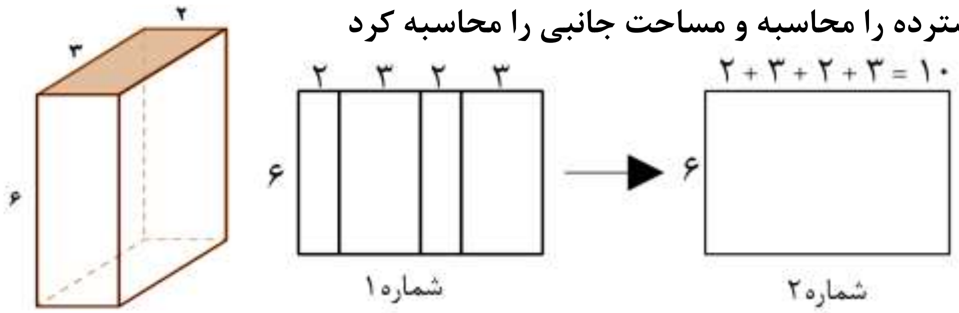
درس سوم

مساحت جانبی

با توجه به تعریف حجم های منشوری دیدیم هر وجه جانبی منشورها به شکل مستطیل یا گاهی به شکل متوازی الاضلاع است. به مثال های زیر توجه کنید.

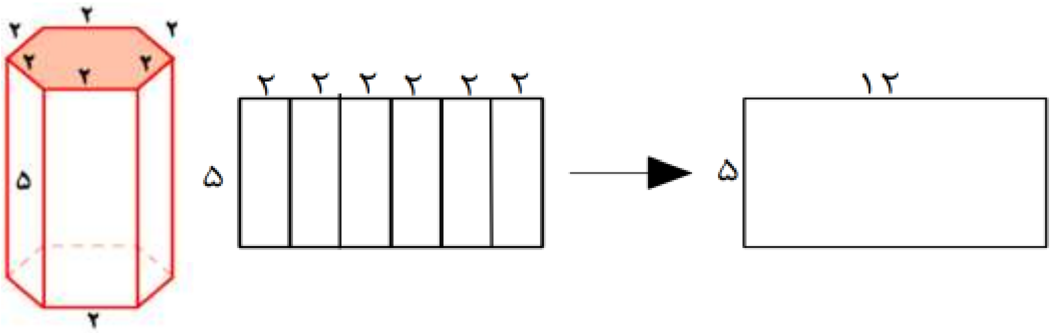
مثال: مساحت جانبی هر کدام از منشورهای زیر را محاسبه کنید.

برای محاسبه ی مساحت جانبی می توان مانند شکل ۱ مساحت هر مستطیل را محاسبه و مجموع را محاسبه کرد و یا مانند شکل ۲ طول مستطیل گسترده را محاسبه و مساحت جانبی را محاسبه کرد

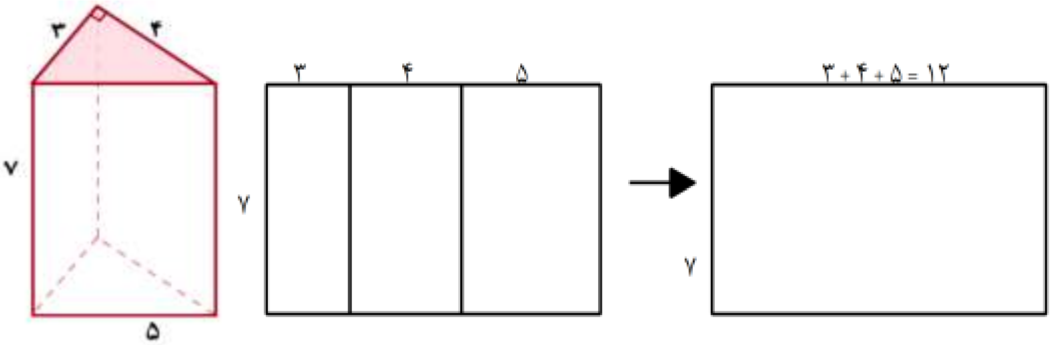


بنابراین:

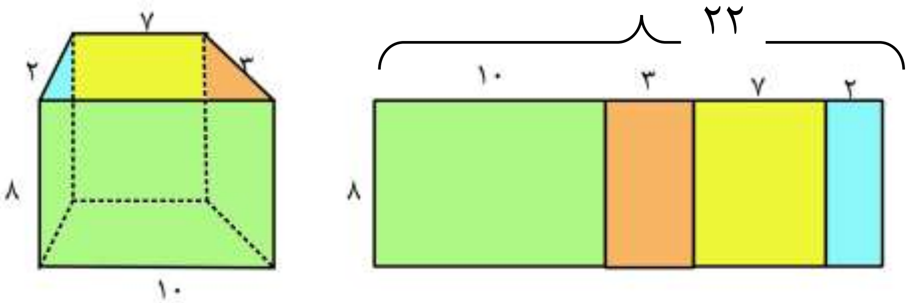
جانبی s = ۶×۱۰=۶۰



جانبیs = ۵×۱۲=۶۰



جانبیs = ۷×۱۲=۸۴



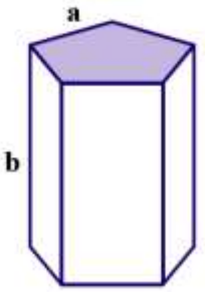
جانبیs = ۸×۲۲=۱۷۶

دقت کنیم در هر کدام از مثالهای بالا برای محاسبه ی مساحت وجه های جانبی محیط قاعده را در ارتفاع منشور ضرب کرده ایم. با دقت به تمامی مثال های بالا می توان به دستور زیر برای محاسبه ی مساحت جانبی رسید:

نکته: $s = p \times h$ جانبی یا ارتفاع × محیط قاعده = s جانبی

تمرین ۱)

مساحت جانبی هر کدام از حجم های منشوری داده شده را به دست اورید.



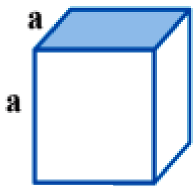
شکل ۱

پاسخ ۱) قاعده ی منشور یک پنج ضلعی منتظم به ضلع a است بنابراین :

محیط قاعده: $p = ۵ \times a = ۵\,a$ و ارتفاع منشور b است

مساحت جانبی: جانبی $s = p \times h = ۵\,a \times b = ۵\,ab$

پاسخ ۲) قاعده ی منشور مربعی ضلع a است بنابراین :

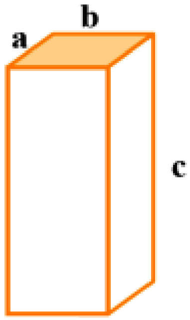


شکل ۲

محیط قاعده: $p = ۴ \times a = ۴\,a$ و ارتفاع مکعب a است

مساحت جانبی: جانبی $s = p \times h = ۴\,a \times a$

پاسخ ۳) قاعده ی منشور مستطیلی به طول و عرض a و b است بنابراین :



شکل ۳

محیط قاعده: $p = ۲ \times (a + b)$ و ارتفاع منشور c است

مساحت جانبی: جانبی $s = p \times h = ۲(a + b) \times c = ۲\,ac + ۲\,bc$

تمرین۲)

ستونی به شکل منشور شش پهلوست که هر ضلع قاعده اش ۰/۳ متر و ارتفاع ستون ۲ متر است. می خواهند بدنه ی جانبی این ستون را کاشی کاری کنند. اگر دستمزد کاشی کردن برای هر متر مربع ۶۰۰۰۰ تومان باشد ، دستمزد کاشی کاری این ستون را محاسبه کنید.

پاسخ: برای پاسخ دادن به این سوال آن را به دو زیرمساله تقسیم می کنیم.

مساله اول: محاسبه ی مساحت جانبی منشور:

$$\text{جانبی } s = p \times h = (۶ \times ۰/۳) \times ۲ = ۳/۶\, m^۲$$

مساله دوم: محاسبه ی دستمزد: تومان ۲۱۶۰۰۰ = ۶۰۰۰۰ × ۳/۶ = دستمزد

یادآوری : محیط دایره ای به شعاع r برابر است با $۲\pi r$

مثال۱)

با مفتولی به طول ۵۰ متر ، یک دایره ساخته ایم. شعاع این دایره را محاسبه کنید.($\pi \simeq ۳$)

پاسخ: طول مفتول محیط دایره است . به روابط زیر دقت کنید.

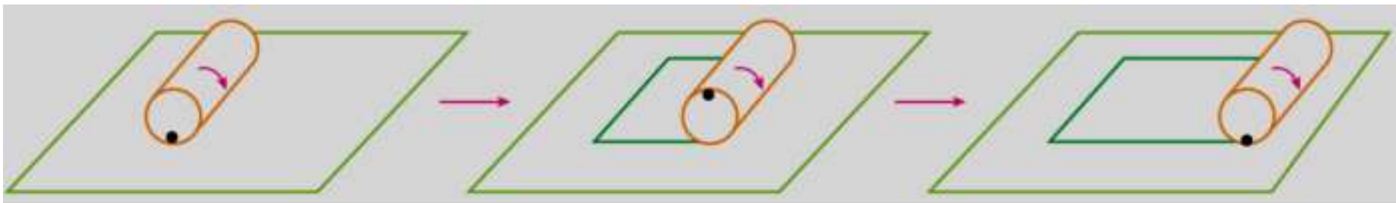
$$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times \pi \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{قطر} = \frac{\text{محیط دایره}}{\pi}$$

بنا براین برای محاسبه ی قطر ، محیط را بر عدد π تقسیم می کنیم: $\frac{۵۰}{۳} = \frac{\text{محیط دایره}}{\pi} = \text{قطر}$

بنابراین شعاع دایره نصف قطر یعنی $\frac{۲۵}{۳}$ است.

به فعالیت زیر توجه کنید:

یک استوانه را روی یک صفحه می غلطانیم و ابتدا و انتهای کار را مشخص می کنیم. تصویر ایجاد شده روی کاغذ یک مستطیل است. طول این مستطیل به اندازه ی محیط قاعده ی استوانه و عرض این مستطیل به اندازه ی ارتفاع استوانه است.



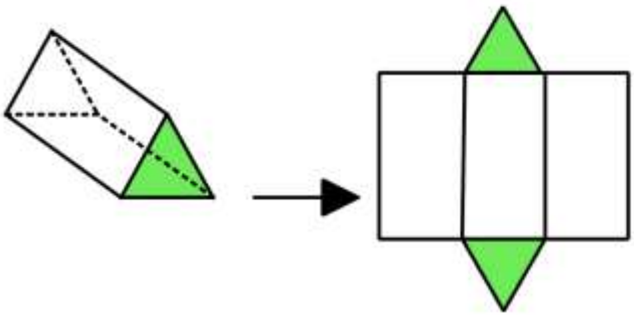
بنابراین فعالیت نتیجه ی زیر را داریم:

مساحت جانبی استوانه ای به شعاع قاعده ی r و ارتفاع h: $s_{\text{جانبی}} = p \times h = ۲\pi r \times h = ۲\pi rh$

به گسترده ی حجم های منشوری دقت کنید.

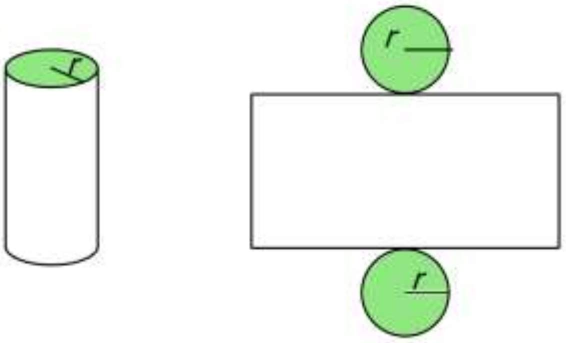
گسترده ی منشور سه پهلو

سه مستطیل + دو قاعده به شکل مثلث



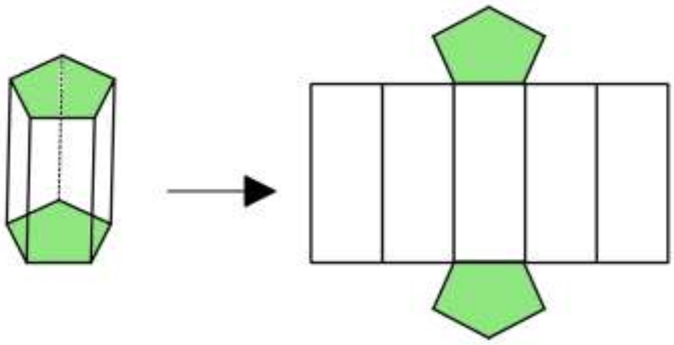
گسترده ی استوانه

مستطیل (طول آن محیط قاعده است) + دو قاعده به شکل دایره



گسترده ی منشور پنج پهلو

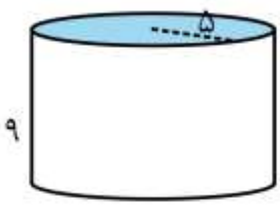
پنج مستطیل + دو قاعده به شکل پنج ضلعی



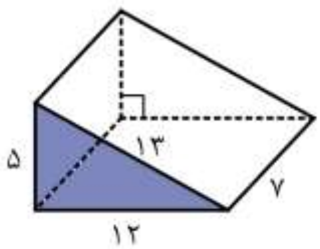
با توجه به مثالهای بالا نتیجه ی زیر را داریم:

نکته: مساحت کل منشور = مساحت جانبی + دو برابر مساحت قاعده یا $s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + ۲\times s_{\text{قاعده}}$

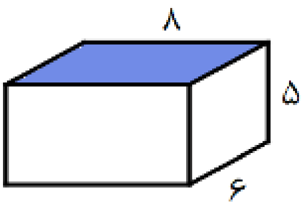
تمرین۱) مساحت کل هر کدام از منشورهای زیر را به دست آورید.($\pi \simeq ۳$)



شکل ۳



شکل ۲



شکل ۱

پاسخ ۱)

$$s_{\text{قاعده}} = ۸\times۶=۴۸$$

$$s_{\text{جانبی}} = p\times h = ۲(۸+۶)\times۵=۱۴۰$$

$$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + ۲\times s_{\text{قاعده}} = ۱۴۰+(۲\times۴۸) = ۲۳۶$$

پاسخ ۲)

$$s_{\text{قاعده}} = \frac{۵\times۱۲}{۲}=۳۰$$

$$s_{\text{جانبی}} = p\times h = (۵+۱۲+۱۳)\times۷=۲۱۰$$

$$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + ۲\times s_{\text{قاعده}} = ۲۱۰+(۲\times۳۰) = ۲۷۰$$

پاسخ ۳)

$$s_{\text{قاعده}} = ۵\times۵\times۳=۷۵$$

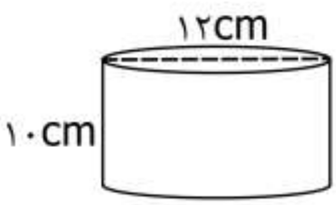
$$s_{\text{جانبی}} = p \times h = (۲\times۵\times۳)\times۹=۲۷۰$$

$$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + ۲ \times s_{\text{قاعده}} = ۲۷۰+(۲\times۷۵) = ۴۲۰$$

تمرین ۲) برای ساختن یک قوطی چای به شکل استوانه با قاعده ای به قطر ۱۲سانتی متر و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر ، چند سانتیمتر مربع ورق روی اندود استفاده می شود؟

پاسخ:

مقدار ورق روی اندود مصرف شده همان مساحت کل قوطی چای است پس باید مساحت کل استوانه ای با این مشخصات را محاسبه کنیم: (دقت کنیم قطر ۱۲ سانتی متر است پس شعاع دایره ۶ سانتی متر است)

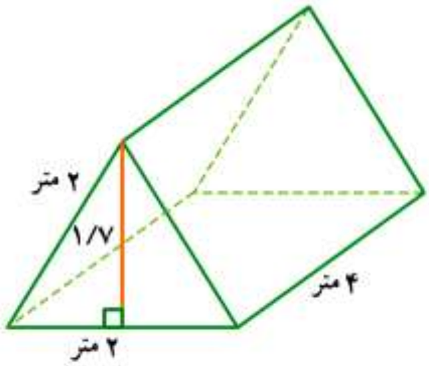


$$s_{\text{قاعده}} = ۶\times۶\times۳=۱۰۸cm^۲$$

$$s_{\text{جانبی}} = p \times h = (۲\times۶\times۳)\times۱۰=۳۶۰cm^۲$$

$$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + ۲ \times s_{\text{قاعده}} = ۳۶۰+(۲\times۱۰۸) = ۵۷۶cm^۲$$

برای ساخت این قوطی چای به حداقل ۵۷۶ سانتی نتر مربع ورق روی اندود نیاز داریم.



تمرین ۳) یک چادر مسافرتی به شکل زیر است.

الف) برای دوختن این چادر چند متر مربع پارچه مصرف شده است؟

ب) حجم این چادر چند متر مربع است؟

پاسخ:

الف) برای محاسبه ی مقدار پارچه ی مصرفی باید مساحت کل چادر(منشور سه پهلو) را محاسبه کنیم.

$$s_{\text{قاعده}} = \frac{۲\times۱/۷}{۲} = ۱/۷\ m^۲$$

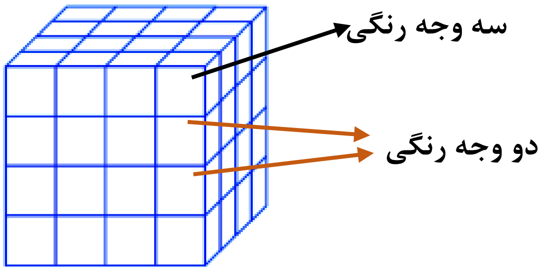
$$s_{\text{جانبی}} = p \times h = (۳\times۲)\times۴=۲۴\ m^۲$$

$$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + ۲ \times s_{\text{قاعده}} = ۲۴+(۲\times۱/۷) =۲۷/۴\ m^۲$$

ب)برای محاسبه ی حجم چادر(منشور) از دستور $v = s \times h$ استفاده می کنیم:

$$v = s \times h = ۱/۷ \times ۴ = ۶/۸m^۳$$

تمرین ۴) با مکعب هایی به ضلع ۱ واحد حجم زیر را ساخته ایم.



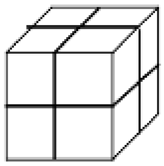
الف)اگر تمام سطح آن را رنگ کنیم چند مکعب رنگ نمی شوند؟

ب) چند مکعب رنگ می شوند؟

ج) چند مکعب دو وجهشان رنگ می شود؟

د) چند مکعب سه وجهشان رنگ می شود؟

پاسخ: ابتدا دقت کنیم تعداد کل مکعب های تشکیل دهنده ی این شکل $۶۴ = ۴×۴×۴$ است.



الف) مکعب هایی که در لایه های داخلی قرار می گیرند رنگ نمی شوند. پس از هر طرف ۱ واحد کم می کنیم (یعنی از هر ضلع ۲ تا) . شکل زیر تعداد مکعب های داخلی است.

بنابراین تعداد مکعب های رنگ نشده برابر است با : $۲×۲×۲ = ۸$

ب)۸ مکعب رنگ نشده اند پس این تعداد را از کل ۶۴ مکعب کم می کنیم .

بنابراین تعداد رنگ شده ها برابر است با : $۶۴-۸ = ۵۶$

ج) دقت کنیم طبق علامتهای روی شکل روی هر یال دو مکعب وسط دو طرفشان رنک می شود و مکعب ۱۲ یال دارد پس تعداد مکعب هایی که دو وجه رنگی دارند برابر است با : $۱۲×۲ = ۲۴$

د) مکعب هایی که در راس قرار دارند سه وجهشان رنگ میخورد و این شکل ۸راس دارد پس ۸ مکعب سه وجهشان رنگ شده است.

تمرین ۵) یک غلتک روی زمین آسفالت شده باید چهار بار غلت بزند تا سطح آن صاف بشود. اگر شعاع غلتک ۵۰ سانتیمتر و ارتفاع استوانه ی آن ۱ متر باشد ، برای آسفالت کردن سطح یک کوچه به طول ۲۰ و عرض ۴ متر این غلتک باید به طور تقریبی چند بار بچرخد؟

پاسخ: مساله را به چند زیرمساله تفکیک و برای راحتی $(\pi \simeq ۳)$ درنظر میگیریم.

الف) مساحت جانبی غلتک

ب) مساحت کوچه و محاسبه ی چهار برابر این مساحت

ج) تعداد دورهای غلتک

حل الف: مساحت جانبی غلتکی به شعاع ۵۰ سانتی متر(۰/۵متر) و ارتفاع ۱ متر:

$$s_{\text{جانبی}} = p \times h = (۲ \times ۰/۵ \times ۳) \times ۱ = ۳ \ \text{متر مربع}$$

حل ب) چهاربرابر مساحت یک مستطیل به ابعاد ۲۰و۴ متر:

$$s = ۴ \times (۲۰ \times ۴) = ۳۲۰ \ \text{متر مربع}$$

حل ج) محاسبه تعداد دورهای غلتک:

$$\text{تعداد دور} = \frac{\text{مساحت مسیر}}{\text{مساحت جانبی غلتک}} = \frac{۳۲۰}{۳} \simeq ۱۰۷$$

درس چهارم: حجم و سطح

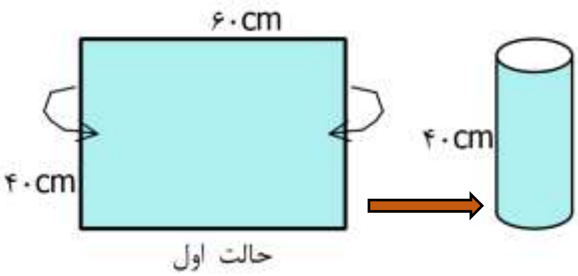
مثال۱)

یک مستطیل به طول ۶۰ و عرض ۴۰ سانتیمتر را به دو صورت (مانند شکل زیر) لوله می کنیم تا به شکل استوانه شود. مساحت جانبی در هر دو حالت برابر است با مساحت مستطیل یعنی :

$$s_{\text{جانبی}} = ۶۰ \times ۴۰ = ۲۴۰۰\ cm^{۲}$$

برای راحتی محاسبات عدد π را ۳ در نظر می گیریم.

حالت اول



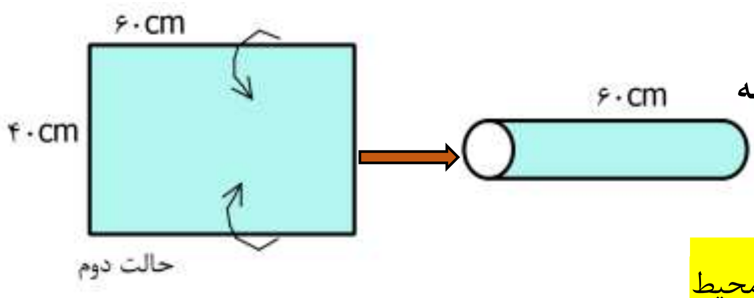
با ضلع ۶۰ سانتیمتری دایره ی قاعده ی استوانه ساخته می شود پس محیط قاعده ۶۰ است. با استفاده از دستور محاسبه ی محیط دایره داریم:

$$\text{محیط} = \text{قطر} \times \pi \Rightarrow ۶۰ = \text{قطر} \times ۳ \Rightarrow \text{قطر} = \frac{۶۰}{۳} = ۲۰\ cm$$

اگر قطر دایره ۲۰ سانتیمتر باشد، شعاع دایره ۱۰ است و می توان حجم استوانه ی ساخته شده را محاسبه کرد.

$$v = s \times h = (۱۰ \times ۱۰ \times ۳) \times ۴۰ = ۱۲۰۰۰\ cm^{۳}$$

حالت دوم



با ضلع ۴۰ سانتیمتری دایره ی قاعده ی استوانه ساخته می شود پس محیط قاعده ۴۰ است.

با استفاده از دستور محاسبه ی محیط دایره داریم:

$$\text{محیط} = \text{قطر} \times \pi \Rightarrow ۴۰ = \text{قطر} \times ۳ \Rightarrow \text{قطر} = \frac{۴۰}{۳}\ cm$$

اگر قطر دایره $\frac{۴۰}{۳}$ سانتیمتر باشد، شعاع دایره $\frac{۲۰}{۳}$ است و می توان حجم استوانه ی ساخته شده را محاسبه کرد.

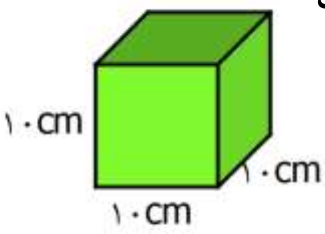
$$v = s \times h = \left(\frac{۲۰}{\cancel{۳}} \times \frac{۲۰}{\cancel{۳}} \times \cancel{۳}\right) \times \cancel{۶۰}^{\,۲۰} = ۸۰۰۰\ cm^{۳}$$

با توجه به محاسبات انجام شده دو استوانه سطح جانبی یکسان ولی حجم های متفاوتی دارند و با مقایسه ی حجم در دو حالت می توان نتیجه گرفت:

در حالتی که ضلع بزرگتر مستطیل را برای ساختن قاعده ی استوانه انتخاب کنیم ، حجم شکل حاصل بیشتر از حالت دوم است.

مثال۲)

یک کارخانه تولید چای برای بسته بندی محصولاتش از دو نوع بسته بندی طبق شکل های زیر استفاده می کند. حجم و میزان ورق روی اندودی که برای این بسته بندی استفاده می کند را با هم مقایسه کنید.



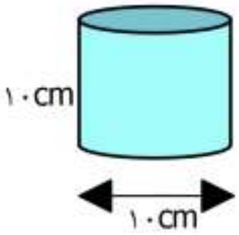
بسته بندی اول

بسته بندی اول:

حجم این نوع بسته بندی برابر است با : $v = ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰۰\ cm^۳$

مقدار ورق روی اندود به کار رفته برای این نوع بسته بندی برابر است با مساحت کل این مکعب

یعنی : (مساحت کل مکعب ۶ برابر مساحت یک وجه آن است.) $s_{\text{کل}} = ۶ \times (۱۰ \times ۱۰) = ۶۰۰\ cm^۲$



بسته بندی دوم

بسته بندی دوم :

قطر قاعده ۱۰ سانتیمتر است بنابراین شعاع قاعده ی استوانه ۵ سانتیمتر است پس:

حجم در این حالت برابر است با : $v = s \times h = (۵ \times ۵ \times ۳) \times ۱۰ = ۷۵۰\ cm^۳$

مقدار ورق روی اندود به کار رفته برای این نوع بسته بندی برابر است با مساحت کل این استوانه

یعنی مجموع مساحت جانبی و دو برابر مساحت قاعده ی استوانه . بنابراین:

$$s_{\text{قاعده}} = ۵\times۵\times۳=۷۵cm^۲$$

$$s_{\text{جانبی}} = p \times h = (۲\times۵\times۳)\times۱۰=۳۰۰cm^۲$$

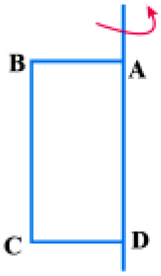
$$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + ۲ \times s_{\text{قاعده}} = ۳۰۰+(۲\times۷۵) = ۴۵۰cm^۲$$

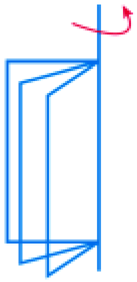
با مقایسه ی مقادیر به دست آمده می توان نتیجه گرفت:

الف) حجم بسته بندی اول از بسته بندی دوم بیشتر است بنابراین اگر برای شرکت حجم بسته بندی اهمیت داشته باشد تولید بسته بندی نوع اول مناسبتر است.

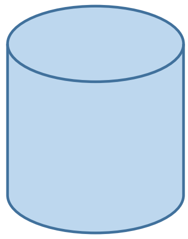
ب) ورق روی اندود به کار رفته در بسته بندی نوع دوم کمتر از میزان مصرفی نوع اول است و اگر برای شرکت هزینه ی ورق به کار رفته اهمیت داشته باشد بسته بندی نوع دوم مناسبتر است.

با حرکت دادن یک سطح در فضا ، حجم ساخته می شود. به طور مثال مطابق با شکل رو به رو اگر مستطیل را حول(دور) ضلع AD دوران دهیم در فضا یک استوانه با مشخصات زیر ایجاد می گردد:





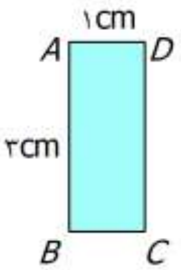
ارتفاع استوانه: AD
شعاع قاعده: CD



شما هم مطابق با شکل رو به رو یک مداد را کنار یک مستطیل مقوایی بچسبانید و با چرخاندن مستطیل، استوانه ای که در فضا ساخته می شود را ببینید.

با انتخاب سطح های مختلف به جای مستطیل (مانند مثلث قائم الزاویه ، نیم دایره و ...) می توان حجم های مختلف دیگر ایجاد کرد.از این خاصیت در خراطی ، سفالگری و تراشکاری برای ساختن حجم های مختلف استفاده می کنند.

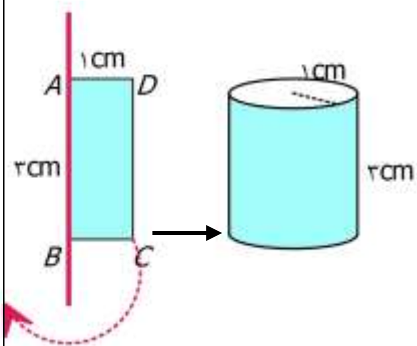
تمرین ۱) مستطیل ABCD را حول ضلع AB دوران می دهیم.



الف) شکل حاصل از دوران را رسم و مشخصات آن را بنویسید.

ب) حجم آن را محاسبه کنید. ($\pi \simeq ۳/۱۴$)

پاسخ:



الف) شکل حاصل استوانه ای به شعاع ۱ سانتی متر و ارتفاع ۳ سانتی متر است.

ب) با استفاده از دستور حجم منشور داریم:

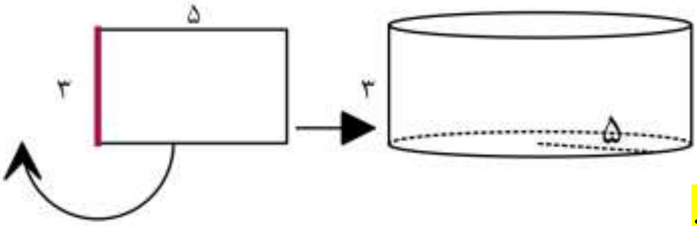
$$v = s \times h = (۱\times۱\times۳/۱۴) \times ۳ = ۹/۴۲\ cm^{۳}$$

نکته: هنگام دوران دادن مستطیل یا هر سطح دیگر ضلعی که محور دوران شکل است ارتفاع آن حجم هندسی است.

تمرین ۲)

مستطیلی به طول ۵ و عرض ۳ سانتیمتر را حول عرض آن دوران می دهیم.

الف) مشخصات حجم حاصل از دوران را بنویسید.



ب) حجم آن را محاسبه کنید. $(\pi \simeq ۳)$

پاسخ)

الف) طبق شکل داده شده حجم حاصل از دوران

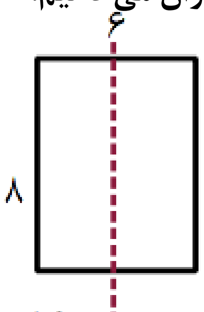
استوانه ای به شعاع قاعده ی ۵ و ارتفاع ۳ سانتی متر است.

ب) از دستور حجم منشور استفاده می کنیم:

$$v = s \times h = (۵×۵×۳) \times ۳ = ۲۲۵\ cm^{۳}$$

تمرین ۳)

در شکل شماره ۱ خط چین محور تقارن مستطیل است. مستطیل را حول خط چین ۱۸۰ درجه دوران می دهیم.



شکل ۱

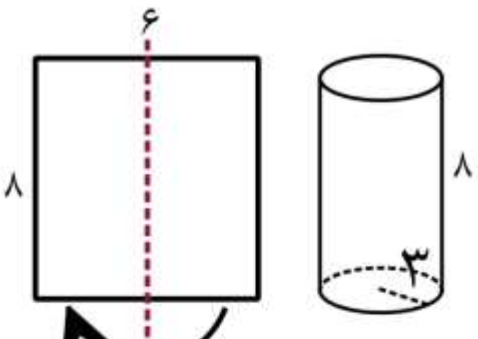
الف) مشخصات حجم حاصل از دوران را بنویسید.

ب) حجم و مساحت جانبی آن را محاسبه کنید.

پاسخ)

الف)طبق شکل شماره ۲ حجم حاصل

عبارت است از : استوانه ای به شعاع قاعده ی ۳ و ارتفاع ۸



شکل ۲

ب)

حجم استوانه برابر است با :

$$v = s \times h = (۳×۳×۳) \times ۸ = ۲۱۶\ cm^{۳}$$

مساحت جانبی استوانه برابر است با :

$$s_{\text{جانبی}} = p \times h = (۶×۳)×۸=۱۴۴\ cm^{۲}$$

فرزندم ، با مرور مطالب بالا ، برای تمرین بیشتر سوالات صفحه ی ۸۱ از کتاب درسی را حل کن.