

## بردارها



▀ بنابه گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی غیر هم‌راستا با خط فرود می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند بردارهای نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار گیرد. به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند.

## معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می‌دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند  $(a, b)$  که  $a, b \in \mathbb{R}$  مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتب  $(x, y)$  نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه  $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$  شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با  $\mathbb{R}^2$  نمایش می‌دهند، یعنی

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می‌دانید که حالت کلی آن به صورت  $ax + by = c$  است که در آن  $a, b, c \in \mathbb{R}$  و  $b$  هم‌زمان صفر نیستند).

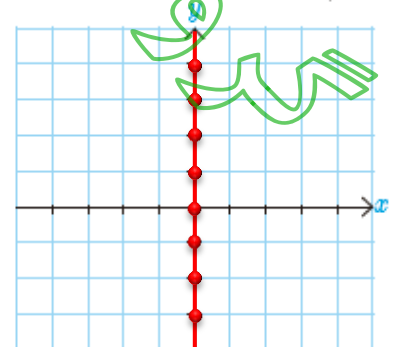
به طور کلی هر وقت گفته می‌شود رابطه یا معادله‌ای نمودار  $G$  را مشخص می‌کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار  $G$  در آن رابطه یا معادله صدق می‌کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار  $G$  قرار دارد.

با توجه به آنچه گفته شد می‌خواهیم در  $\mathbb{R}^2$  یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکل‌های متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل‌ها، روابط مرتبط با آنها را مشخص نماییم.

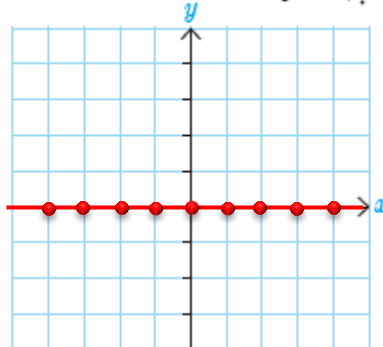
### کارد کلاس

۱- برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

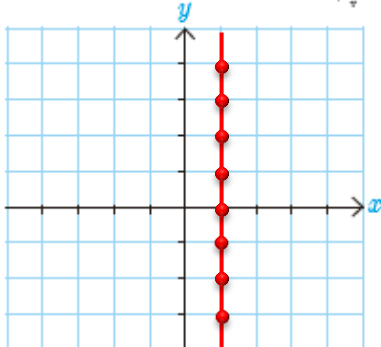
(الف)  $x = 0$



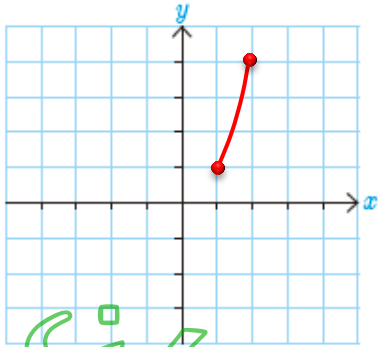
(ب)  $y = 0$



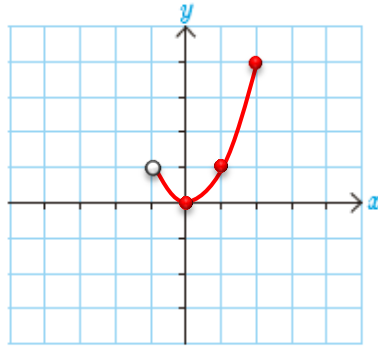
(پ)  $x = 1$



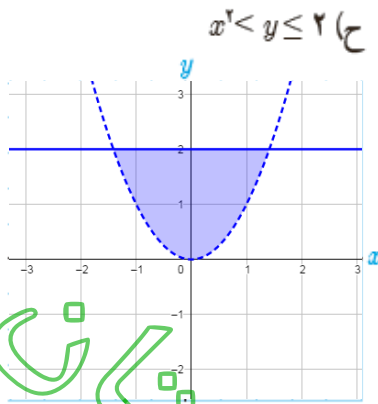
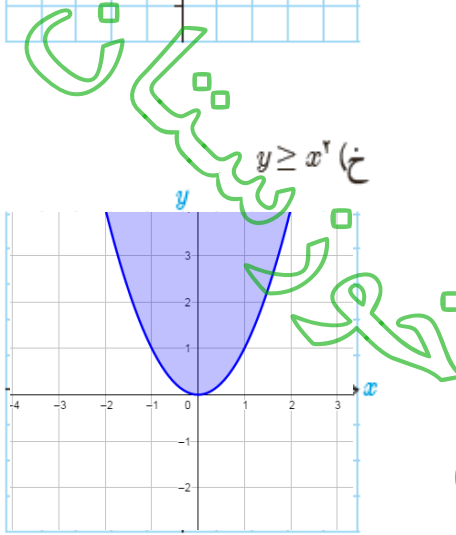
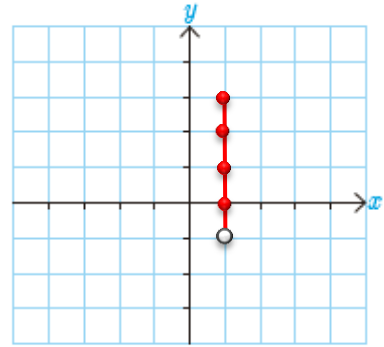
ج)  $y = x^2, 1 \leq x \leq 2$



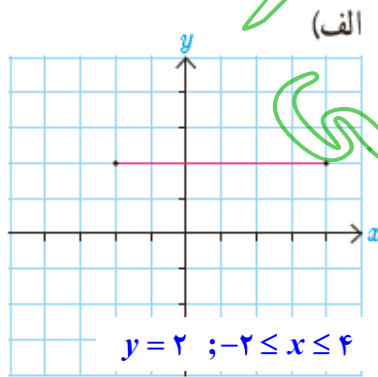
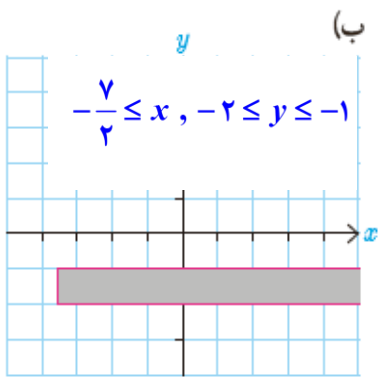
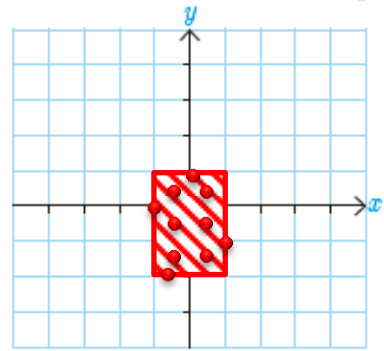
ث)  $y = x^2, -1 < x \leq 2$



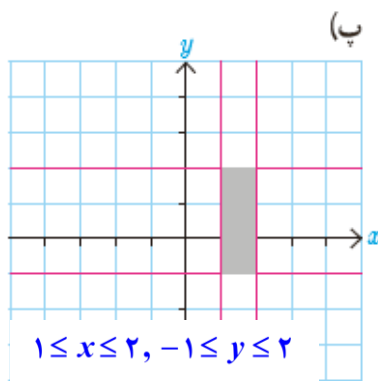
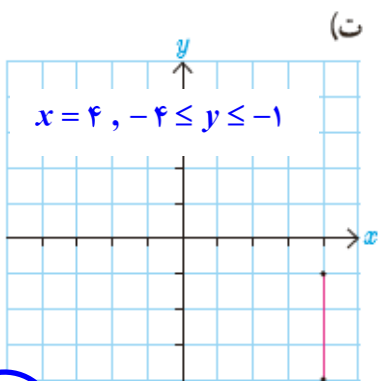
ت)  $x = 1, -1 \leq y < 3$



ج)  $-1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq -2$



۲- در هر یک از شکل های روبه رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی های دیگری که از شکل دریافت می کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.



مجموعه



حال به سراغ فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای  $\mathbb{R}^3$  و مجموعه تمام سه‌تایی‌های  $(a,b,c)$  که در آن  $a,b,c \in \mathbb{R}$  برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه‌بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیریم.

### معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

مشابه  $\mathbb{R}^2$  می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب  $(x,y,z)$  که در آنها  $x,y,z$  اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌گویند.

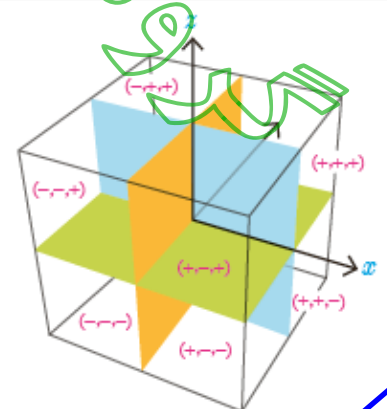
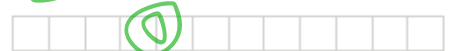
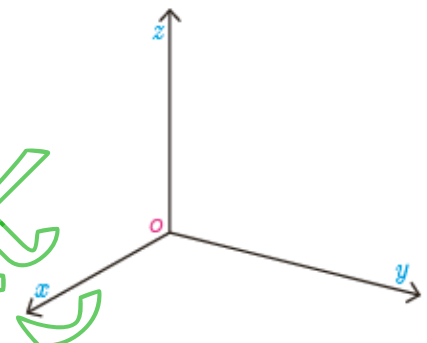
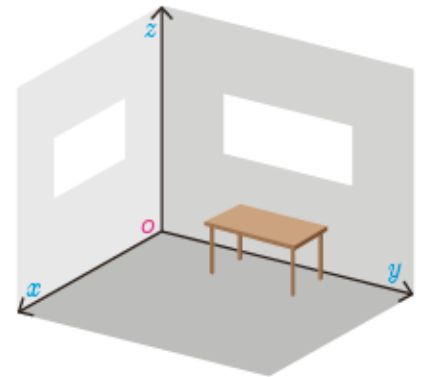
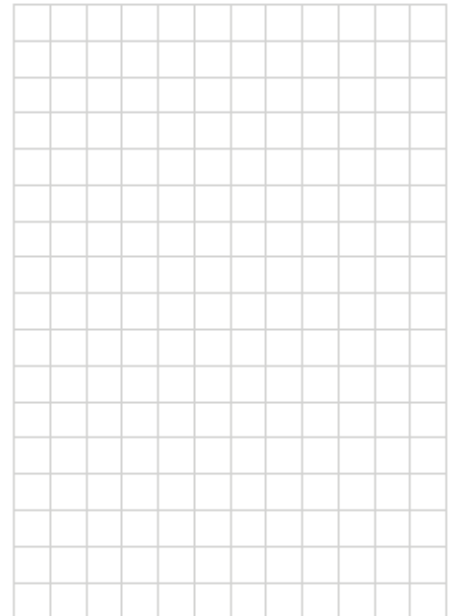
$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط  $\mathbb{R}^2$  از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم  $x$  و  $y$  استفاده می‌شود. به طور مشابه می‌توان فضای  $\mathbb{R}^3$  را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دو عمود برهم که در نقطه‌ای مانند  $O$  متقاطع‌اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محور دو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کعبه می‌دهند.

محورهای  $Ox$ ،  $Oy$  و  $Oz$  به ترتیب محور  $x$ ‌ها، محور  $y$ ‌ها و محور  $z$ ‌ها نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت‌اند از صفحه  $xy$  (کف اتاق) شامل محور  $x$ ‌ها و  $y$ ‌ها، صفحه  $yz$  (دیوار سمت راست) شامل محور  $y$ ‌ها و  $z$ ‌ها، صفحه  $xz$  (دیوار سمت چپ) شامل محور  $x$ ‌ها و  $z$ ‌ها هستند. جهت مثبت هر یک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه  $O$ ) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه  $\mathbb{R}^3$  به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه  $xy$  و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه  $xy$  هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه  $xy$  مطابق با شماره گذاری استاندارد یک دستگاه  $\mathbb{R}^2$  شماره گذاری می‌شوند.

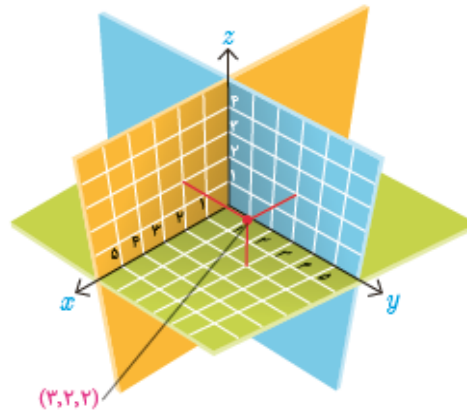
شماره ناحیه	علامت محورها		
	$x$	$y$	$z$
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

مثلاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه  $xy$  از ۵ تا ۸ شماره گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول روبه‌رو مشخص شده‌اند.

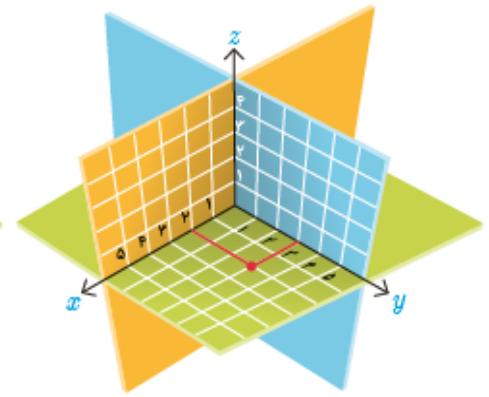


۱- از برخورد سه صفحه دو به دو متقاطع، یک کعبه تشکیل می‌شود.

برای نمایش سه تایی مرتب  $(x, y, z)$  در دستگاه مختصات  $\mathbb{R}^3$  کافی است ابتدا همانند شکل ۱ نقطه  $(x, y)$  را در صفحه  $xy$  بیابیم و سپس ارتفاع آن را به اندازه  $z$  در راستای موازی با محور  $z$  ها (یعنی به طور عمودی) تغییر دهیم تا شکل شماره ۲ حاصل شود.



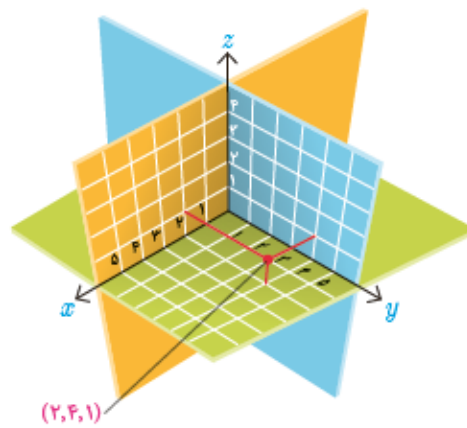
شکل شماره ۲



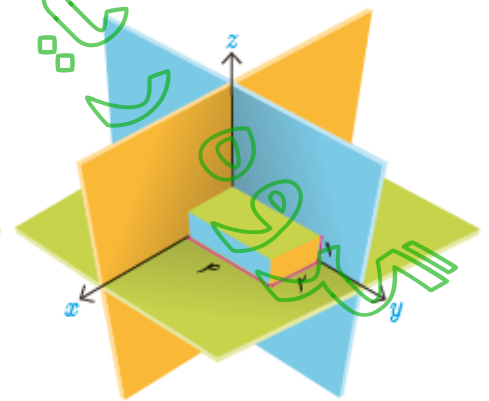
شکل شماره ۱

حوزه ریاضیات

در واقع، می توان سه نقطه به طول های  $x, y, z$  به ترتیب بر روی محورهای  $x, y, z$  نظر گرفت و سپس صفحه گذرنده از  $x$  و موازی با صفحه  $yz$ ، صفحه گذرنده از  $y$  و موازی با صفحه  $xz$  و صفحه گذرنده از  $z$  و موازی با صفحه  $xy$  را در نظر بگیریم. محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول  $x$ ، عرض  $y$  و ارتفاع  $z$  است که نمایش دهنده سه تایی مرتب  $(x, y, z)$  می باشد. مثلاً نقطه  $P$  در شکل زیر متناظر با سه تایی مرتب  $(2, 4, 1)$  است.

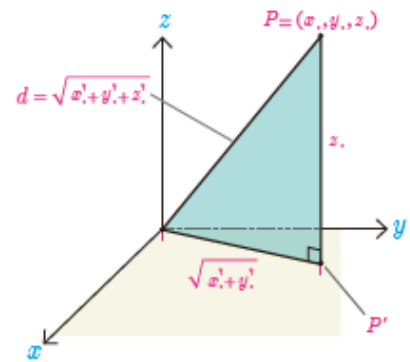
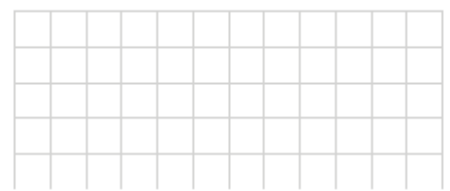


$(2, 4, 1)$



ریاضیات

همچنین نقطه  $O$  که مبدأ مختصات است متناظر سه تایی مرتب  $(\circ, \circ, \circ)$  می باشد.  
 دو نقطه  $P = (x, y, z)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  را برهم منطبق گوئیم و می نویسیم  $P = Q$   
 هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی  $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ .



برای یافتن فاصله یک نقطه از  $\mathbb{R}^3$  مانند  $P = (x, y, z)$  از مبدأ مختصات کافی است  
 از نقطه  $P$  عمودی بر صفحه  $xy$  رسم کرده و پای عمود را  $P'$  بنامیم. در این صورت  
 با توجه به شکل مقابل از قضیه فیثاغورس طول پاره خط  $OP'$  به صورت زیر محاسبه  
 می شود.

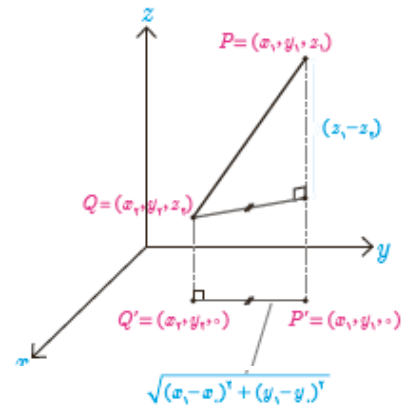
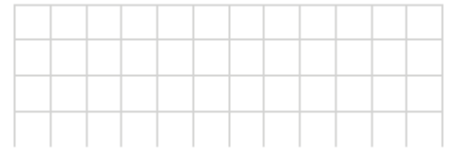
$$|OP'| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه  $OPP'$  از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر  $OP$   
 استفاده می کنیم. پس داریم:

$$|OP| = \sqrt{|OP'|^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

رابطه فوق را می توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از  $\mathbb{R}^3$  مانند  
 $P = (x, y, z)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  به صورت زیر تعمیم داد.

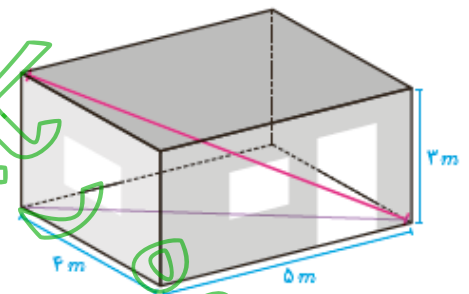
$$|PQ| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$



**مثال:** در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده  
 می شود طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟

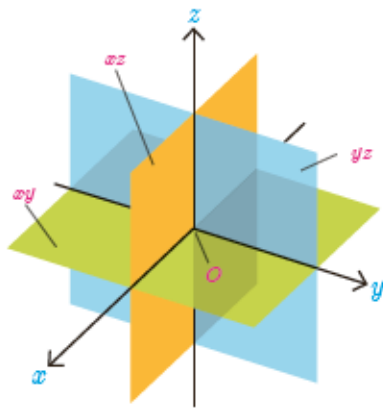
$$\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \Rightarrow \text{قطر اتاق} = \sqrt{41 + 3^2} = 5\sqrt{2}$$

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به  
 بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه  
 یا معادله مربوط به آنها می پردازیم.



**مثال:** فرض کنید معادله  $x = 0$  داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن  
 را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله  
 صدق می کنند و این یعنی تمام نقاطی که مؤلفه اول آنها یعنی  $x$  برابر صفر باشد. همواره  
 با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله  $\mathbb{R}^2$  است یا  $\mathbb{R}^3$ .





قبلاً در کار کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در  $\mathbb{R}^2$  محور  $y$  هاست. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از  $\mathbb{R}^3$  را مشخص نماییم که مؤلفه اول آنها برابر صفر است، یعنی تمام سه تایی‌هایی به صورت  $(0, y, z)$  به طوری که  $y, z \in \mathbb{R}$ . همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار  $y$  و  $z$  هرچه باشد در صورتی که مؤلفه اول صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله  $x=0$  صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر  $y$  و  $z$  آزاد هستیم. مثلاً نقاط  $(0, -3, -1)$ ,  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 2)$  و  $(0, -1, 5)$  همگی در معادله صدق می‌کنند. تمام این نقاط در معادله  $x=0$  صدق می‌کنند و این همان صفحه  $yz$  است.

### ۱ فعالیت

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله  $x=0$  در  $\mathbb{R}^3$  تمام نقاط صفحه  $yz$  است (به عبارتی  $x=0$  معادله صفحه  $yz$  است) و دیدیم که نقاط مختلفی با  $y$  و  $z$  های دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه  $yz$  به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر  $x=0$  شرط  $z=0$  را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه  $yz$  سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها  $z=0$  باشد.)

۱- مختصات چند نقطه را که در رابطه  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲- نمودار مربوط به معادلات  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله  $x=0$  دارد؟ نمودار  $x=z=0$  خط راستی است که بر محور  $y$  ها منطبق است. اما نمودار  $x=0$  صفحه  $yz$  است.

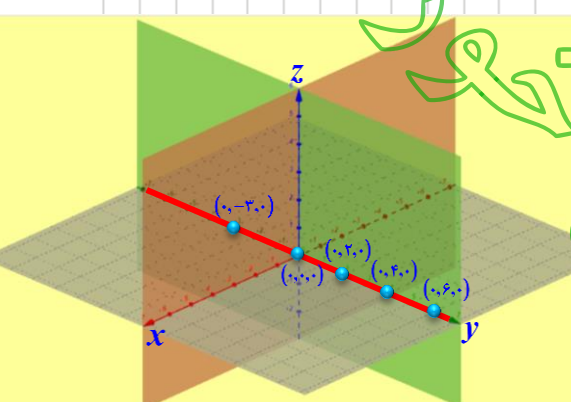
می‌دانیم محور  $y$  ها در صفحه  $yz$  است. پس نمودار  $x=z=0$  در صفحه  $x=0$  قرار دارد.

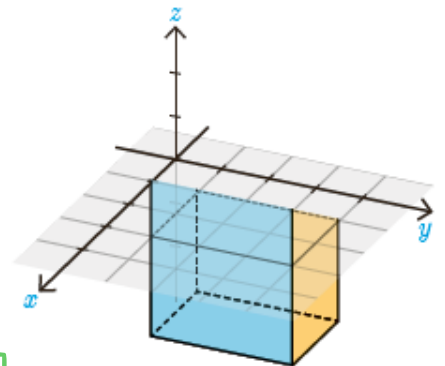
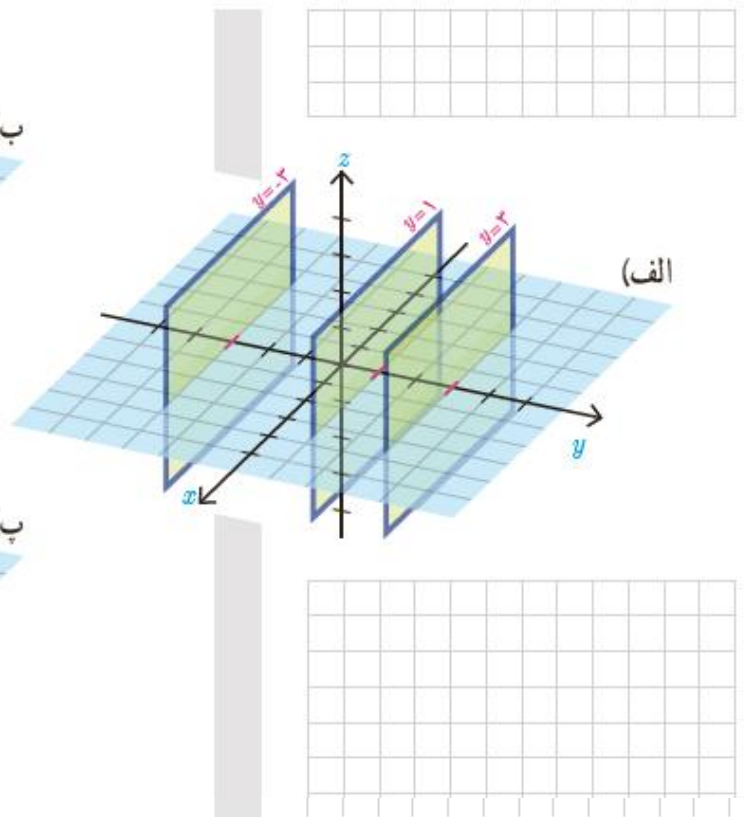
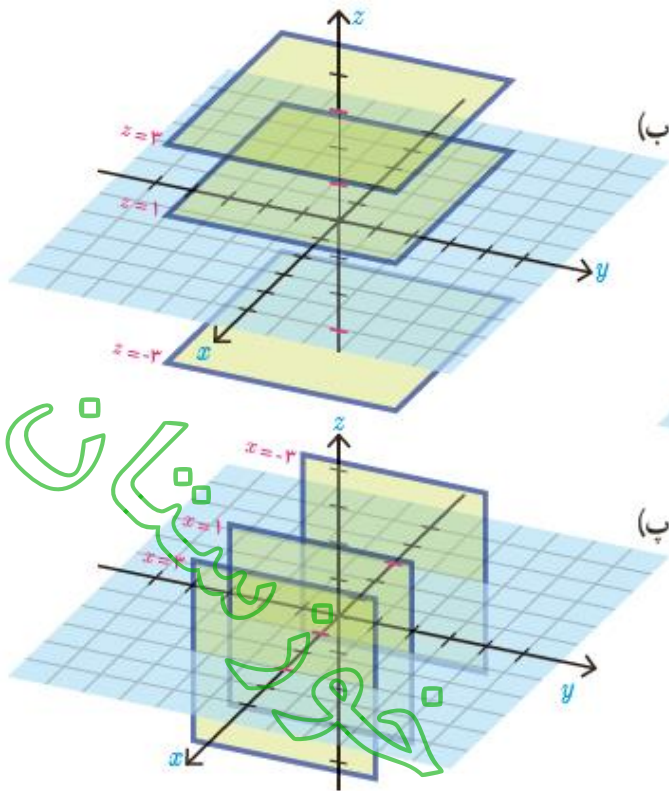
**مثال:** روی صفحه  $z=1$  نقاط  $A=(1, 2, 1)$  و  $B=(2, 2, 1)$  و  $C=(3, 2, 1)$  را در نظر می‌گیریم، مؤلفه دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحه مزبور ( $z=1$ ) تمام نقاطی که مؤلفه دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن یک خط است به معادلات  $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ )

### کار در کلاس

۱- در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.

تجزیه و تحلیل





۲- وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات  $x=3, x=1, x=-2, y=4, y=1, y=-2, z=2$  و  $z=-2$  هستند.

(الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

(ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

(پ) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

(ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

(ث) روابط مشخص‌کننده یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کننده

پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

(ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

(چ) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

(ح) روابطی را بنویسید که مشخص‌کننده حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعب داده شده باشند.

۱- طرح چنین سؤال‌هایی تنها برای سطوحی که هر مرز آن موازی با یکی از محورهای مختصات است و حجم‌هایی که هر وجه آنها موازی با یکی از صفحات دستگاه مختصات است، مجاز می‌باشد.

مجموعه سنجش

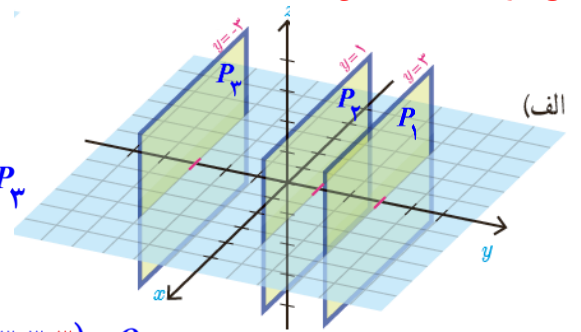




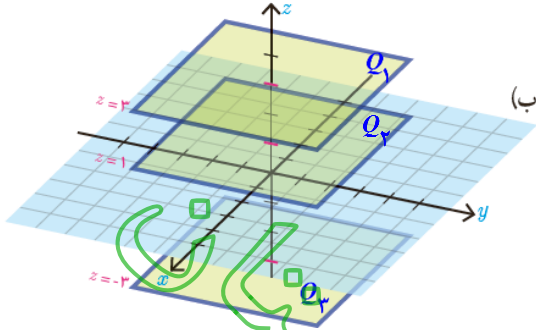
$$P_1: y = 3 \Rightarrow (1, 3, 2) \in P_1, (0, 3, -2) \in P_1$$

$$P_2: y = 1 \Rightarrow (4, 1, -2) \in P_2, (5, 1, -3) \in P_2$$

$$P_3: y = -3 \Rightarrow (0, -3, 0) \in P_3, (4, -3, 3) \in P_3$$



(الف)



$$Q_1: z = 3 \Rightarrow (1, -1, 3) \in Q_1, (3, 3, 3) \in Q_1$$

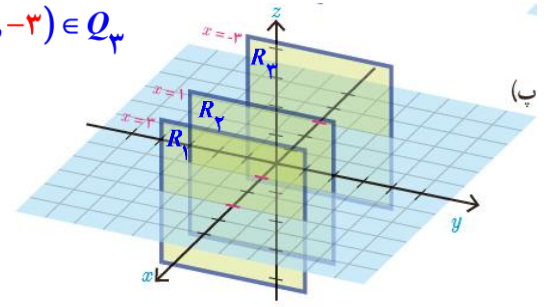
$$Q_2: z = 1 \Rightarrow (4, 0, 1) \in Q_2, (5, -2, 1) \in Q_2$$

$$Q_3: z = -3 \Rightarrow (2, 3, -3) \in Q_3, (1, 2, -3) \in Q_3$$

$$R_1: x = 3 \Rightarrow (3, -1, 2) \in R_1, (3, 3, 3) \in R_1$$

$$R_2: x = 1 \Rightarrow (1, 0, 4) \in R_2, (1, -2, 1) \in R_2$$

$$R_3: x = -3 \Rightarrow (-3, 0, 2) \in R_3, (-3, 2, 4) \in R_3$$



(ب)

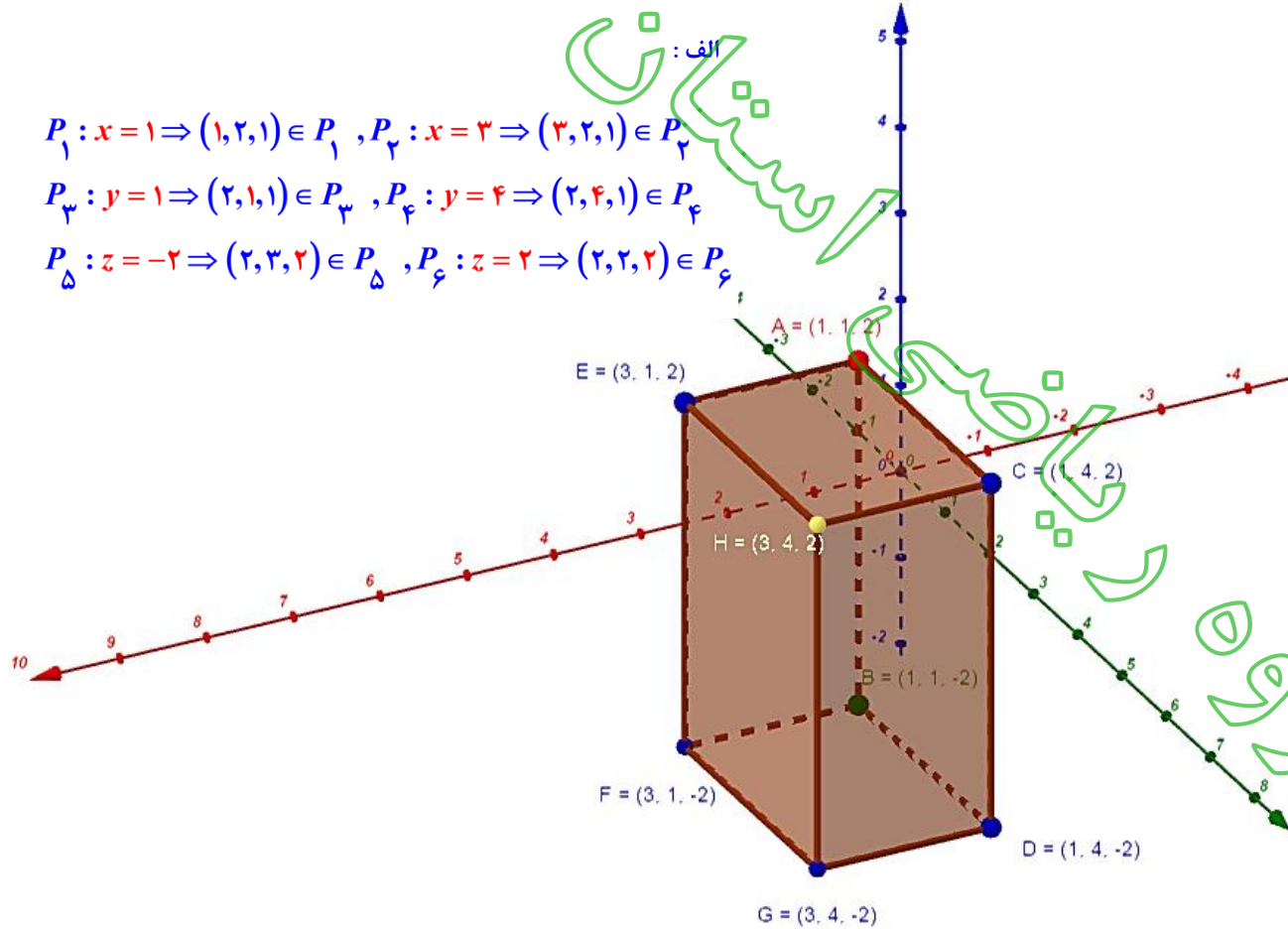
$$P_1: x = 1 \Rightarrow (1, 2, 1) \in P_1, P_2: x = 3 \Rightarrow (3, 2, 1) \in P_2$$

$$P_3: y = 1 \Rightarrow (2, 1, 1) \in P_3, P_4: y = 4 \Rightarrow (2, 4, 1) \in P_4$$

$$P_5: z = -2 \Rightarrow (2, 3, 2) \in P_5, P_6: z = 2 \Rightarrow (2, 2, 2) \in P_6$$

الف:

پاسخ سوال ۱ کار در کلاس



: ب

$$P_1: x = 1, P_3: y = 1 \Rightarrow (1, 2, 1)$$

$$P_1: x = 1, P_4: y = 4 \Rightarrow (1, 4, -1)$$

$$P_2: x = 3, P_5: z = -2 \Rightarrow (3, 3, 2)$$

۶۸

$AB: x = y = 1; z \in [-2, 2]$   $CD: x = 1, y = 4; z \in [-2, 2]$  ,  $EF: x = 3, y = 1; z \in [-2, 2]$  ,  $GH: x = 3, y = 4; z \in [-2, 2]$   
 $AC: x = 1, z = 2; y \in [1, 4]$  ,  $BD: x = 1, z = -2; y \in [1, 4]$  ,  $FG: x = 3, z = -2; y \in [1, 4]$  ,  $EH: x = 3, z = 2; y \in [1, 4]$   
 $AE: y = 1, z = 2; x \in [1, 3]$  ,  $BF: y = 1, z = -2; x \in [1, 3]$  ,  $DG: y = 4, z = -2; x \in [1, 3]$  ,  $CH: y = 4, z = 2; x \in [1, 3]$

ت:

$A(1, 1, 2)$   $B(1, 1, -2)$   $C(1, 4, 2)$  ,  $D(1, 4, -2)$   
 $E(3, 1, 2)$   $F(3, 1, -2)$   $G(3, 4, 2)$  ,  $H(3, 4, -2)$

ث:

$P_1: x = 1; y \in [1, 4], z \in [-2, 2]$        $P_2: x = 3; y \in [1, 4], z \in [-2, 2]$   
 $P_3: y = 1; x \in [1, 3], z \in [-2, 2]$        $P_4: y = 4; x \in [1, 3], z \in [-2, 2]$   
 $P_5: z = -2; x \in [1, 3], y \in [1, 4]$        $P_6: z = 2; x \in [1, 3], y \in [1, 4]$

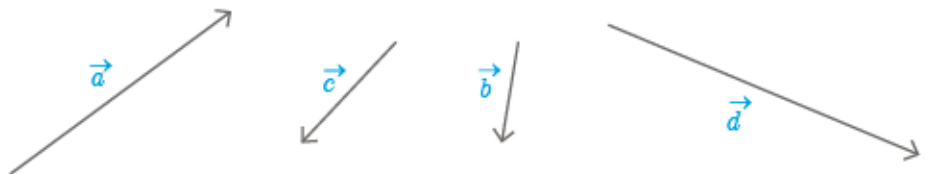
ج: نقطه  $M(2, 2, 0)$  درون مکعب و نقطه  $N(1, 2, 0)$  روی وجه  $P_1$  قرار دارد.

چ: شرط آنکه نقطه ی  $M$  درون مکعب باشد این است که در هر سه شرط  $2 < z_M < 4$  ,  $1 < y_M < 3$  ,  $1 < x_M < 3$  صدق کند.

و شرط آنکه نقطه ی  $M$  روی مکعب باشد این است که در یکی از شرایط بند (ث) این سوال صدق کند.

## بردارها در $\mathbb{R}^2$

در سال‌های گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت‌دار مانند  $AB$  در شکل مقابل، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن  $A$  و انتهای آن  $B$  می‌باشد. این بردار را با  $\vec{AB}$  و اندازه آن را با  $|\vec{AB}|$  نشان می‌دهند. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند  $\vec{a}$  و اندازه طول آن را با  $|\vec{a}|$  نمایش می‌دهند. در شکل زیر چند بردار مختلف رسم شده‌اند. در این کتاب از هر دو شیوه نگارش، بسته به زمینه مورد بحث استفاده می‌گردد.



دو بردار را مساوی یا همسنگ گوئیم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل بردارها با هم مساوی هستند. همواره می‌توان هر بردار را با برداری مساوی آن، که از مبدأ مختصات شروع می‌شود یکی دانست، چرا که جهت و اندازه آنها برابر است.

واضح است که می‌توان بی‌شمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه در نظر گرفت. به این بردارهای برابر، در اصطلاح، بردارهای هم‌ارز گفته می‌شود. برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را به عنوان نماینده بردارهای همسنگ در نظر می‌گیرند. مثلاً در شکل قبل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ  $\vec{a}$  می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیرند.

با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر گرفته‌ایم، مؤلفه‌های یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس. از این رو هر بردار مانند  $\vec{a}$  را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  که  $(a_1, a_2)$  مختصات انتهای بردار  $\vec{a}$  می‌باشد.

**مثال:** بردارهای  $\vec{a} = (2, 2)$ ،  $\vec{b} = (-2, -2)$  و  $\vec{c} = (2, -1)$  و  $\vec{d} = (-3, 2)$  و  $\vec{e} = (1, 0)$  و  $\vec{j} = (0, 1)$  در دستگاه مختصات رویه‌رو رسم شده‌اند.

از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  از روش متوازی‌الاضلاع به صورت زیر به دست می‌آید و به آن برابند دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  می‌گویند.

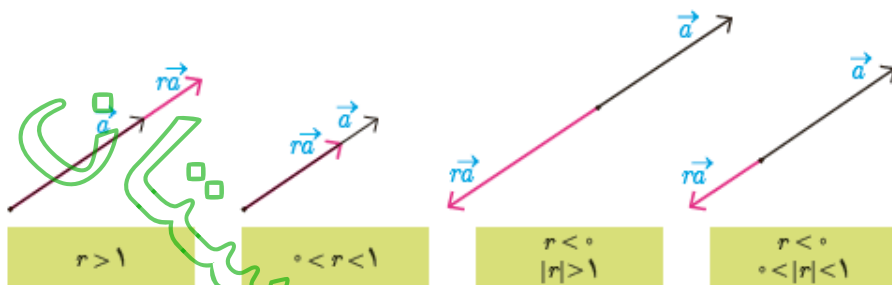
و نیز اگر داشته باشیم  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  می‌توان نوشت:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

همچنین اگر  $r \in \mathbb{R}$  و  $\vec{a}$  یک بردار باشد، آنگاه بردار  $r\vec{a}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

می‌توان نشان داد دو بردار  $r\vec{a}$  و  $\vec{a}$  همواره با هم موازی‌اند و برعکس اگر دو بردار مانند  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است. در شکل‌های زیر وضعیت دو بردار  $r\vec{a}$  و  $\vec{a}$  در حالت‌های مختلف نشان داده شده‌اند.



به طور خاص وقتی  $r = -1$  بردار  $r\vec{a} = (-a_1, -a_2)$  حاصل می‌شود که آن را قرینه بردار  $\vec{a}$  می‌نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می‌توان برای تفاضل دو بردار نوشت:

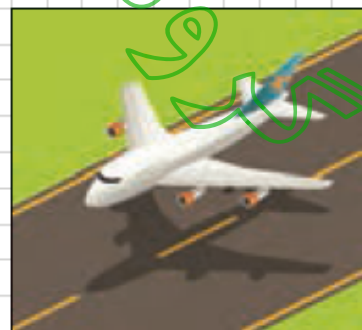
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

به نظر شما تعبير هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

معمولاً مبدأ مختصات را به عنوان بردار صفر در نظر می‌گیرند و با  $\vec{O} = (0, 0)$  نمایش می‌دهند. با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار  $\vec{a}$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

بردارها، کاربردهای فراوانی در محاسبات مهندسی و نیز مدل‌سازی‌ها دارند. به طور نمونه بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود (مسیر باند فرود) می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار



گیرد (به شکل زیر رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرنجگی می گویند. بردارها برای مدل سازی وضعیت فرود هواپیما در چنین شرایطی بسیار مناسب می باشند. اکنون به مثال بعد در این رابطه دقت کنید.



هواپیما در حال نزدیک شدن به باند فرود



اولین برخورد هواپیما با باند فرود

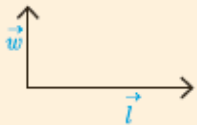


هواپیما بر روی باند فرود و در حال کاهش سرعت



توقف کامل

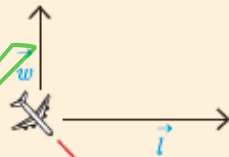
**مثال:** فرض کنید مسیر فرود (خط فرود) در جهت بردار  $\vec{t}$  و حداکثر نیروی قابل کنترل در لحظه فرود با اندازه این بردار برابر باشد. همچنین باد نیرویی در جهت بردار  $\vec{w}$  به هواپیما وارد می کند. در هر یک از دو وضعیت زیر خلبان، هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده می تواند قرار دهد، به طوری که یک فرود ایمن داشته باشد یعنی برآیند نیروی محرکه  $\vec{t}$  و نیز  $\vec{w}$  در جهت  $\vec{t}$  باشد.



الف



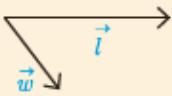
الف-۱



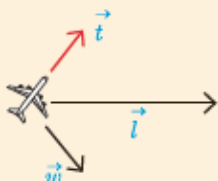
الف-۲



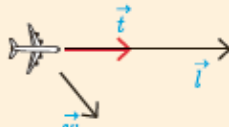
الف-۳



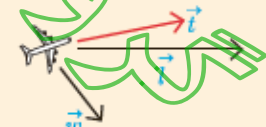
ب



ب-۱

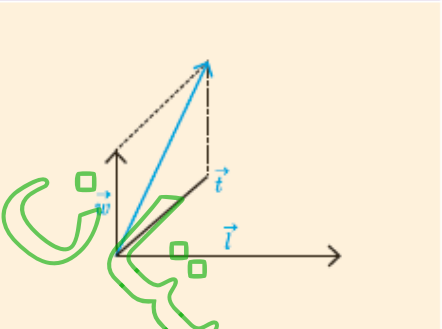
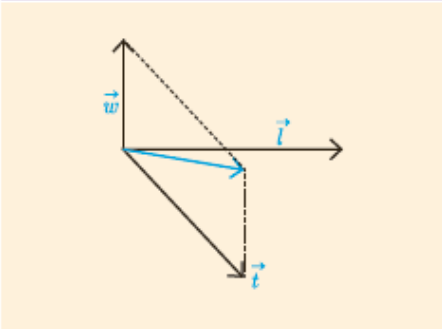
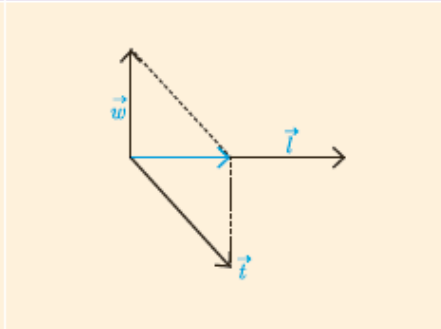


ب-۲

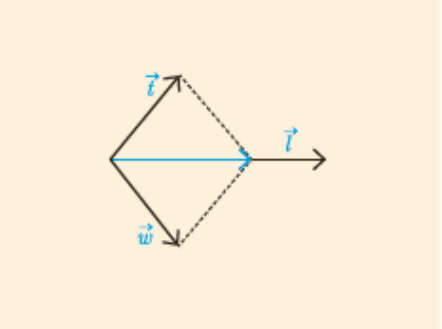
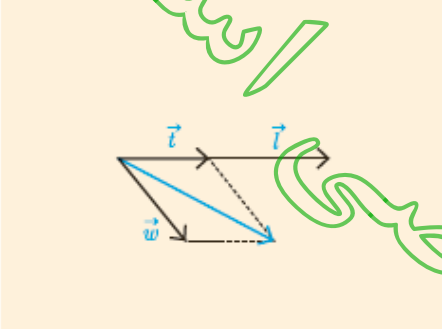
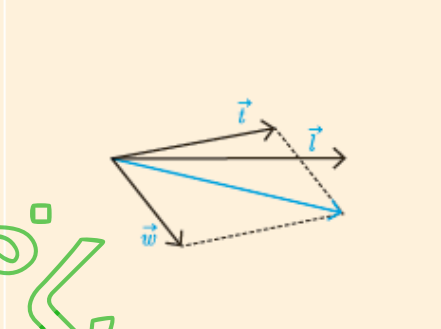


ب-۳

**پاسخ:** در مورد وضعیت الف براین بردارهای  $\vec{w}$  (نیروی باد) و  $\vec{t}$  (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

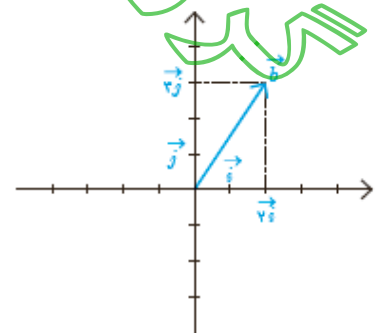
الف-۱	الف-۲	الف-۳
		
بردار براین در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از بالای باند)	بردار براین در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار براین در جهت $\vec{t}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{t}$ است. بنابراین $\vec{t}$ فرود ایمن است.

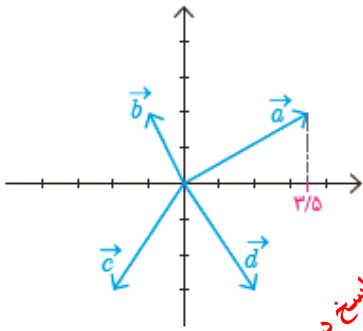
در مورد وضعیت ب براین بردارهای  $\vec{w}$  (نیروی باد) و  $\vec{t}$  (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

ب-۱	ب-۲	ب-۳
		
بردار براین در جهت $\vec{t}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{t}$ است. بنابراین فرود ایمن است.	بردار براین در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار براین در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)

معمولاً بردار به طول واحد در جهت محور  $x$  ها را با  $\vec{i}$  و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور  $y$  ها را با  $\vec{j}$  نمایش می دهند. در شکل مقابل بردار  $\vec{i} = (1, 0)$  و  $\vec{j} = (0, 1)$  و نیز بردار  $\vec{b} = (2, 3)$  به صورت حاصل جمع مضاربی از  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  نمایش داده شده اند. به طور کلی می توان هر بردار دلخواه مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  را به صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$





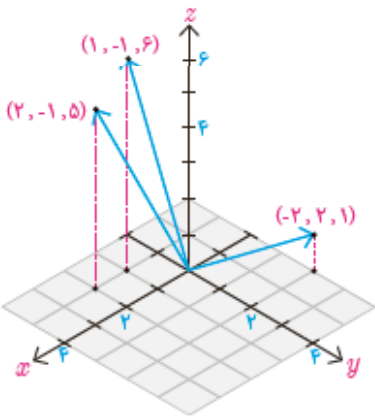
بسیخ در صفحه ی بعد

مختصات بردارها در صفحه

- ۱- در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده است.
- الف) مختصات بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  را یافته و آن را رسم کنید.
- ب) قرینه بردارهای  $\vec{c}$  و  $\vec{b}$  را رسم کرده و مختصات آنها را به دست آورید.
- ج) مؤلفه های بردارهای  $\vec{a} - \vec{b}$  و  $\vec{d} - \vec{c}$  را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به دست آورید.
- د) هریک از بردارهای  $\vec{d}, \vec{c}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{d} - \vec{c}$  را بر حسب بردارهای واحد  $\vec{i}, \vec{j}$  به دست آورید.

### ■ بردارها در $\mathbb{R}^3$

مشابه بردارهای  $\mathbb{R}^2$  می توان به هر نقطه از  $\mathbb{R}^3$ ، برداری که از مبدأ شروع می شود نظیر کرد. مثلاً فرض کنید  $A = (a_1, a_2, a_3)$  نقطه ای غیر از مبدأ  $\mathbb{R}^3$  باشد. در این صورت پاره خط جهت داری که از مبدأ مختصات یعنی  $O = (0, 0, 0)$  شروع شده و در نقطه  $A$  پایان می یابد یک بردار در  $\mathbb{R}^3$  را مشخص می کند و آن را با  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  نشان می دهیم. در بردار  $\vec{a}$  مقادیر  $a_1, a_2, a_3$  را مؤلفه های بردار  $\vec{a}$  می گویند. همچنین قرارداد می کنیم که مبدأ مختصات یعنی  $O = (0, 0, 0)$  نمایشگر بردار  $\vec{0} = (0, 0, 0)$  است که بردار صفر نامیده می شود. به عنوان مثال در شکل مقابل، چند بردار در  $\mathbb{R}^3$  نمایش داده شده است.



### ■ طول بردار در $\mathbb{R}^3$

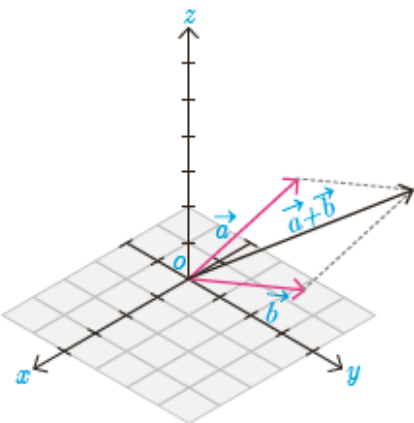
با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از  $\mathbb{R}^3$ ، طول هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  در  $\mathbb{R}^3$  از رابطه زیر به دست می آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

### ■ حاصل جمع دو بردار در $\mathbb{R}^3$

حاصل جمع دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  به صورت زیر تعریف می شود که به آن بردار برابند نیز می گویند.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



این شکل بردارهای  $\vec{a}, \vec{b}$  و  $\vec{a} + \vec{b}$  را در دستگاه  $\mathbb{R}^3$  نشان می دهد. همان طور که از شکل روبرو پیداست برای هر دو بردار غیر صفر  $\vec{a}, \vec{b}$  می توان روش متوازی الاضلاع را در صفحه ای که از آن دو بردار می گذرد به کار برد و بردار برابند  $\vec{a} + \vec{b}$  را یافت.

الف :

$$\vec{a} + \vec{b} = (۳, ۵, ۲) + (-۱, ۲) = (۲, ۵, ۴)$$

ب :

$$\vec{c} = (-۲, -۳) \Rightarrow -\vec{c} = (+۲, +۳)$$

$$\vec{d} = (+۲, -۳) \Rightarrow -\vec{d} = (-۲, +۳)$$

ج :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (۳, ۵, ۲) + (+۱, -۲) = (۴, ۵, ۰) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = ۴, ۵$$

$$\vec{d} - \vec{c} = \vec{d} + (-\vec{c}) = (+۲, -۳) + (+۲, +۳) = (+۴, ۰) \Rightarrow |\vec{d} - \vec{c}| = ۴$$

د :

$$\vec{a} = (۳, ۵, ۲) = ۳, ۵i + ۲j$$

$$\vec{b} = (-۱, +۲) = -i + ۲j$$

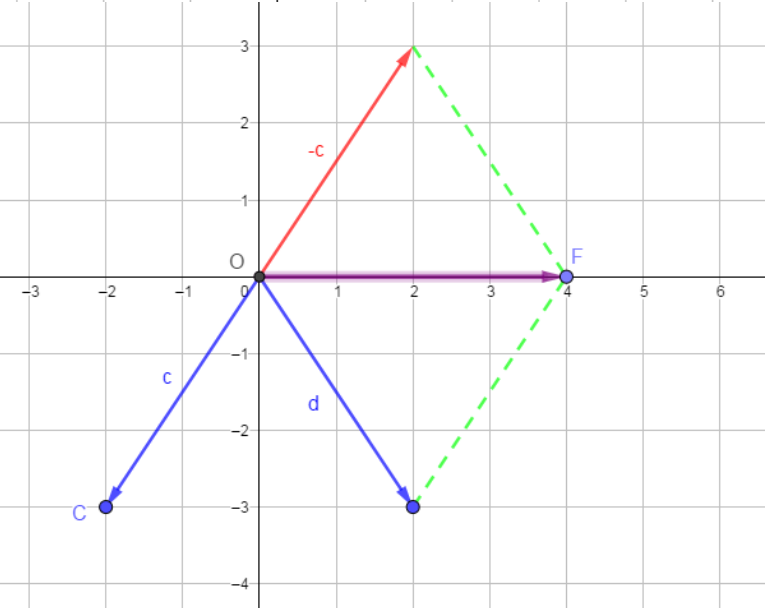
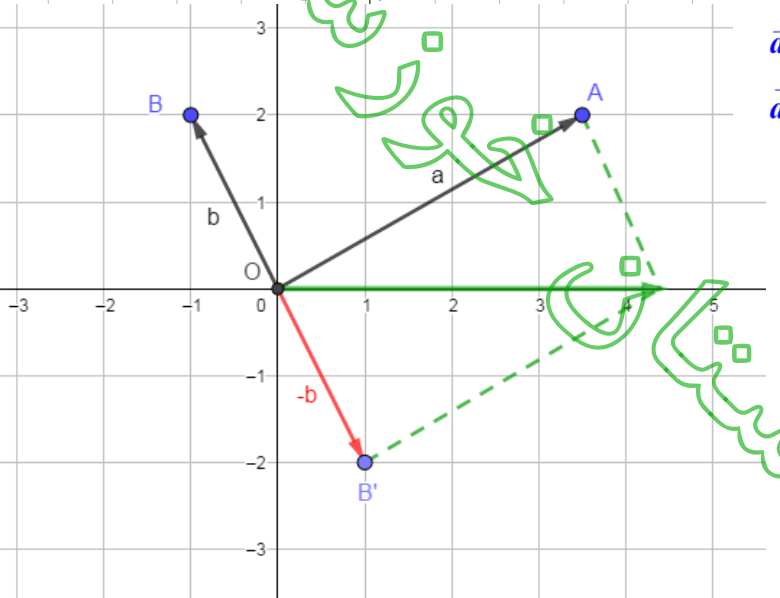
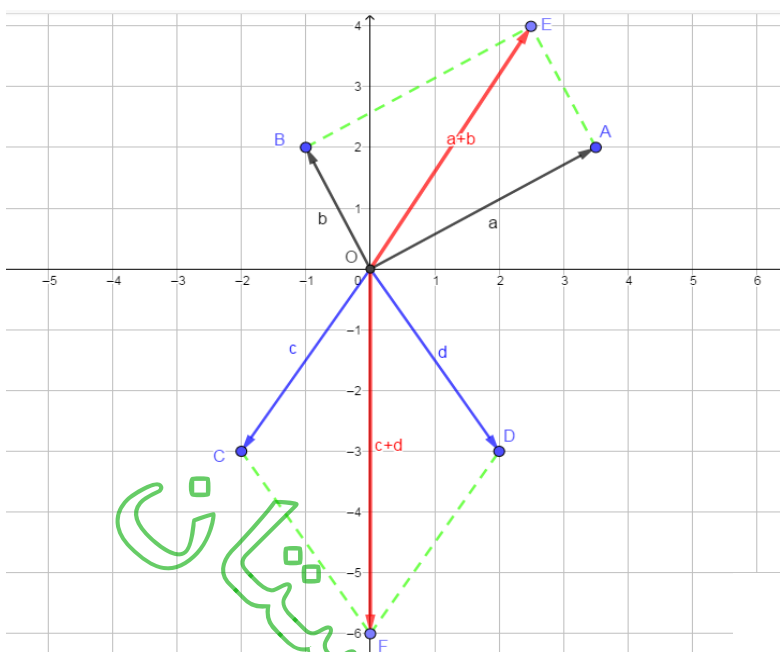
$$\vec{c} = (-۲, -۳) = -۲i - ۳j$$

$$\vec{d} = (+۲, -۳) = ۲i - ۳j$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (۲, ۵, ۴) = ۲, ۵i + ۴j$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (۴, ۵, ۰) = ۴, ۵i$$

$$\vec{d} - \vec{c} = (+۴, ۰) = ۴i$$

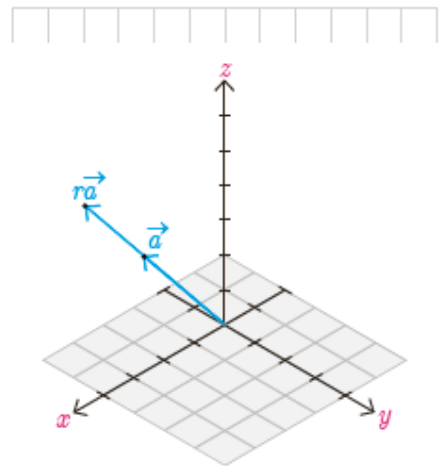




برای هر عدد حقیقی  $r$ ، حاصل ضرب  $r$  در بردار  $\vec{a}$  را به صورت زیر تعریف می کنند.  

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3)$$

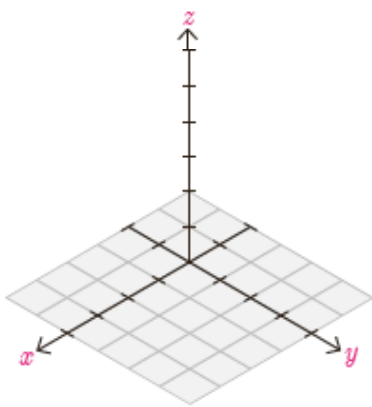
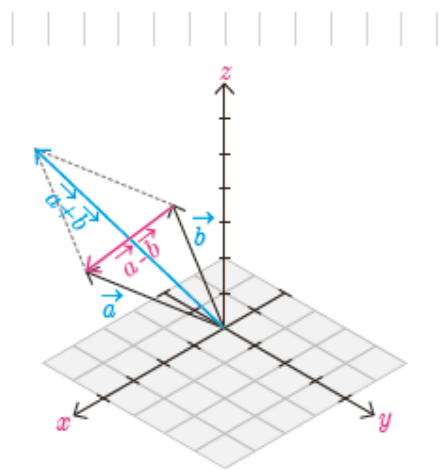
این شکل دو بردار  $r\vec{a}$ ،  $\vec{a}$  که در آن  $r > 1$  را نشان می دهد.  
 آیا راستای  $r\vec{a}$ ،  $\vec{a}$  با هم متفاوت اند؟



به طور خاص بردار  $-\vec{a}$  را که با  $-\vec{a}$  نشان می دهند قرینه  $\vec{a}$  می گویند یعنی  $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ . این بردار هم اندازه با  $\vec{a}$  (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می باشد. اکنون تفاضل بردار  $\vec{a}$  از  $\vec{b}$  یعنی  $\vec{a} - \vec{b}$  به صورت زیر تعریف می کنیم.  

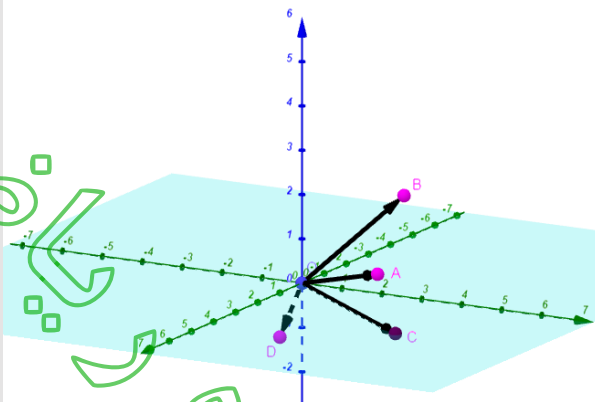
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

در شکل بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و قرینه آن و نیز  $\vec{a} - \vec{b}$  نمایش داده شده اند.



### کارد کلاس

نقاط  $A = (2, 3, 1)$ ،  $B = (-1, 2, 1)$  را در  $C = (3, 4, 0)$  و  $D = (1, 0, -1)$  یک دستگاه  $\mathbb{R}^3$  در نظر بگیرید، اگر بردارهایی در  $\mathbb{R}^3$  با نقاط انتهایی به ترتیب  $A, B, C, D$  باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید.



$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, 3, 1) + (-2, 4, 4) = (0, 7, 5)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (2, 3, 1) + [(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = (2, 3, 1) + (2, 6, 2) = (4, 9, 3)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = [(2, 3, 1) + (-1, 2, 2)] + (3, 4, 0) = (1, 5, 3) + (3, 4, 0) = (4, 9, 3)$$

$$-2(\vec{b} + \vec{c}) = -2[(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = -2(2, 6, 2) = (-4, -12, -4)$$

$$-2\vec{b} - 2\vec{c} = -2(-1, 2, 2) - 2(3, 4, 0) = (2, -4, -4) + (-6, -8, 0) = (-4, -12, -4)$$

## خواص جمع بردارها

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم. به طور کلی اگر  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  سه بردار دلخواه و  $\vec{O}=(0,0,0)$  بردار صفر و نیز  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

$$1- \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{خاصیت جابه جایی جمع})$$

$$2- \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری در جمع})$$

$$3- \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{O} \quad (\text{عضو قرینه})$$

$$4- \vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{عضو خنثی})$$

$$5- r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$6- (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

$$7- (rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$$

$$8- \text{اگر } \vec{b} = r\vec{a} \text{ آنگاه } |\vec{b}| = |r||\vec{a}| \quad (|r| \text{ قدر مطلق } r \text{ است})$$

## بردارهای یکه

با بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}$  در صفحه  $\mathbb{R}^2$  به ترتیب در جهت محور  $x$  و  $y$  آشنا شدید. به طور مشابه در  $\mathbb{R}^3$  بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات  $\mathbb{R}^3$  در نظر می گیرند.

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

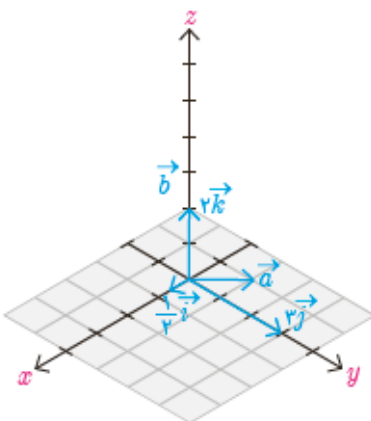
به این ترتیب  $\vec{i}$  بردار یکه در جهت محور طول ها،  $\vec{j}$  بردار یکه در جهت محور عرض ها و  $\vec{k}$  بردار یکه در جهت محور ارتفاع ها می باشند.

همچنین با استفاده از روابط بین بردارها به سادگی می توان نشان داد که هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  به صورت ترکیبی از بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  قابل بیان است. در واقع داریم:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

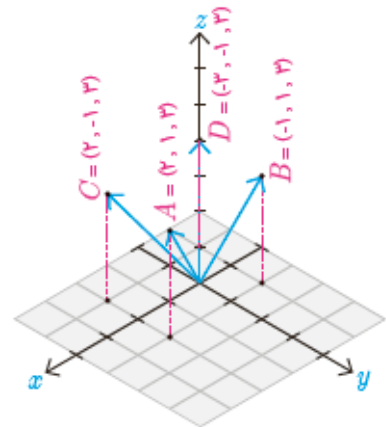
**مثال:** بردار  $\vec{a} = (\frac{1}{4}, 3, 2)$  را برحسب بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  و نشان دهید.

$$\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$



۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند.  $ABDC$  الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی  $ABCD$  را بنویسید.

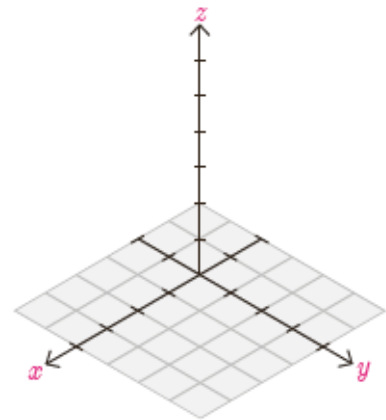
ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح  $ABCD$  هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.



۲- نقاط با مختصات  $S = (-2, -2, -2)$  و  $R = (3, 0, -1)$ ،  $Q = (0, -1, -2)$ ،  $P = (1, 0, 1)$  را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.

۳- در سؤال قبل طول پاره خط های  $PQ$ ،  $RQ$  و  $PS$  را بیابید.

۴- فرض کنید  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  و  $P = (x_2, y_2, z_2)$ . مختصات نقطه  $M$  وسط پاره خط  $PQ$  را بیابید.



۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف)  $\vec{a} = (-\frac{1}{3}, 0, 2)$  ،  $\vec{b} = (\sqrt{2}, 1, 1)$  ،  $r = 3$  ،  $r\vec{a} - \vec{b} = ?$

ب)  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  ،  $\vec{b} = (3, 1, -1)$  ،  $r = -1$  ،  $r\vec{a} + \vec{b} = ?$

ج)  $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{k}$  ،  $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$  ،  $\vec{a} + \vec{b} = ?$

د)  $\vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j}$  ،  $\vec{b} = -\vec{k} + \vec{i}$  ،  $r = \frac{1}{5}$  ،  $r\vec{a} + \vec{b} = ?$

۶- طول بردار  $\vec{a}$  را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

پاسخ تمرین ۱:

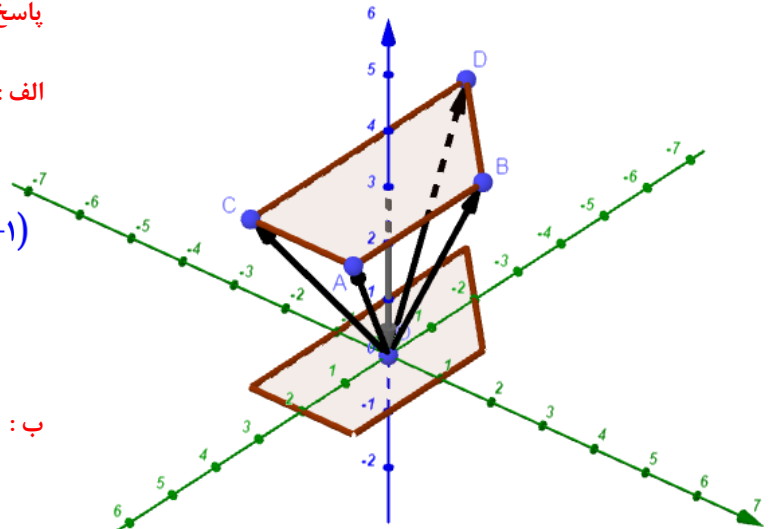
الف:

$$A(2, 1, 3), B(-1, 1, 3) \Rightarrow AB: (y = 1, z = 3; -1 \leq x \leq 2)$$

$$B(-1, 1, 3), D(-3, -1, 3) \Rightarrow BD: (y = x + 2, z = 3; -3 \leq x \leq -1)$$

$$D(-3, -1, 3), C(2, -1, 3) \Rightarrow DC: (y = -1, z = 3; -3 \leq x \leq 2)$$

$$A(2, 1, 3), C(2, -1, 3) \Rightarrow AC: (x = 2, z = 3; -1 \leq y \leq 1)$$



ب:

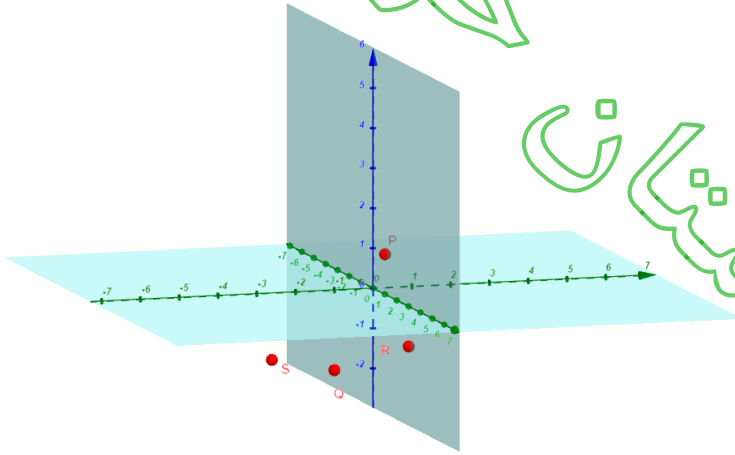
$$A'(2, 1, 0), B'(-1, 1, 0) \Rightarrow A'B': (y = 1, z = 0; -1 \leq x \leq 2)$$

$$B'(-1, 1, 0), D'(-3, -1, 0) \Rightarrow B'D': (y = x + 2, z = 0; -3 \leq x \leq -1)$$

$$D'(-3, -1, 0), C'(2, -1, 0) \Rightarrow D'C': (y = -1, z = 0; -3 \leq x \leq 2)$$

$$A'(2, 1, 0), C'(2, -1, 0) \Rightarrow A'C': (x = 2, z = 0; -1 \leq y \leq 1)$$

پاسخ تمرین ۲:



پاسخ تمرین ۳:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} \Rightarrow PQ = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

$$RQ = \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2 + (z_Q - z_R)^2} \Rightarrow RQ = \sqrt{(0 - 3)^2 + (-1 - 0)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

$$PS = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2 + (z_S - z_P)^2} \Rightarrow PS = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-2 - 0)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$$

پاسخ تمرین ۴:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}, y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}, z_M = \frac{z_P + z_Q}{2} \Rightarrow M \left( \frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2} \right)$$

$$\text{الف: } r\vec{a} - \vec{b} = 3\left(-\frac{1}{3}, 0, 2\right) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (-1, 0, 6) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (\sqrt{2} - 1, -1, 5)$$

$$\text{ب: } r\vec{a} + \vec{b} = -1(3, 2, -1) + (3, 1, -1) = (-3, -2, 1) + (3, 1, -1) = (0, -1, 0)$$

$$\text{ج: } \vec{a} + \vec{b} = (\sqrt{2}, 0, -1) + (0, 3, 1) = (\sqrt{2}, 3, 0)$$

$$\text{د: } r\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{5}(0, 1, 5) + (1, 0, -1) = \left(0, \frac{1}{5}, 1\right) + (1, 0, -1) = \left(1, \frac{1}{5}, 0\right)$$

$$\text{الف: } \vec{a} = \left(-\frac{1}{3}, 0, 2\right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{37}{9}} = \frac{\sqrt{37}}{3}$$

$$\text{ب: } \vec{a} = (3, 2, -1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{ج: } \vec{a} = (\sqrt{2}, 0, -1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{د: } \vec{a} = (0, 1, 5) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

خوارزمستان

استان

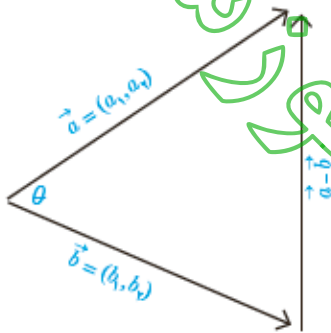
ریاضی

مجموعه

## ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

فرض کنید دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  همانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار ( $\theta$ ) را پیدا کنیم.

برای این منظور بردار تفاضل  $\vec{a} - \vec{b}$  را نیز در این شکل رسم کرده‌ایم تا مثلی به طول اضلاع زیر به دست آید.



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها که سال گذشته آموخته‌اید می‌توان نوشت.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورت کسر فوق را می‌توان با توجه به اندازه‌های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده‌اند به صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

پس عبارت (1) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است.)

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار  $0 \leq \theta \leq \pi$  به دست می‌آید.  
 کمیتی که در صورت این کسر سمت راست است را معمولاً با  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نشان می‌دهند  
 و به آن حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  می‌گویند. بنابراین  
 می‌توان نوشت.

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

به طور مشابه حاصل ضرب داخلی دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  نیز قابل تعریف است.

**تعریف:** اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  باشند؛

در این صورت ضرب داخلی  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را که با نماد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نمایش می‌دهیم  
 به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می‌توان نشان داد که اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار ناصفر  
 $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  در  $\mathbb{R}^3$  باشند آنگاه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دو بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  صفر باشند آنگاه  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  هر چند که در این حالت زاویه  $\theta$  بین دو بردار تعریف نمی‌شود.

**مثال:** زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  را پیدا می‌کنیم.

**حل:** ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \times 1) + (-1 \times -1) + (2 \times 0) = 3$$

از طرفی اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 3 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

## ■ خواص ضرب داخلی

۱-  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  خاصیت جابه‌جایی

اثبات:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

۲-  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

اثبات:  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

۳-  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  خاصیت شرکت‌پذیری

اثبات:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

۴- برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a$  و  $b$  برهم عمود هستند

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \quad \begin{matrix} \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \theta \geq \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

۵-  $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0, \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

۶-  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$  (نامساوی کشی شوارتز) منظور از  $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$  قدر مطلق مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  است.

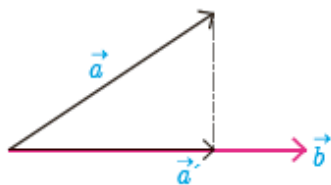
$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

که در آخرین نامساوی از  $|\cos \theta| \leq 1$  استفاده شده است.

## ■ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$

دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را که زاویه بین آنها  $\theta$  است با فرض  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  که آن را با  $\vec{a}'$  نمایش داده‌ایم به دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک  $r$  حقیقی  $\vec{a}' = r \vec{b}$ . با توجه به اینکه بردار تفاضل  $\vec{a}$  از  $\vec{a}'$  بر بردار  $\vec{b}$  عمود است. خواهیم داشت:

$$(\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{a} - r \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - r \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$





بنابراین بردار تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{a}' = r\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

**مثال:** تصویر قائم بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  را بر امتداد بردار  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + (2)(0) = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{2} \vec{b} = \frac{3}{2} (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

### کاردرکلاس

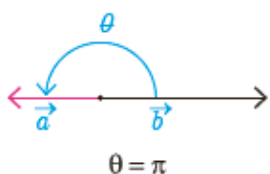
۱- تصویر بردار  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  بر امتداد بردار  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  را بیابید.

۲- نشان دهید که اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

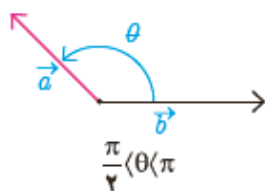
۳- نشان دهید که اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  در یک راستا باشند آنگاه تصویر  $\vec{a}$  بر  $\vec{b}$  برابر خود  $\vec{a}$  می شود.

۴- هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید.

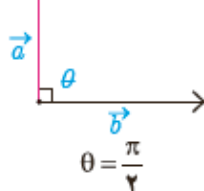
ج)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|a||b|$



ت)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|$



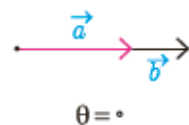
پ)  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$



ب)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



الف)  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$



$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0) \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0, \vec{j}^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$\vec{i}' = \frac{\vec{i} \cdot \vec{j}}{\vec{j}^2} \vec{j} = \frac{0}{1} \vec{j} = 0 \cdot (0, 1, 0) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

پاسخ سوال ۲ کار در کلاس

فرض کنیم  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \neq \vec{0}$  و  $\vec{a} \perp \vec{b}$  در این صورت  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  و تصویر  $\vec{a}$  بر  $\vec{b}$  برابر است با

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \vec{b} = \frac{0}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} (b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

پاسخ سوال ۳ کار در کلاس

فرض کنیم  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \neq \vec{0}$  و  $\vec{a} = k\vec{b}$  در این صورت

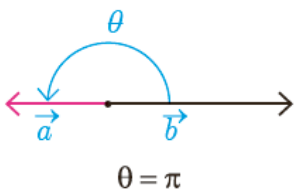
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k\vec{b} \cdot \vec{b} = kb^2$$

پس تصویر  $\vec{a}$  بر  $\vec{b}$  برابر است با

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \vec{b} = \frac{kb^2}{b^2} \vec{b} = k\vec{b} = \vec{a}$$

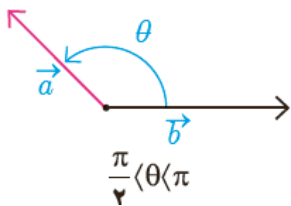
پاسخ سوال ۳ کار در کلاس

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|a||b|$  (ج)



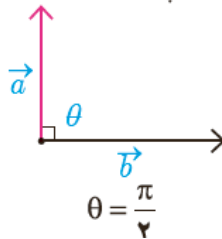
ج

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|$  (ت)



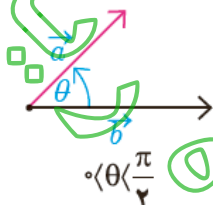
پ

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$  (ب)



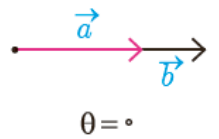
ب

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  (ب)



الف

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$  (الف)



ت

## ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می توان ضرب دو بردار را به گونه ای تعریف کرد که حاصل ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

**تعریف:** فرض کنیم  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند.

ضرب داخلی  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را که با نماد  $\vec{a} \times \vec{b}$  نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

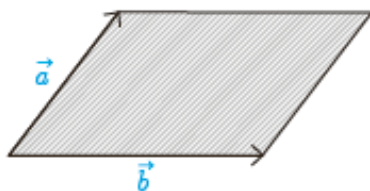
اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار غیر صفر و  $\theta$  زاویه بین آنها باشد اندازه بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$  می شود:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= (a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2) + (a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2) + \\ &+ (a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_2)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = \\ &(|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta)^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

بنابراین

از هندسه سال قبل می دانیم که سینوس عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر  $|\vec{a}|$  و  $|\vec{b}|$  است.



**مثال:** بردارهای  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  در  $\mathbb{R}^3$  در نظر بگیرید. حاصل  $\vec{i} \times \vec{j}$  و  $\vec{j} \times \vec{i}$  را به دست آورید.

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$

$$= ((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)) = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$$

$$= ((1)(0) - (0)(0), (0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(1)) = (0, 0, -1) = -\vec{k}$$

همان طور که مشاهده شد حاصل ضرب خارجی دو بردار  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  برابر با بردار  $\vec{k}$  شد که بر هر دوی  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  عمود می باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می باشد.

**خاصیت ۱:** فرض کنید  $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که  $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$  و  $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$  بنابراین با توجه به آنچه تا کنون به دست آمده است می توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است. اثبات این خاصیت در ادامه می آید.

**اثبات:**

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

می توان نشان داد که برای سه برداری که  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  روابط زیر برقرار است:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می دهند.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{خاصیت ۲:}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۳:}$$

$$r \vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r \vec{b} \quad \text{خاصیت ۴: اگر } r \text{ عددی حقیقی باشد، آنگاه:}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} \quad \text{خاصیت ۵: برای سه بردار } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ داریم:}$$

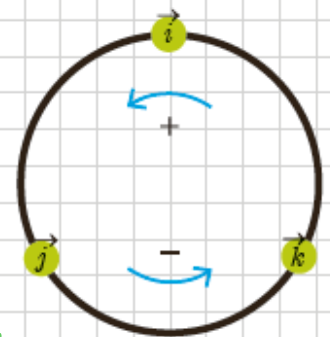
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۶: دو بردار غیر صفر } \vec{a}, \vec{b} \text{ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر}$$

**اثبات:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$



## حجم متوازی السطوح

اگر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می توان به کمک آنها متوازی السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.

همان طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر روی بردار  $\vec{b} \times \vec{c}$  یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید شده پس مساحت آن برابر است با  $|\vec{b} \times \vec{c}|$ . با استفاده از دترمینان نیز می توان مساحت متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  به صورت زیر به دست آورد:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{حجم متوازی السطوح} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = |\vec{b} \times \vec{c}| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ . حجم متوازی السطوح پدید آمده توسط سه بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ،  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  و  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  با استفاده از دترمینان زیر نیز به دست می آید.

$$K = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم} = V = |K|$$

$$K = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \text{ یا}$$

اگر  $K$  در این صورت چه نتیجه ای می گیرید؟

**مثال:** حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای  $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ،  $\vec{b} = (0, 1, 1)$  و  $\vec{c} = (1, 0, 1)$  تولید می شود.

**حل:** با استفاده از ضرب خارجی  $\vec{b}$  در بردار  $\vec{c}$  به دست می آید.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1, 1, -1)$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به دست می آید.

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = |1 + 1 + 0| = 2$$

پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$  برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

**مثال:** آیا بردارهای  $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ،  $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ،  $\vec{c} = (1, 9, -1)$  در یک صفحه‌اند؟  
**حل:** برای این منظور کافی است  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (-16, 14, 10) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -32 + 42 - 10 = 0 \Rightarrow \text{سه بردار در یک صفحه هستند.}$$



### تمرین

۱- برای هر یک از بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  که در زیر آمده است تصویر قائم  $\vec{a}$  را بر امتداد  $\vec{b}$  به دست آورید.

الف)  $\vec{a} = (2, -1, 2)$ ،  $\vec{b} = i$  (ب)  $\vec{a} = (2, 3, 1)$ ،  $\vec{b} = (3, 2, 1)$

ج)  $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ،  $\vec{b} = (-1, 2, 4)$

۲- فرض کنید  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$  را محاسبه کنید.

۳- سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  مثال بزنید که برای آنها  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$  ولی  $\vec{b} \neq \vec{c}$ .

۴- اگر  $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ ،  $\vec{b} = (3, -4, 2)$  و  $\vec{a} = (1, -3, 4)$  باشند آنگاه تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b} + \vec{c}$  را به دست آورید.

۵- برداری عمود بر دو  $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ ،  $\vec{a} = (1, -3, 2)$  بردار پیدا کنید.

۶- سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  مثال بزنید که برای آنها  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$  ولی  $\vec{b} \neq \vec{c}$ . آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷- بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض‌اند به طوری که  $|\vec{a}| = 3$ ،  $|\vec{b}| = 26$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ . مقدار  $a \cdot b$  را محاسبه کنید.

۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط  $A = (3, 5, 7)$ ،  $b = (5, 5, 0)$ ،  $A = (-4, 0, 4)$  داده شده است را بیابید.

$$\vec{a} = (2, -1, 2), \vec{b} = (1, 0, 0) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times 0 = 2, \vec{b}^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \vec{b} = \frac{2}{1} (1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

$$\vec{a} = (2, 2, 1), \vec{b} = (3, 2, 1) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 13, \vec{b}^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \vec{b} = \frac{13}{14} (3, 2, 1) = \left( \frac{39}{14}, \frac{26}{14}, \frac{13}{14} \right)$$

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \vec{b} = (-1, 2, 4) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 0 \times 4 = 1, \vec{b}^2 = (-1)^2 + 2^2 + 4^2 = 21$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \vec{b} = \frac{1}{21} (-1, 2, 4) = \left( \frac{-1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{4}{21} \right)$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 3$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{\cdot \vec{a}} \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad \boxed{1}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{\cdot \vec{b}} \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad \boxed{2}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{\cdot \vec{c}} \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = 0 \quad \boxed{3}$$

$$\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3} \Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 = 0 \Rightarrow 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + 4 + 1 + 9 = 0$$

$$2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = -14 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -7$$

با فرض  $\vec{a} = (1, 1, 1), \vec{b} = (3, 2, -1), \vec{c} = (5, -2, 1)$  داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \times 5 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 4$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}, \vec{b} \neq \vec{c}$$

پس:  $\vec{a} = (1, -3, 4), \vec{b} = (3, -4, 2), \vec{c} = (-1, 1, 4)$

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = (3, -4, 2) + (-1, 1, 4) = (2, -3, 6)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1 \times 2 + (-3)(-3) + 4 \times 6 = 2 + 9 + 24 = 35$$

$$|\vec{d}|^2 = 2^2 + (-3)^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} \vec{d} = \frac{35}{7} (2, -3, 6) = \frac{5}{1} (2, -3, 6) = \left( \frac{10}{1}, \frac{-15}{1}, \frac{30}{1} \right)$$

$$\vec{a} = (1, -3, 2), \vec{b} = (2, 1, 5)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 7i - 9j - 5k \Rightarrow \vec{c} = (7, -9, -5), \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

با فرض  $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, 4, 6), \vec{c} = (-1, -2, -3)$  داریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \vec{0}, \vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b} \neq \vec{c}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow 72 = 3 \times 26 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \pm \sqrt{\frac{25}{169}} = \pm \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 3 \times 26 \times \left( \pm \frac{5}{13} \right) = \pm 30$$

$$A(3, 5, 7), B(5, 5, 0), C(-4, 0, 4)$$

$$\vec{AB} = (2, 0, -7), \vec{AC} = (-7, -5, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -7 \\ -7 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -35i + 55j - 10k \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-35)^2 + 55^2 + (-10)^2} = \sqrt{4350}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{\sqrt{4350}}{2}$$



مجموعہ ریاضی استان خوزستان