فصل

۴ مثلثات

کرمان، کلوت شهداد

ماهوارهٔ امید اولین ماهوارهٔ ساخت ایران است که در بهمن ماه ۱۳۸۷ در مدار فضا قرار گرفت. در شکل بالا این ماهواره در h کیلومتری سطح زمین قرار دارد و در مدار خودش حول خط استوا حرکت می‌کند. اگر α زاویهٔ بین مرکز زمین (نقطهٔ o) تا ماهوارهٔ s و دوردست‌ترین نقطهٔ قابل دید روی کرهٔ زمین (نقطه p) تا این ماهواره باشد و شعاع تقریبی کرهٔ زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد آنگاه $\cos\alpha=\frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰+h}$ و

$\widehat{PA}=۶۴۰۰\times\hat{\alpha}$ (بر حسب رادیان)

درس اوّل — **واحدهای اندازه‌گیری زاویه**

درس دوم — **روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی**

درس سوم — **توابع مثلثاتی**

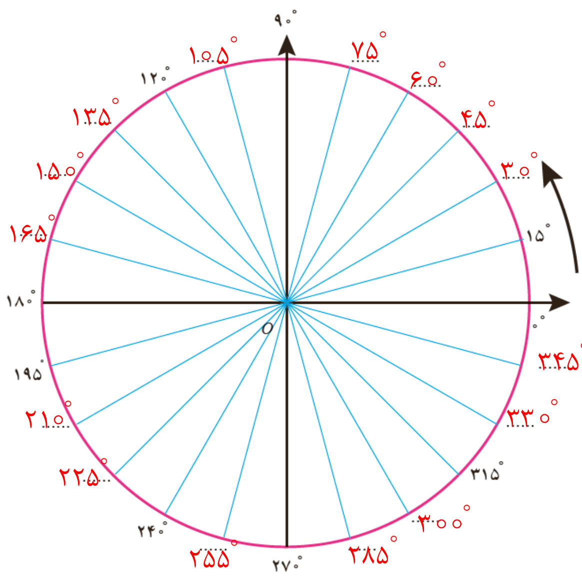
درس اوّل

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

یادآوری

● اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هرکدام از این کمان‌ها **۱ درجه** است. اندازهٔ هر کمان با زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.

● **دایرهٔ مثلثاتی** دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، **جهت مثلثاتی** می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.



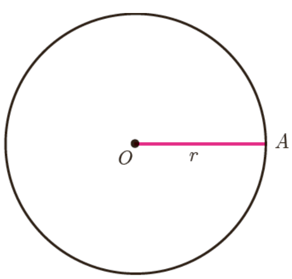
شکل مقابل یک دایرهٔ مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به **۲۴** قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویهٔ مناسب را روی شکل مشخص کنید.

برای اندازه‌گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می‌شوید.

در فعالیت زیر رابطهٔ بین اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به یک کمان و طول ک

فعالیت

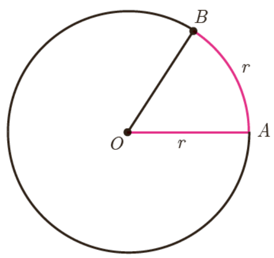
۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به‌دست آورید.



طول نخ اندزهٔ محیط دایره را مشخص می کند.اگر فرض کنیم اندازهٔ محیط دایره عددی مانند p شده باشد ، بنا براین شعاع به صورت مقابل به دست می آید: $p = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{p}{۲\pi}$

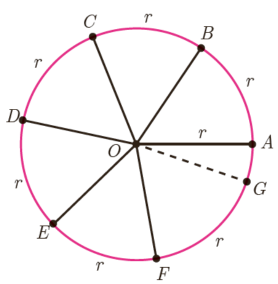
در این قسمت اگر فرض کنیم که $p = ۴۴\ cm$ برای محاسبه شعاع با فرض $\pi = ۳/۱۴$ داریم :

$$۴۴ = ۲ \times ۳/۱۴ \times r \Rightarrow r = \frac{۴۴}{۶/۲۸} \Rightarrow r \simeq ۷$$



۲ قطعه نخی را به اندازهٔ شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطهٔ A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطهٔ B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟

این زاویه تقریبا برابر با ۵۷° است .



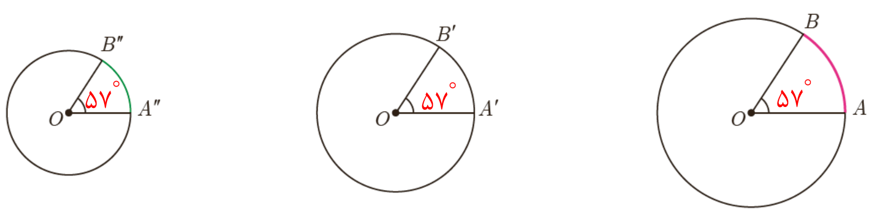
۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطهٔ B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطهٔ C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$، $\widehat{COD}$، $\widehat{DOE}$، $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویه $\widehat{AOB}$ برابر و هر یک تقریباً ۵۷ درجه است. آیا دو نقطهٔ G و A برهم منطبق می‌شوند؟خیر این دو نقطه بر هم منطبق نمی شوند.

نکته : $\widehat{GOA} \simeq ۱۸^\circ$

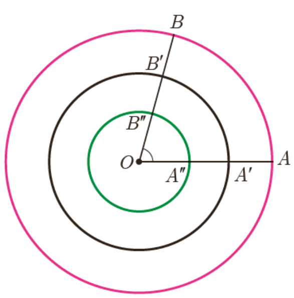
به این ترتیب ۶ زاویهٔ مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با شعاع دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها **یک رادیان** می گوییم.

> **۱ رادیان** برابر است با اندازهٔ زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

در تمام دایره‌های زیر اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.



به عبارت دیگر اگر اندازهٔ $\widehat{AOB}$، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم :

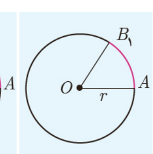
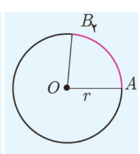
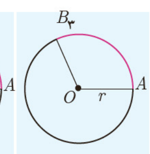
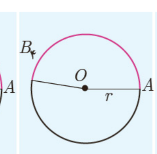
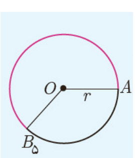
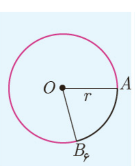
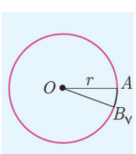


$$OA = \widehat{AB}$$

$$OA' = \widehat{A'B'}$$

$$OA'' = \widehat{A''B''}$$

۴ جدول زیر را کامل کنید.

شکل							
طول کمان AB_i $۱ \leq i \leq ۷$	r	$\frac{۳}{۲}r$	$۲r$	$۳r$	$۴r$	$۵r$	$۶r$
اندازهٔ زاویه $\angle AOB_i$ $۱ \leq i \leq ۷$	۱ رادیان	$\frac{۳}{۲}$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۴ رادیان	۵ رادیان	۶ رادیان

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

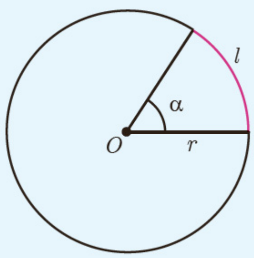
همان‌طور که می‌بینید در هر ستون با تقسیم طول کمان به شعاع دایره (r)، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به‌دست می‌آید. با توجه به جدول صفحهٔ قبل می‌توان گفت :

$$\frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \text{اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان}$$

اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\alpha=\frac{l}{r}$$

در رابطهٔ بالا l و r هم واحدند.



کار در کلاس

با استفاده از رابطهٔ بالا جدول زیر را کامل کنید :

۴۰۰ سانتی متر	۱۰ متر	۵۰ متر	۹۰ سانتی‌متر	۲۰۰ سانتی متر = ۲ متر ۲۰۰ سانتی‌متر	۰/۷۵ متر ۷۵ سانتی متر	۵۰۰ سانتی متر= ۵ متر ۵۰۰ سانتی‌متر	۵ سانتی متر	l
۲۰ سانتی‌متر	۱ متر	۱۰ متر	۳۰ سانتی متر	۱ متر	۰/۵ متر	۵ متر	۵ سانتی‌متر	r
۲۰ رادیان	۱۰ رادیان	۵ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱/۵ رادیان	۱ رادیان	۱ رادیان	α

$r=۵\ cm,\ \alpha=۱\text{رادیان},\ l=?\ ,\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow ۱=\frac{l}{۵}\Rightarrow l=۵\ cm$

$r=۵\ m,\ l=۵۰۰\ cm\Rightarrow l=۵\ m,\ \alpha=?\ ,\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow \alpha=\frac{۵}{۵}\Rightarrow \alpha=۱\text{رادیان}$

$r=۰/۵\ m,\ \alpha=۱/۵\text{رادیان},\ l=?\ ,\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow ۱=\frac{l}{۰/۵}\Rightarrow l=۰/۷۵\ m$

$r=۱\ m,\ l=۲۰۰\ cm\Rightarrow l=۲\ m,\ \alpha=?\ ,\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow \alpha=\frac{۲}{۱}\Rightarrow \alpha=۲\text{رادیان}$

$l=۹۰\ cm,\ \alpha=۳\text{رادیان},\ r=?\ ,\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow ۳=\frac{۹۰}{r}\Rightarrow r=۳۰\ cm$

$r=۱۰\ m,\ l=۵۰\ m,\ \alpha=?\ ,\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow \alpha=\frac{۵۰}{۱۰}\Rightarrow \alpha=۵\text{رادیان}$

$l=۱۰\ m,\ \alpha=۱۰\text{رادیان},\ r=?\ ,\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow ۱۰=\frac{۱۰}{r}\Rightarrow r=۱\ m$

$r=۲۰\ cm,\ \alpha=۲۰\text{رادیان},\ l=?\ ,\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow ۲۰=\frac{l}{۲۰}\Rightarrow l=۴۰۰\ cm$

یادآوری

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد ۳/۱۴ است. حال جدول زیر را کامل کنید :

π رادیان	۳/۱۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	۰/۵ رادیان	زاویه برحسب رادیان
دقیقاً °۱۸۰	تقریباً °۱۷۹	تقریباً °۱۷۱	تقریباً °۱۱۴	تقریباً °۵۷	تقریباً °۲۸/۵	زاویه برحسب درجه

$۵۷^\circ \times ۳/۱۴ = ۱۷۹^\circ$, $۵۷^\circ \times ۳ = ۱۷۱^\circ$, $۵۷^\circ \times ۲ = ۱۱۴^\circ$, $۵۷^\circ \times ۰/۵ = ۲۸/۵^\circ$

بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با ....۱۸۰.... درجه یا ...π.... رادیان. به عبارت دیگر اندازهٔ زاویه نیم‌صفحه برابر است با ....π.... رادیان. در نتیجه :

$$\frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان} = \text{یک درجه}$$

به این ترتیب :

$$\pi\ \text{رادیان} = ۱۸۰^\circ$$

$\xrightarrow{\div ۲}$ $\frac{\pi}{۲}$ رادیان $= ۹۰^\circ$

$\xrightarrow{\div ۳}$ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان $= ۶۰^\circ$

$\xrightarrow{\div ۴}$ $\frac{\pi}{۴}$ رادیان $= ۴۵^\circ$

$\xrightarrow{\div ۶}$ $\frac{\pi}{۶}$ رادیان $= ۳۰^\circ$

کار در کلاس

۱ مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$۳۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}} \frac{\pi}{۶}$ رادیان

$۴۵^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}} \frac{\pi}{۴}$ رادیان

$۹۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}} \frac{\pi}{۲}$ رادیان

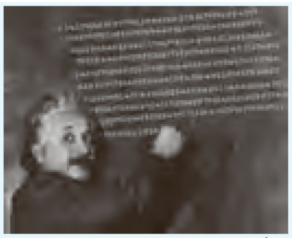
$۳۶^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}} \frac{\pi}{۵}$ رادیان

$۶۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}} \frac{\pi}{۳}$ رادیان

$۱۸۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان}} \pi$ رادیان

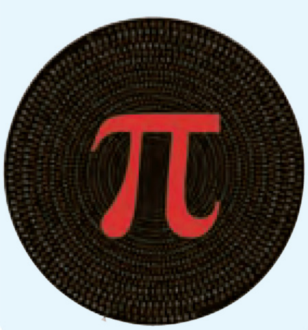
اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}$$



خواندنی

روز چهاردهم مارس به عنوان روز جهانی عدد پی نام‌گذاری شده است؛ زیرا اولین سه رقم این عدد تاریخ ۱۴ مارس را به‌صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهد. این تاریخ مصادف با سالروز تولد آلبرت انیشتین نیز است. تاکنون حدود ۱۳ تریلیون رقم بعد از ممیز عدد پی محاسبه شده است. باتوجه به اصم بودن این عدد و بی‌قاعده بودن ارقام اعشاری آن امکان یافتن هر نوع عددی از جمله تاریخ تولد، شماره حساب بانکی، شماره تلفن و نظایر آنها در بین ارقام آن وجود دارد. مثلاً تاریخ تولد مرحوم پروفسور محمود حسابی ۳ اسفند ۱۲۸۱ است که می‌توان آن را به‌صورت نمایش ۶ رقمی ۸۱۱۲۰۳ نوشت. از طریق سامانهٔ mypiday.com می‌توان این را در بین ارقام اعشاری عدد پی یافت. شکل زیر ارقام عدد پی را تا رسیدن به این نمایش نشان می‌دهد. حال شما از طریق این سامانه تاریخ تولد خودتان را در بین ارقام عدد پی بیابید.

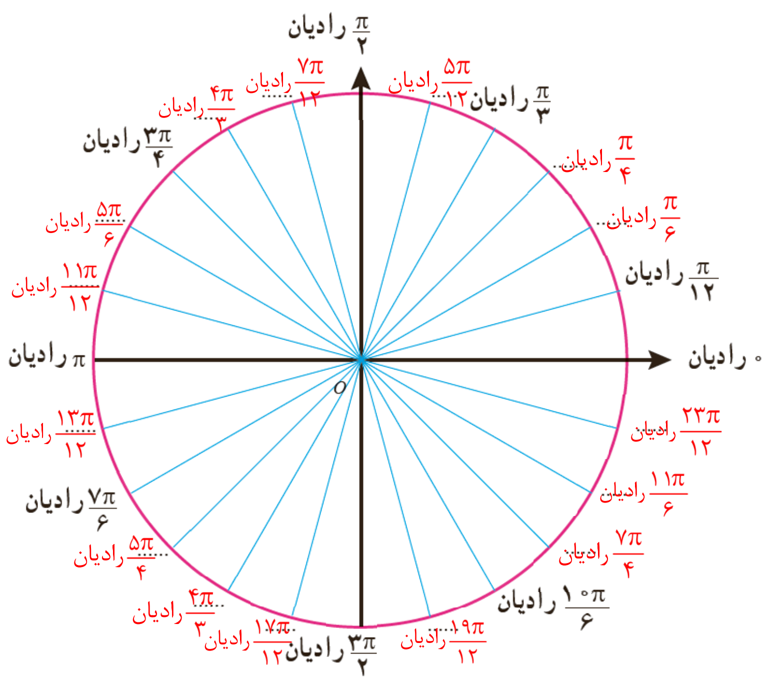


۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

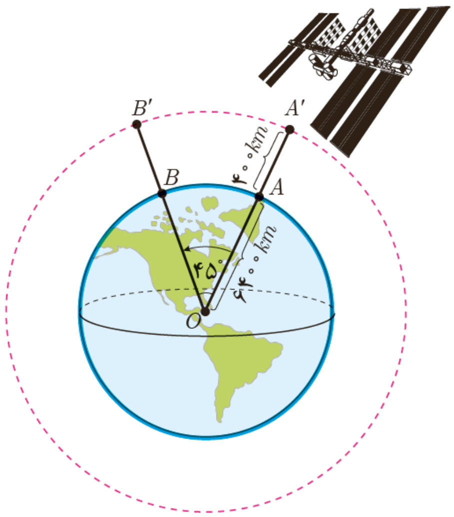
D (درجه)	5°	$25/71^\circ$	24°	72°	120°	225°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D}{180^\circ}=\dfrac{\frac{\pi}{7}\text{رادیان}}{\pi\text{رادیان}} \Rightarrow D=\dfrac{180^\circ}{7} \Rightarrow D\simeq 25/71^\circ \\ \dfrac{24^\circ}{180^\circ}=\dfrac{R}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow R=\dfrac{2\pi}{15}\ \text{رادیان} \\ \dfrac{D}{180^\circ}=\dfrac{\frac{2\pi}{5}\text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow D=\dfrac{2\times180^\circ}{5} \Rightarrow D=72^\circ \\ \dfrac{120^\circ}{180^\circ}=\dfrac{R}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow R=\dfrac{2\pi}{3}\ \text{رادیان} \\ \dfrac{D}{180^\circ}=\dfrac{\frac{5\pi}{4}\text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow D=\dfrac{5\times180^\circ}{4} \Rightarrow D=225^\circ \end{cases}$$

۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویهٔ مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.



فعالیت



ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصلهٔ تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B که با مرکز زمین زاویه ۴۵° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

۱ ابتدا زاویهٔ مرکزی ۴۵° را به رادیان تبدیل کنید.

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برحسب رادیان $= \alpha = ۴۵^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = \frac{\pi}{۴}$ رادیان

۲ شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با $r=$ ۶۸۰۰km

$r = ۶۴۰۰ + ۴۰۰ = ۶۸۰۰ \text{ km}$

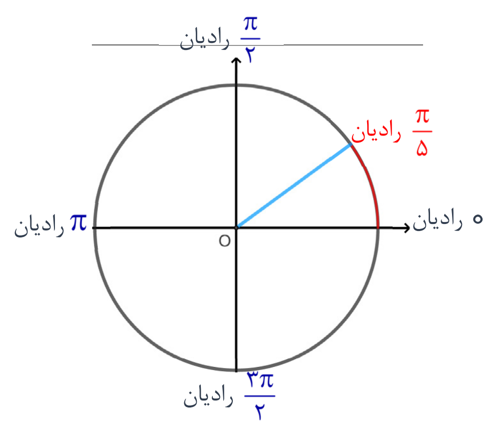
۳ طول کمان روبه‌روی $A'\hat{O}B'$ با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با:

$A'B'$ طول کمان $= l = \frac{\pi}{۴} \times ۶۸۰۰ \Rightarrow l = \frac{۳/۱۴}{۴} \times ۶۸۰۰ \simeq ۵۳۳۸ \ km$

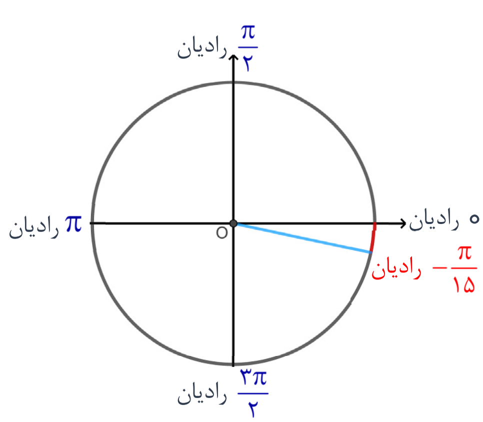
تمرین

۱ هریک از زاویه‌های -۱۲°، ۳۶°، ۷۲°، -۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

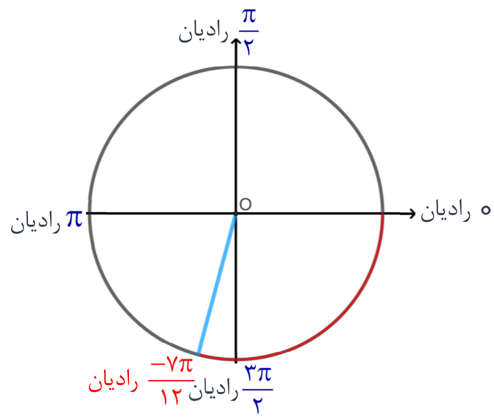
$۳۶^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ}\ \text{رادیان}} \frac{\pi}{۵}$ رادیان



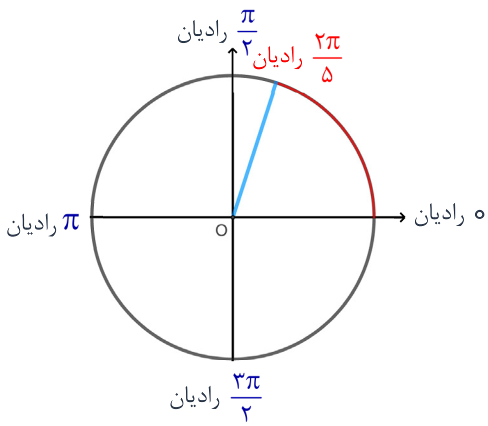
$-۱۲^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ}\ \text{رادیان}} -\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان



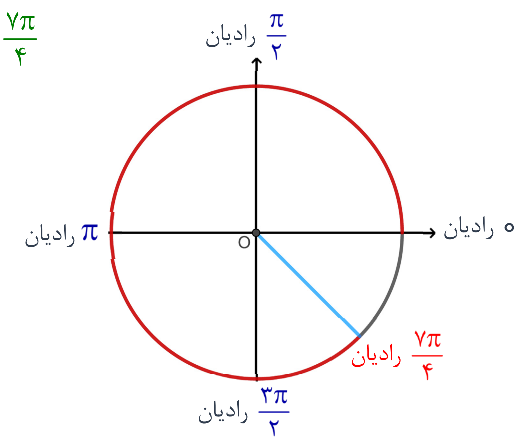
$-105^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}\ \text{رادیان}} -\frac{7\pi}{12}$ رادیان



$72^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}\ \text{رادیان}} \frac{2\pi}{5}$ رادیان

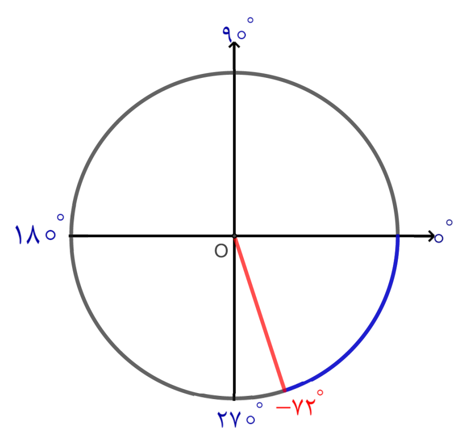


$315^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}\ \text{رادیان}} \frac{7\pi}{4}$ رادیان

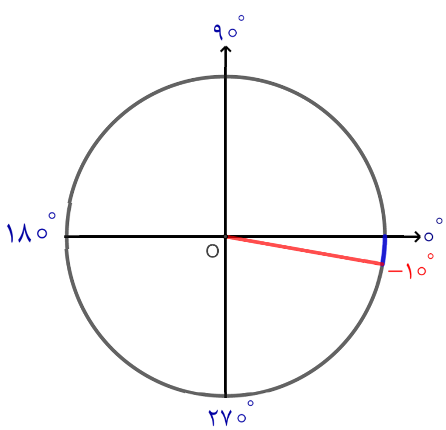


۲ هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

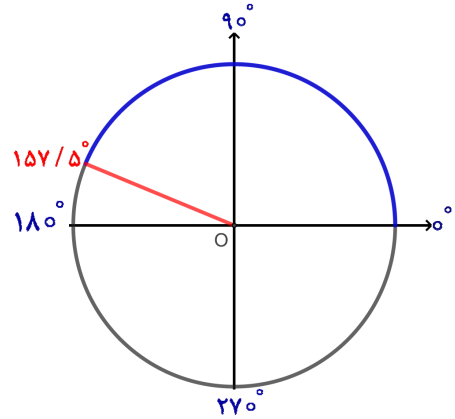
$\frac{-2\pi}{5}$ رادیان $\xrightarrow{\pi=180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{-360^\circ}{5} = -72^\circ$



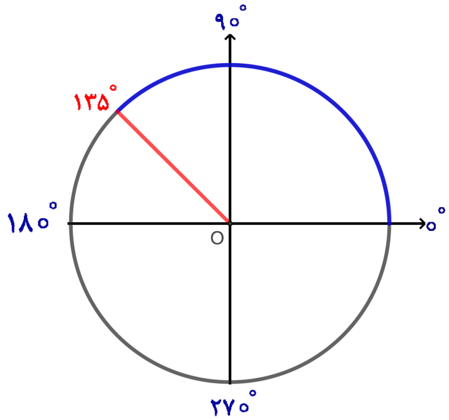
$\frac{-\pi}{18}$ رادیان $\xrightarrow{\pi=180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{-180^\circ}{18} = -10^\circ$



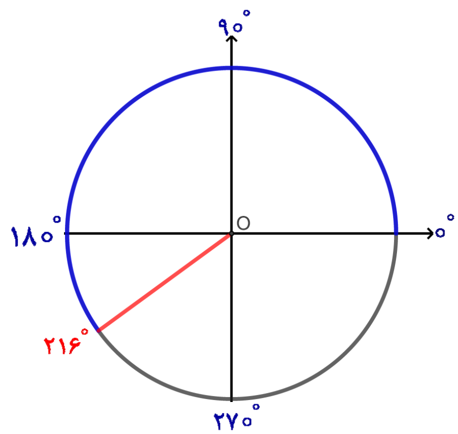
رادیان $\frac{7\pi}{8} \xrightarrow{\pi=180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{1260^\circ}{8} = 157/5^\circ$



رادیان $\frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\pi=180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{540^\circ}{4} = 135^\circ$



رادیان $\frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\pi=180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{1080^\circ}{8} = 216^\circ$



۳ زاویهٔ D بر حسب درجه برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازهٔ این زاویه چند درجه است؟

راه اول : رادیان $\frac{\pi}{20} \xrightarrow{\pi=180^\circ\ \text{رادیان}} \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$

راه دوم : $\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{20}\ \text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{20} \Rightarrow D = 9^\circ$

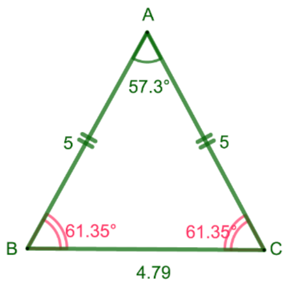
۴ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 0/8$ رادیان

نکته : l و r هم واحد هستند و α برحسب رادیان به دست می آید.

۵ درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازهٔ قاعدهٔ این مثلث کوچک‌تر از اندازهٔ هر یک از ساق‌های آن است.



همانطور که قبلا دیده ایم ۱ رادیان تقریباً برابر با ۵۷/۳ درجه است. بنا براین با توجه به اینکه مثلث متساوی الساقین است ؛ بنا براین اندازهٔ هریک از دو زاویه مجاور به ساق را می توان به دست آورد: $\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-۵۷/۳^\circ}{۲}=۶۱/۳۵^\circ$ همچنین می دانیم در هر مثلث ضلع روبه رو به زاویه بزرگ تر ، بزرگ تر از ضلع روبه رو به زاویهٔ کوچک تر است پس طول قاعده کوچک تر از طول ساق ها خواهد بود.پس عبارت فوق درست است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با ۳/۱۴ سانتی‌متر است.

این عبارت درست است زیرا : $\alpha=\frac{l}{r}\Rightarrow l=r\alpha\Rightarrow l=۱\times\pi=\pi\simeq ۳/۱۴\ \text{cm}$

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

این عبارت نادرس است زیرا :

راه اول : زیرا $\frac{۶\pi}{۵}=\pi+\frac{\pi}{۵}$ بنا براین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد ؛ زیرا بیش تر از π رادیان است .

راه دوم : انتهای کمان زاویه ۲۱۶درجه در ربع سوم است . $\frac{۶\pi}{۵}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۱۰۸۰^\circ}{۵}=۲۱۶^\circ$

ت) زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

این عبارت نادرست است زیرا :

راه اول : می دانیم که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° است پس :

$\frac{\pi}{۹}\ \text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۱۸۰^\circ}{۹}=۲۰^\circ$ $\frac{۷\pi}{۳۶}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۱۲۶۰^\circ}{۳۶}=۳۵^\circ$ $\frac{۲\pi}{۳}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۳۶۰^\circ}{۳}=۱۲۰^\circ$

$$۱۲۰^\circ+۲۰^\circ+۳۵^\circ=۱۷۵^\circ<۱۸۰^\circ$$

راه دوم : می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° است پس :

$$\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹}+\frac{۷\pi}{۳۶}=\frac{۲۴\pi+۴\pi+۷\pi}{۳۶}=\frac{۳۵\pi}{۳۶}\Rightarrow\frac{۳۵\pi}{۳۶}\text{رادیان}\xrightarrow{\pi=۱۸۰^\circ\ \text{رادیان}}\frac{۶۳۰۰^\circ}{۳۶}=۱۷۵^\circ<۱۸۰^\circ$$

راه سوم : می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° یا همان π رادیان است پس :

$$\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹}+\frac{۷\pi}{۳۶}=\frac{۲۴\pi+۴\pi+۷\pi}{۳۶}=\frac{۳۵\pi}{۳۶}<\pi$$

خواندنی

یک زاویه برحسب رادیان را با استفاده از ماشین حساب می‌توان به طور تقریبی برحسب درجه محاسبه کرد. در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه‌ای با نماد π وجود دارد. مثلاً برای محاسبهٔ ۱ رادیان کافی است حاصل $۱\times\frac{۱۸۰}{\pi}$ را به‌دست آوریم که تقریباً برابر با $۵۷/۳^\circ$ است.

حال شما مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

۰/۵ رادیان	$\simeq$	$۲۸/۶^\circ$
$\frac{۴}{۵}$ رادیان	$\simeq$	$۴۵/۸^\circ$
۲ رادیان	$\simeq$	$۱۱۴/۶^\circ$
۳ رادیان	$\simeq$	$۱۷۱/۹^\circ$
۳/۱۴ رادیان	$\simeq$	$۱۷۹/۹^\circ$
$\frac{\pi}{۳}$ رادیان	$\simeq$	۶۰°
$\frac{\pi}{۴}$ رادیان	$\simeq$	۴۵°
π رادیان	$\simeq$	۱۸۰°

$$۰/۵\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۲۸/۶^\circ \quad , \quad \frac{۴}{۵}\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۴۵/۸^\circ \quad , \quad ۲\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۱۱۴/۶^\circ$$

$$۳\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۱۷۱/۹^\circ \quad , \quad ۳/۱۴\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۱۷۹/۹^\circ \quad , \quad \frac{\pi}{۳}\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۶۰^\circ$$

$$\frac{\pi}{۴}\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۴۵^\circ \quad , \quad \pi\times\frac{۱۸۰}{\pi}\simeq ۱۸۰^\circ$$

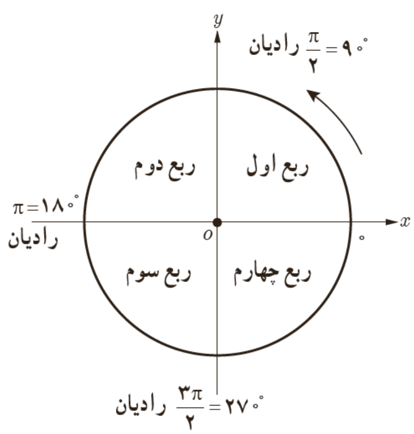
درس دوم | روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

در شکل مقابل، یک دایرهٔ مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می‌دهد.

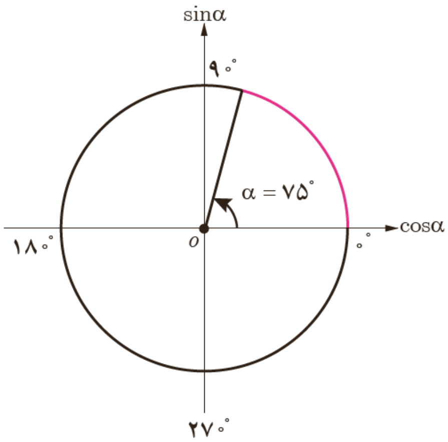
نسبت مثلثاتی / ربع	اول $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$	دوم $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$	سوم $\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}$	چهارم $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

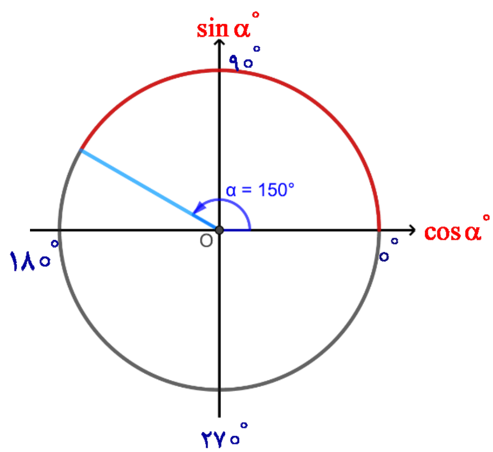


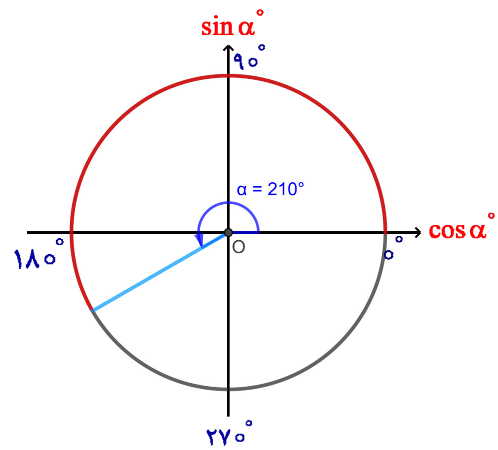
فعالیت

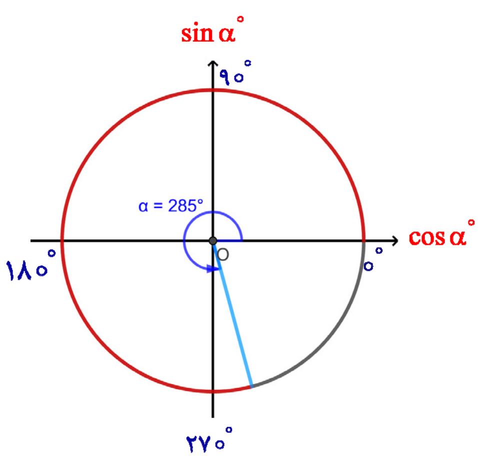
۱ جداول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

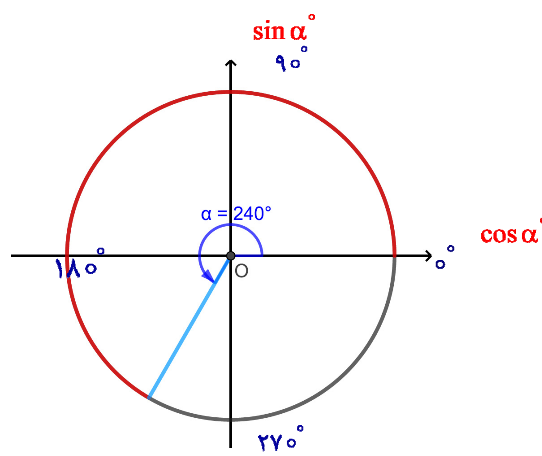
علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\tan\alpha > ۰$	ربع اول	۷۵°
$\sin\alpha > ۰$	ربع دوم	۱۵۰°
$\cos\alpha < ۰$	ربع سوم	۲۱۰°
$\cot\alpha > ۰$	ربع سوم	۲۴۰°
$\tan\alpha < ۰$	ربع چهارم	۲۸۵°



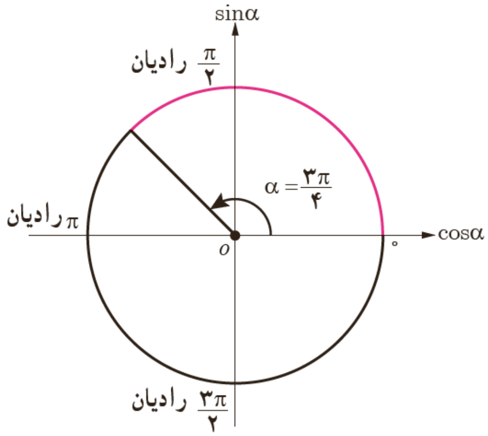








تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی



علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\cos\alpha<۰$	ربع دوم	$\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان
$\sin\alpha>۰$	ربع دوم	$\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان
$\tan\alpha<۰$	ربع چهارم	$\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان
$\cos\alpha>۰$	ربع اول	$\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان
$\cot\alpha>۰$	ربع سوم	$\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان

$\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ بنا براین $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ رادیان از $\frac{\pi}{۲}$رادیان بیش تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

$\frac{۴\pi}{۵}=\pi-\frac{\pi}{۵}$ بنا براین $\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۵}$ رادیان از πرادیان کم تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

$\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ بنا براین $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان از ۲πرادیان کم تر است پس در ربع چهارم قرار دارد.

$\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}$ بنا براین $\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان از $\frac{\pi}{۲}$رادیان کم تر است پس در ربع اول قرار دارد.

$\frac{۵\pi}{۴}=\pi+\frac{\pi}{۴}$ بنا براین $\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ رادیان از πرادیان بیش تر است پس در ربع سوم قرار دارد.

۲ اگر $\sin\alpha=\frac{-۱}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}\xrightarrow{\cos\alpha<۰}\cos\alpha=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{-۱}{۳}}{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}\longrightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{-۱}{۳}}\longrightarrow\cot\alpha=۲\sqrt{۲}$$

۳ اگر $\cot\alpha = -۲$ و $\cos\alpha > ۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل : چون $\cos\alpha > ۰$ و $\cot\alpha < ۰$ لذا انتهای کمان α در ربع چهارم واقع است. بنابراین :

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha} = ۱+\cot^۲\alpha = ۵ \longrightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱}{۵} \longrightarrow \sin\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos^۲\alpha = ۱-\sin^۲\alpha = \frac{۴}{۵} \longrightarrow \cos\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha} \longrightarrow \tan\alpha = \frac{-۱}{۲}$$

کار در کلاس

۱ اگر $\cos x = \frac{-۴}{۵}$ و $\sin x > ۰$، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

حل : چون $\cos x < ۰$ و $\sin x > ۰$ لذا انتهای کمان x در ربع دوم واقع است . بنا بر این :

$$\sin^۲ x = ۱-\cos^۲ x \longrightarrow \sin^۲ x = ۱-\frac{۱۶}{۲۵} \longrightarrow \sin^۲ x = \frac{۹}{۲۵} \longrightarrow \sin x = \frac{۳}{۵}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{-۴}{۵}} \longrightarrow \tan x = \frac{-۳}{۴}$$

$$\cot x = \frac{۱}{\tan x} \longrightarrow \cot x = \frac{-۴}{۳}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α / نسبت	۰ رادیان = ۰°	$\frac{\pi}{۶}$ رادیان = ۳۰°	$\frac{\pi}{۴}$ رادیان = ۴۵°	$\frac{\pi}{۳}$ رادیان = ۶۰°	$\frac{\pi}{۲}$ رادیان = ۹۰°	π رادیان = ۱۸۰°	$\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان = ۲۷۰°	۲π رادیان = ۳۶۰°
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	−۱	۰
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۳}\times\sin\frac{\pi}{۴}=\sqrt{۳}-\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۶}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۶}}{۲}$

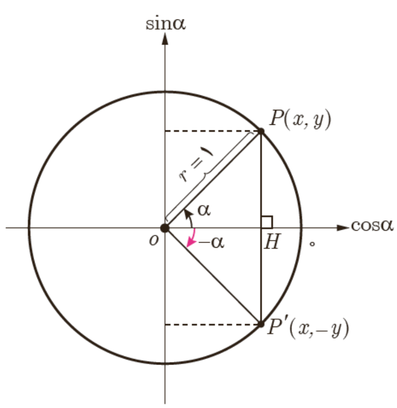
ب) $\frac{\tan^{۲}(\frac{\pi}{۶})+\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴})}{\cot^{۲}(\frac{\pi}{۴})-\cos^{۲}(\frac{\pi}{۳})}+\underbrace{\cos^{۲}۷۵^\circ+\sin^{۲}۷۵^\circ}_{۱}=\frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}+۱=\frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۳}{۴}}+۱=\frac{۱۰}{۹}+۱=\frac{۱۹}{۹}$

در ادامه می‌خواهیم ببینیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، متمم و مکمل با هم چه ارتباطی دارند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت

دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha=۳۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ -۳۰° در $O\hat{P'}H$ عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

$$\sin(-۳۰^\circ)=\frac{-y}{r}=-\sin ۳۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$$

$$\cos(-۳۰^\circ)=\frac{x}{r}=\cos(۳۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(-۳۰^\circ)=\frac{-y}{x}=-\tan(۳۰^\circ)=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

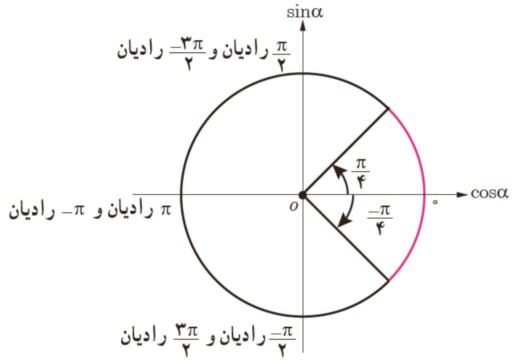
$$\cot(-۳۰^\circ)=\frac{x}{-y}=-\cot(۳۰^\circ)=-\sqrt{۳}$$

در حالت کلی :

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.



$$\sin(-\frac{\pi}{۴}) = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(-\frac{\pi}{۴}) = -\tan(\frac{\pi}{۴}) = -۱$$

$$\cot(-\frac{\pi}{۴}) = -\cot(\frac{\pi}{۴}) = -۱$$

۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{۳})\times\cos(\frac{-\pi}{۶}) + \tan(\frac{-\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{\pi}{۶} - \tan\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ = \frac{-۳}{۲}$$

الف) $\frac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)} = \frac{\cos ۹۰^\circ - \sin ۲۷۰^\circ}{-\sin ۱۸۰^\circ - \cos ۳۶۰^\circ} = \frac{۰-(-۱)}{۰-۱} = \frac{۱}{-۱} = -۱$

ب) $\cot(\frac{-\pi}{۶}) + \tan(\frac{-\pi}{۳}) = -\cot(\frac{\pi}{۶}) - \tan(\frac{\pi}{۳}) = -\sqrt{۳} - \sqrt{۳} = -۲\sqrt{۳}$

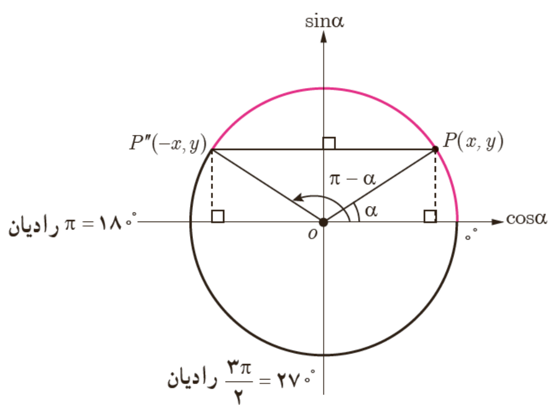
پ) $\cos(-۴۵^\circ)\times\cos(-۶۰^\circ) + \sin(-۴۵^\circ)\times\sin(-۶۰^\circ) = \cos(۴۵^\circ)\times\cos(۶۰^\circ) + (-\sin(۴۵^\circ))\times(-\sin(۶۰^\circ))$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴} + \frac{\sqrt{۶}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت

دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۱۸۰° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ ۳۰° و ۱۵۰° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطهٔ P'' و انتهای کمان زاویهٔ ۱۵۰° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۱۵۰° عبارت‌اند از :



$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = y = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -x = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۱۵۰^\circ = \frac{\sin ۱۵۰^\circ}{\cos ۱۵۰^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\tan ۳۰^\circ$$

$$\cot ۱۵۰^\circ = \frac{\cos ۱۵۰^\circ}{\sin ۱۵۰^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۳} = -\cot ۳۰^\circ$$

قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

در حالت کلی :

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

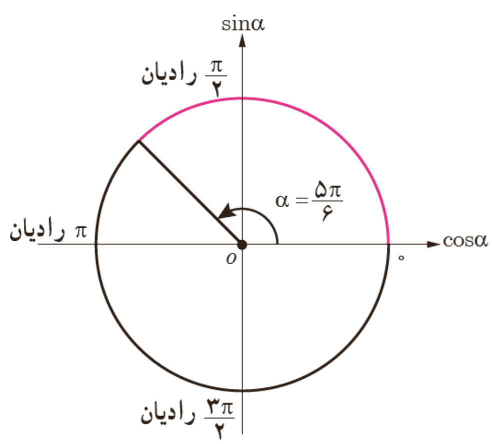
الف) ۷۵° — $۱۸۰^\circ-۷۵^\circ=۱۰۵^\circ$ — مکمل زاویه ۷۵° ، زاویهٔ ۱۰۵° است.

ب) -۲۵° — $۱۸۰^\circ-(-۲۵^\circ)=۲۰۵^\circ$ — مکمل زاویه -۲۵° ، زاویهٔ ۲۰۵° است.

پ) $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان — $\pi-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ — مکمل زاویه $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان، زاویهٔ $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ رادیان است.

ت) $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان — $\pi-(\frac{-\pi}{۴})=\frac{۵\pi}{۴}$ — مکمل زاویه $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان، زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان است.

۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه به‌دست آورید.



$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۶}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\frac{۵\pi}{۶}=\cot(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cot\frac{\pi}{۶}=-\sqrt{۳}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{۳}\right)=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۴}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{۴}\right)=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot(-۱۲۰^\circ)=-\cot(۱۲۰^\circ)=-\cot(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-(-\cot ۶۰^\circ)=\sqrt{۳}$$

$$\cos(۱۳۵^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\cos ۴۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۱۰° را به دست آورید.

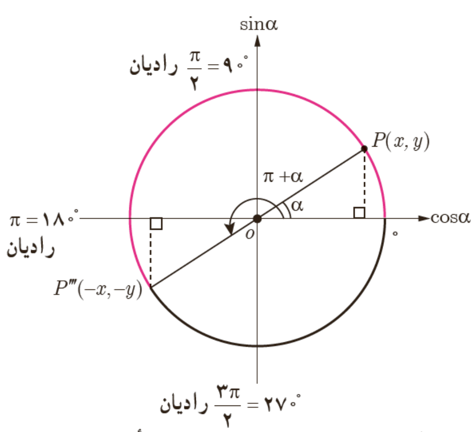
انتهای کمان زاویه ۲۱۰° در ربع سوم واقع است. در ضمن $۲۱۰^\circ=۱۸۰^\circ+۳۰^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویهٔ ۲۱۰° و ۳۰° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha=۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° عبارت‌اند از :

$$\sin ۲۱۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-y=-\sin ۳۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-x=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۲۱۰^\circ=\frac{\sin ۲۱۰^\circ}{\cos ۲۱۰^\circ}=\frac{\frac{-۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan ۳۰^\circ$$

$$\cot ۲۱۰^\circ=\frac{۱}{\tan ۲۱۰^\circ}=\sqrt{۳}=\cot ۳۰^\circ$$



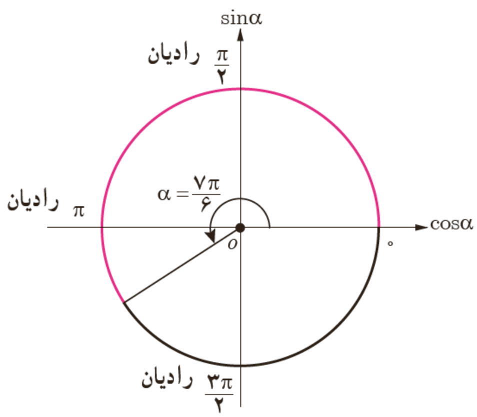
قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است.

در حالت کلی :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

کار در کلاس

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.



$$\sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۷\pi}{۶} = \cos(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۷\pi}{۶} = \tan(\pi+\frac{\pi}{۶}) = \tan\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\frac{۷\pi}{۶} = \cot(\pi+\frac{\pi}{۶}) = \cot\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۲۲۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$\cos(\frac{-۴\pi}{۳}) = \cos(\frac{۴\pi}{۳}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

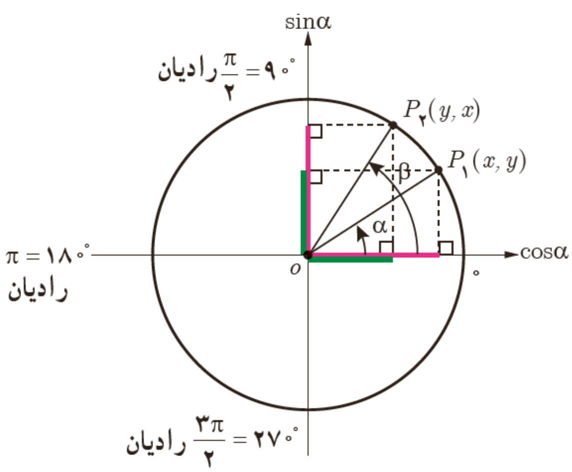
$$\sin(\frac{-۷\pi}{۶}) = -\sin(\frac{۷\pi}{۶}) = -\sin(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -(-\sin(\frac{\pi}{۶})) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cot(\frac{۵\pi}{۴}) = \cot(\pi+\frac{\pi}{۴}) = \cot(\frac{\pi}{۴}) = ۱$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت

دو زاویهٔ α و β را متمم گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ $\alpha=۳۰^\circ$ و $\beta=۶۰^\circ$ در دایره مثلثاتی مقابل متمم یکدیگرند. در این حالت :



$$\sin ۳۰^\circ=\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ=\cot ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم :

$$\sin ۴۵^\circ=\cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \sin\frac{\pi}{۴}=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\cot ۴۵^\circ=۱ \qquad \tan\frac{\pi}{۴}=\cot\frac{\pi}{۴}=۱$$

همچنین زاویه ....۰. و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۲}=\cos ۰=۱$$

$$\tan\frac{\pi}{۲}=\cot ۰=\text{تعریف نشده}$$

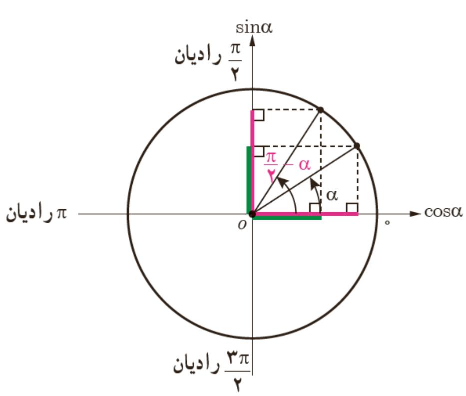
در حالت کلی :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$



تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

به عبارت دیگر : اگر دو زاویهٔ α و β متمم باشند(رادیان $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$) آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به بیان دیگر :

$\sin\alpha=\cos\beta \quad , \quad \tan\alpha=\cot\beta$

$\cos\alpha=\sin\beta \quad , \quad \cot\alpha=\tan\beta$

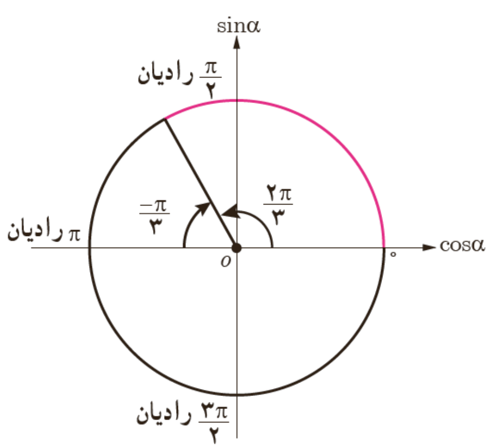
نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به‌دست آورید.

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

روش اول ــ زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\pi-\frac{\pi}{۳}$. بنابراین :



$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

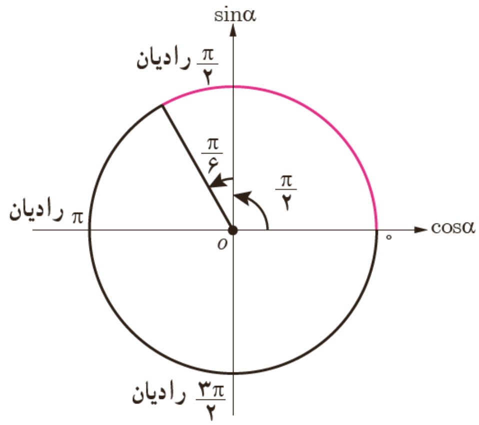
$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\cot(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cot\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

روش دوم ــ اختلاف دو زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم :

$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}\right)=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}\right)=-\cot\frac{\pi}{۶}=-\sqrt{۳}$$

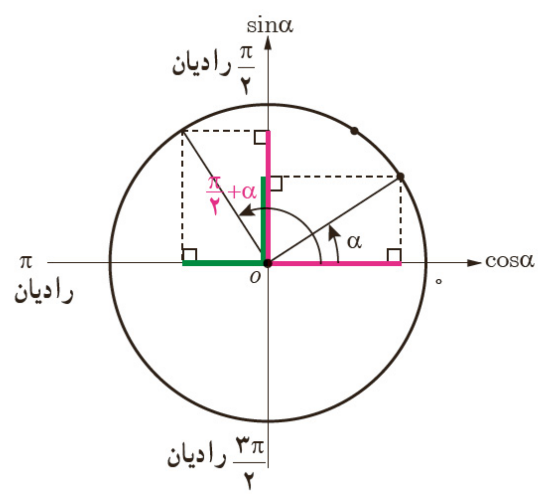
$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}\right)=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

یا به عبارتی $\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{۳}+\left(-\frac{\pi}{۶}\right)$ پس $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $-\frac{\pi}{۶}$ متمم هم هستند. با توجه قانون نسبت های مثلثاتی برای دو زاویهٔ متمم داریم :

$$\begin{cases}\sin\frac{۲\pi}{۳}=\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right)=\cos\frac{\pi}{۶}\\ \cos\frac{۲\pi}{۳}=\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)=-\sin\frac{\pi}{۶}\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}\tan\frac{۲\pi}{۳}=\cot\left(-\frac{\pi}{۶}\right)=-\cot\frac{\pi}{۶}\\ \cot\frac{۲\pi}{۳}=\tan\left(-\frac{\pi}{۶}\right)=-\tan\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

ازطرفی با توجه به تساوی $\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{۳}$ به جای $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان مقدار مساوی آن یعنی $\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}\right)$رادیان را قرار دهیم .

در حالت کلی :



$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

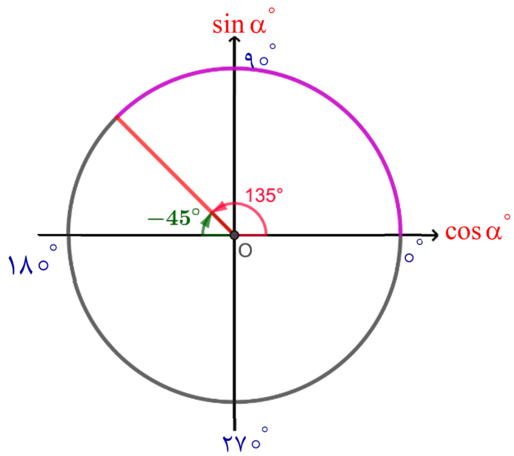
$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

کار در کلاس

نسبت‌های مثلثاتی زاویه °۱۳۵ را به دو روش به‌دست آورید.



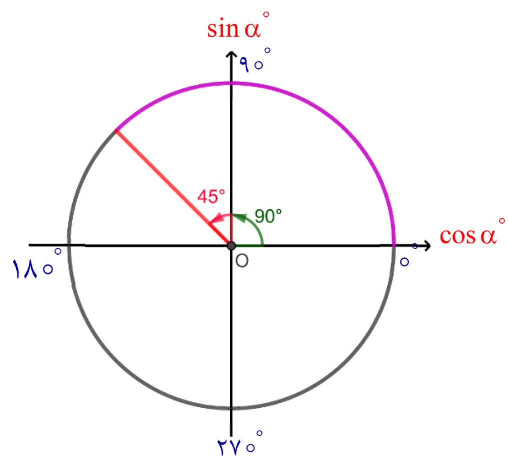
راه اول :

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$



راه دوم :

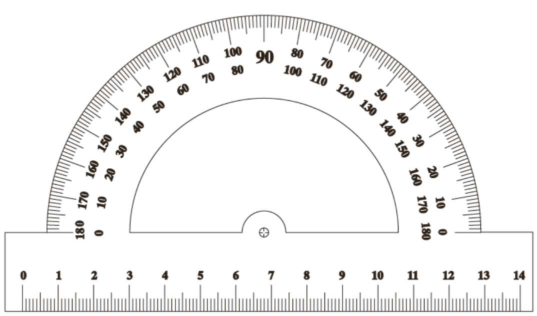
$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

کار در کلاس



به کمک نقاله سؤالات زیر را پاسخ دهید :

۱ سینوس کدام دو زاویه برابر است؟

(مثلاً $\sin ۱۰^\circ = \sin ۱۷۰^\circ$)

می دانیم زاویه های مکمل دارای سینوس های برابر هستند.

بنا براین داریم :

$$\sin ۲۰^\circ = \sin ۱۶۰^\circ \,,\ \sin ۳۰^\circ = \sin ۱۵۰^\circ$$

$$\sin ۴۰^\circ = \sin ۱۴۰^\circ \,,\ \sin ۵۰^\circ = \sin ۱۳۰^\circ$$

$$\sin ۶۰^\circ = \sin ۱۲۰^\circ \,,\ \sin ۷۰^\circ = \sin ۱۱۰^\circ$$

$$\sin ۸۰^\circ = \sin ۱۰۰^\circ$$

۲ اختلاف کدام دو زاویه $\frac{\pi}{۲}$ رادیان $= ۹۰^\circ$ می‌شود؟
نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.

به عنوان مثلا می توانیم ۱۲۰° و ۳۰° یا ۱۳۵° و ۴۵° یا ۱۵۰° و ۶۰° اشاره کنیم .

به عنوان مثال می توانیم نسبت های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° را به کمک نسبت های مثلثاتی ۶۰° به دست آوریم :

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\sin ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۱۵۰^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot ۱۵۰^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

۳ آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟

خیر نمی توان یافت با توجه به روابطی که برای زوایا مکمل ، متمم و دو زاویه که اختلاف آن ها ۹۰° $(\frac{\pi}{۲})$ باشد ، کسینوس ها برابر نیستند.

۴ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۸۰° را از روی مکمل آن بیابید.

مکمل زاویه ۱۸۰° زاویه ۰° است . بنا براین داریم :

$$\sin ۱۸۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۸۰^\circ) = \sin ۰^\circ = ۰$$

$$\cos ۱۸۰^\circ = -\cos ۰^\circ = -۱$$

$$\tan ۱۸۰^\circ = -\tan ۰^\circ = ۰$$

$$\cot ۱۸۰^\circ = -\cot ۰^\circ = \text{تعریف نشده}$$

۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را از روی مکمل آن بیابید.

$$\sin ۱۸۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

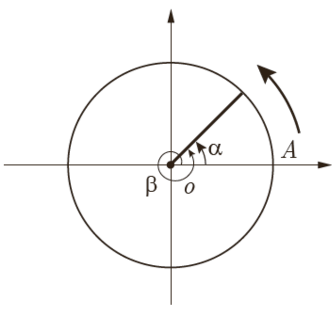
$$\cos ۱۳۵^\circ = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $۲k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان)

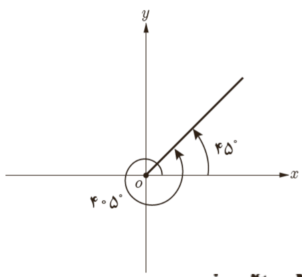
فعالیت



یادآوری می‌کنیم برای رسم زاویه در دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ A در شکل مقابل مبدأ حرکت است. برخی از زوایا از یک دور کامل دایرهٔ مثلثاتی یعنی ۳۶۰° بزرگ‌ترند مانند زاویهٔ ۴۰۵°.

برای رسم چنین زاویه‌ای ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامهٔ زاویه را که به اندازه ۴۵° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویه ۴۰۵° و ۴۵° را هم انتها می‌نامیم.

دو زاویهٔ α و β را هم انتها گوییم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود (شکل مقابل).



اگر دو زاویه هم انتها باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا ۱۸۰° است. مثلاً زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° هم انتها هستند؛ زیرا $۴۰۵^\circ-۴۵^\circ=۳۶۰^\circ$ (شکل سمت راست) در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویهٔ ۴۵° در ربع اول است، بنابراین :

$$\sin ۴۰۵^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۰۵^\circ=\cos(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

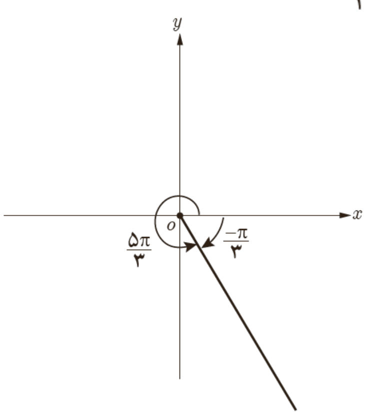
$$\tan ۴۰۵^\circ=\tan(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\tan ۴۵^\circ=۱$$

$$\cot ۴۰۵^\circ=\cot(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\cot ۴۵^\circ=۱$$

حال همین بررسی را روی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان انجام دهید؛ چون $\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ بنابراین

دو زاویه $-\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان هم انتها هستند (شکل سمت راست).

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین :



$$\sin\frac{۵\pi}{۳}=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin(\frac{-\pi}{۳})=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۳}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۳}=\tan(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\tan(-\frac{\pi}{۳})=-\sqrt{۳}$$

$$\cot\frac{۵\pi}{۳}=\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cot(-\frac{\pi}{۳})=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

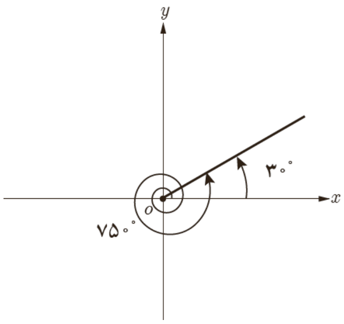
در حالت کلی برای هر عدد صحیح k،

$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$
$\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$

کار در کلاس

مطابق نمونه هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)



$\sin ۷۵۰^\circ=\sin(۲\times۳۶۰^\circ+۳۰^\circ)=\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$

$\tan(-۳۱۵^\circ)=-\tan(۳۱۵^\circ)=-\tan(۳۶۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan ۴۵^\circ=-۱$

۱) $\cos ۳۰۰^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)=\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$

۲) $\sin ۴۲۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۶۰^\circ)=\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\tan(-۲۲۵^\circ)=-\tan(۲۲۵^\circ)=-\tan(۳۶۰^\circ-۱۳۵^\circ)=-(-\tan۱۳۵^\circ)=\tan۱۳۵^\circ$
$=\tan(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan۴۵^\circ=۱$

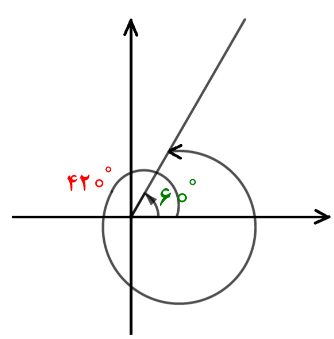
۴) $\cot(-۳۳۰^\circ)=-\cot(۳۳۰^\circ)=-\cot(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)=-(-\cot۳۰^\circ)=\cot۳۰^\circ=\sqrt{۳}$

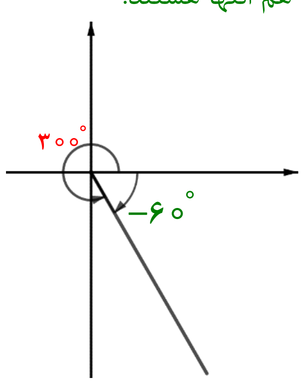
۵) $\sin\frac{۱۱\pi}{۴}=\sin(۲\pi+\frac{۳\pi}{۴})=\sin\frac{۳\pi}{۴}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶) $\cos(\frac{-۷\pi}{۴})=\cos(\frac{۷\pi}{۴})=-\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=\cos(-\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

دو زاویه ۶۰° و ۴۲۰° هم انتها هستند.

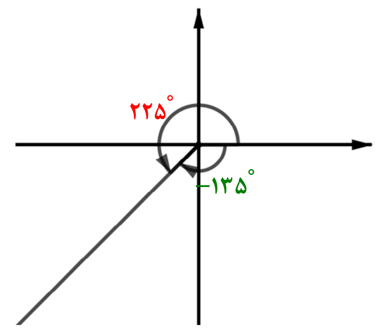
دو زاویه -۶۰° و ۳۰۰° هم انتها هستند.



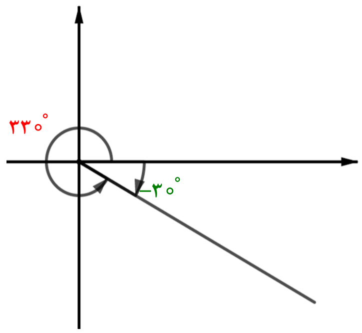


تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

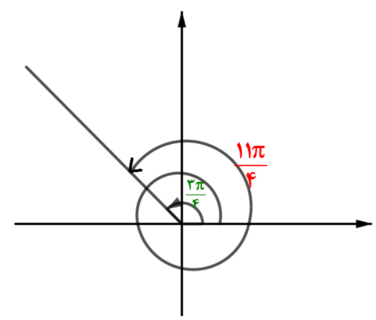
دو زاویه 225° و 135° هم انتها هستند.



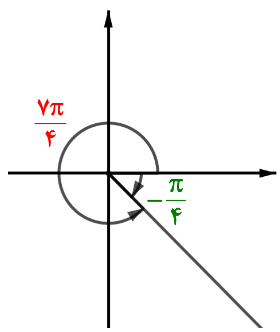
دو زاویه 330° و -30° هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{11\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{7\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ هم انتها هستند.



تمرین

۱ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\tan 135^\circ + \cot 120^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) + \cot(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 45^\circ + (-\cot 60^\circ) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

ب) $\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) = \cos 210^\circ + \cot(240^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) + \cot(180^\circ + 60^\circ)$

$$= -\cos 30^\circ + \cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

پ) $\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ) = \sin 630^\circ - \tan 540^\circ = \sin(2 \times 360^\circ - 90^\circ) - \tan(360^\circ + 180^\circ)$

$$= -\sin 90^\circ - \tan 180^\circ = -1 + 0 = -1$$

ت) $\cos(-720^\circ) + \cot(-600^\circ) + \tan 720^\circ - \tan(-600^\circ) =$

$$= \cos 720^\circ - \cot 600^\circ + \tan 720^\circ + \tan 600^\circ$$

$$= \cos(2 \times 360^\circ + 0) - \cot(2 \times 360^\circ - 120^\circ) + \tan(2 \times 360^\circ + 0) + \tan(2 \times 360^\circ - 120^\circ)$$

$$= \cos 0^\circ - (-\cot 120^\circ) + \tan 0^\circ - \tan 120^\circ = \cos 0^\circ + \cot(180^\circ - 60^\circ) + \tan 0^\circ - \tan(180^\circ - 60^\circ)$$

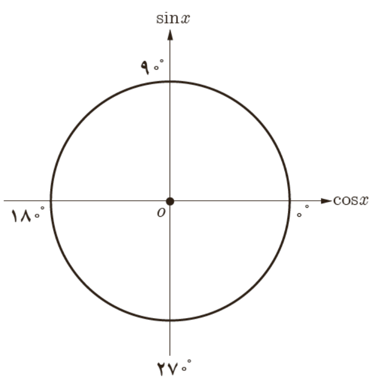
$$= \cos 0^\circ - \cot 60^\circ + \tan 0^\circ + \tan 60^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}$$

ث) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳})-\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})=\sin(۸\pi+\frac{\pi}{۳})-\cos(۸\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}-\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}$

ج) $$\frac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(\frac{-۳\pi}{۴})+\tan(\frac{-۴\pi}{۳})}=\frac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(-\frac{۳\pi}{۴})+\tan(-\frac{۴\pi}{۳})}=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})-\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})}{-\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})-\tan(\pi+\frac{\pi}{۳})}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۳}}=\frac{-۴-\sqrt{۶}}{۱۰}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید :



نسبت \ زاویه x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$
$\cos x$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\tan x$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\sqrt{۳}$

۳ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin ۸۴۰^\circ=\sin ۶۰^\circ$

$\sin ۸۴۰^\circ=\sin(۲\times ۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ)=\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ$

ب) $\cos(-۳۲۴^\circ)=\cos ۳۶^\circ$

$\cos(-۳۲۴^\circ)=\cos ۳۲۴^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۳۶^\circ)=\cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan(-۱۰۰۰^\circ)=\tan ۸۰^\circ$

$\tan(-۱۰۰۰^\circ)=-\tan ۱۰۰۰^\circ=-\tan(۳\times ۳۶۰^\circ-۸۰^\circ)=-(-\tan ۸۰^\circ)=\tan ۸۰^\circ$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ=\sin ۱۵۵^\circ$

$\sin ۸۷۵^\circ=\sin(۲\times ۳۶۰^\circ+۱۵۵^\circ)=\sin ۱۵۵^\circ$

راه حل دیگر این است که نشان دهیم این زوایا هم انتها هستند. همانطور که ملاحظه می شود اختلاف هر دو زاویهٔ ارائه شده در هر قسمت مضربی از ۲π رادیان یا ۳۶۰° است : $۸۷۵^\circ-۱۵۵^\circ=۷۲۰^\circ=۲\times ۳۶۰^\circ$

۴ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید :

الف) $\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

با توجه به رابطه ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم :

$$x + ۲۰^\circ + x = ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۳۵^\circ$$

ب) $\tan(x + \frac{\pi}{۱۸}) = \cot(\frac{۲\pi}{۹} + x)$

با توجه به رابطه ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم :

$$x + \frac{\pi}{۱۸} + \frac{۲\pi}{۹} + x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۹}$$

آیا برای زاویهٔ x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

با توجه به نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم ، می توانیم زوایای فوق را به دست آوریم اما برای یکتایی پاسخ ارائه شده می توانیم توضیح دهیم که می توان زوایای بسیاری یافت که در تساوی های فوق صدق کنند کافی است مضارب ۲π رادیان یا ۳۶۰° را به این زوایا اضافه کنیم مثلاً : برای قسمت(الف) $x = ۳۹۵^\circ$ یا برای قسمت (ب) $x = \frac{۱۹\pi}{۹}$ نیز قابل قبول هستند.

فصل ۴ | مثلثات

درس سوم

توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطهٔ $y = \sin x$ و تابع کسینوس با ضابطهٔ $y = \cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

فعالیت

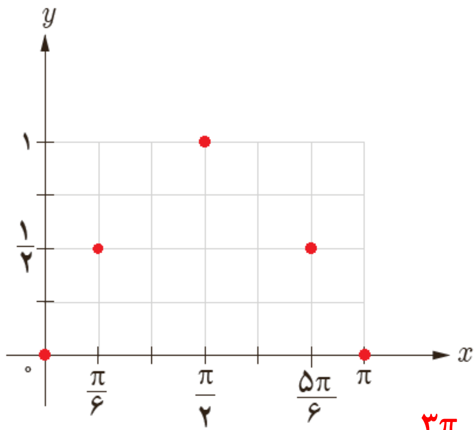
۱ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

مختصات نقطه	$y = \sin x$	x
$(۰, ۰)$	۰	۰
$(\frac{\pi}{۶}; \frac{۱}{۲})$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\pi}{۶}$
$(\frac{\pi}{۲}; ۱)$	۱	$\frac{\pi}{۲}$
$(\frac{۵\pi}{۶}; \frac{۱}{۲})$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۶}$
$(\pi, ۰)$	۰	π

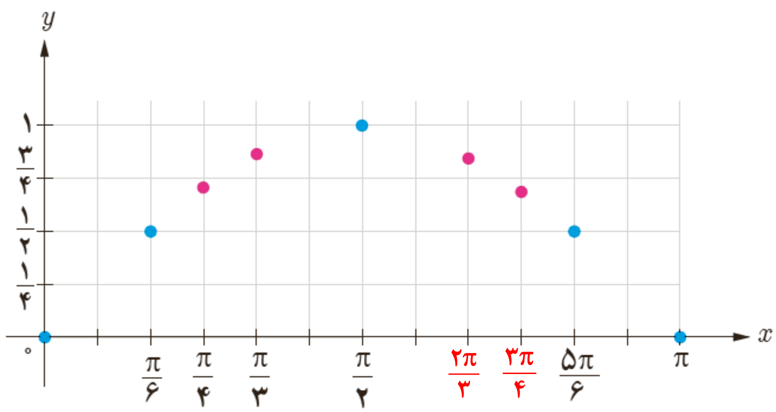
مجموعهٔ زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع به صورت زیر مشخص می کند.

$$f = \left\{(۰, ۰), (\frac{\pi}{۶}, \frac{۱}{۲}), (\frac{\pi}{۲}, ۱), (\frac{۵\pi}{۶}, \frac{۱}{۲}), (\pi, ۰)\right\}$$

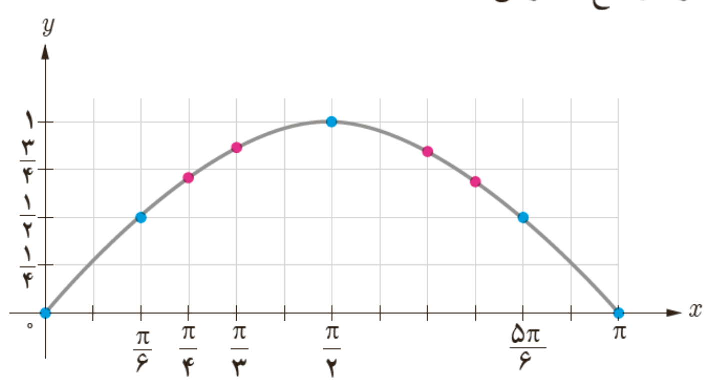
۲ نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.



۳ با افزودن نقاط $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$، $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$، $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ و $(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ به جدول بالا، شکل زیر به‌دست می‌آید.
(با فرض $\sqrt{2} \simeq 1/4$ و $\sqrt{3} \simeq 1/7$)



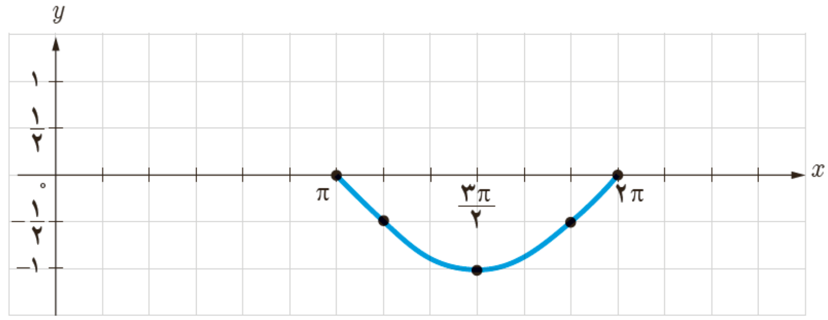
۴ نقاط حاصل در شکل را به‌ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست بیاید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[0, \pi]$ این شکل به‌طور دقیق‌تری به‌دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس با ضابطهٔ $y = \sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.



۵ مراحل صفحهٔ قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازهٔ $[\pi$ و $2\pi]$ انجام دهید.

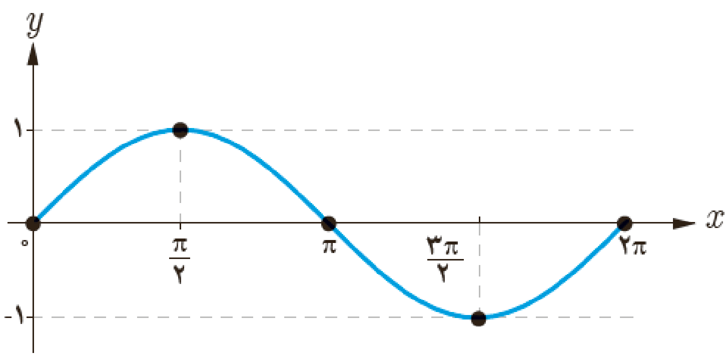
برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به‌دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

x	$y=\sin x$	مختصات نقطه
π	۰	$(\pi,۰)$
$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{-۱}{۲}$	$(\frac{۷\pi}{۶},\frac{-۱}{۲})$
$\frac{۳\pi}{۲}$	-۱	$(\frac{۳\pi}{۲},-۱)$
$\frac{۱۱\pi}{۶}$	$\frac{-۱}{۲}$	$(\frac{۱۱\pi}{۶},\frac{-۱}{۲})$
۲π	۰	$(۲\pi,۰)$



۶ با توجه به شکل‌های فوق، نمودار تابع با ضابطه $y=\sin x$ در بازه $[۰$ و $۲\pi]$ در شکل زیر رسم شده است.

حال با توجه به این شکل جدول زیر را دربارهٔ مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.



$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع از ۱ به ۰ کاهش می یابد.	مقدار تابع از ۰ به ۱-کاهش می یابد.	مقدار تابع از ۱- به ۰ افزایش می یابد.
مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع در ربع دوم مثبت است .	مقدار تابع در ربع سوم منفی است .	مقدار تابع در ربع چهارم منفی است .

۷ با توجه به رابطهٔ $\sin(x+۲k\pi)=\sin x$، $k\in\mathbb{Z}$، که در درس قبل آشنا شدید می‌توان گفت :

$$\sin(x+۲\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن ۲π رادیان به کمان آن تغییری نمی کند

بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۰$ و $۲\pi]$ و $[۲\pi,۴\pi]$ یکسان است.

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

همچنین داریم :

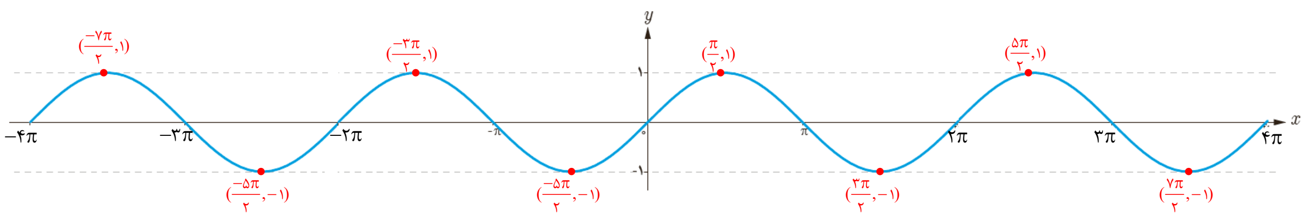
$$\sin(x-۲\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن ۲π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند.

در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های [۰ , ۲π] و [−۲π,۰] یکسان است.

در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های [۲kπ و (۲k+۲) π]، $k\in\mathbb{Z}$، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه [۰ , ۲π] رسم شده در بازه‌های [۲π , ۴π]، [۴π , ۶π]، [−۲π , ۰]، [−۴π , −۲π] تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در ۲ تکرار رسم شده است. این نمودار را برای ۴ تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را دربارهٔ ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع سینوس $\mathbb{R}$ و برد آن [−۱,۱] است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ۱ است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=\frac{۵\pi}{۲}$، $x=\frac{-۳\pi}{۲}$، $x=\frac{-۷\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

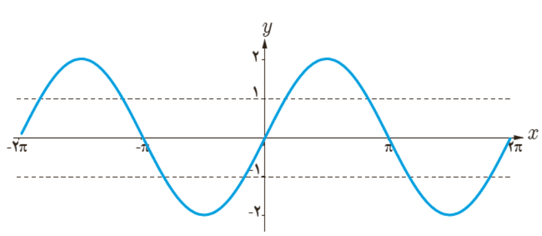
ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با −۱ است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{۳\pi}{۲}$، $x=\frac{۷\pi}{۲}$، $x=\frac{-\pi}{۲}$، $x=\frac{-۵\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{۳\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱ $y=۲\sin x$

برای رسم نمودار این تابع در بازهٔ [۰,۲π] چون برد تابع بازهٔ [−۲,۲] است، کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را روی این بازه انبساط دهیم. نمودار حاصل در بازهٔ [−۲π,۰] نیز تکرار می شود. و شکل مقابل به دست می آید.

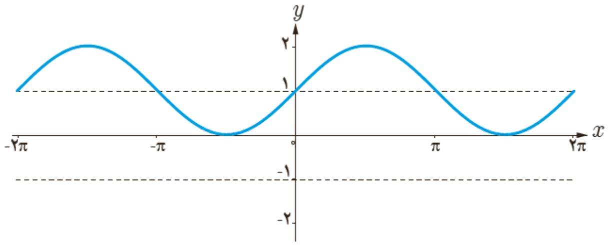


(الف)

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را به اندازهٔ یک واحددر جهت مثبت روی محور عمودی انتقال دهیم.
به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

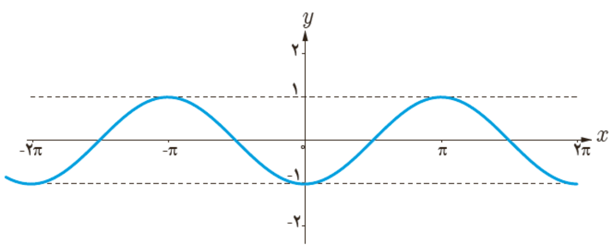
۲ $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$



(ب)

برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ واحددر جهت مثبت روی محور افقی انتقال دهیم.
به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

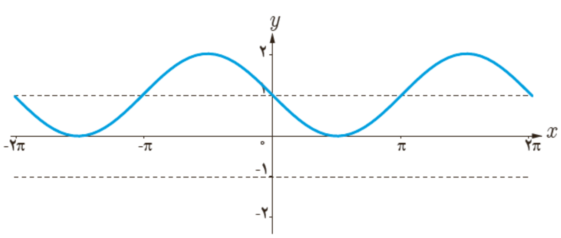
۳ $y=\sin x+۱$



(پ)

برای رسم نمودار این تابع ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\sin x$ را با قرینه کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور x ها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازهٔ یک واحد در جهت مثبت محور عمودی انتقال می دهیم به این ترتیب شکل مقابل به دست می آید.

۴ $y=-\sin x+۱$



(ت)

رسم تابع کسینوس

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

مختصات نقطه	$y=\cos x$	x
$(۰,۱)$	۱	۰
$(\frac{\pi}{۴},۰/۷)$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\simeq ۰/۷$	$\frac{\pi}{۴}$
$(\frac{\pi}{۲},۰)$	۰	$\frac{\pi}{۲}$
$(\frac{۳\pi}{۴},-۰/۷)$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\simeq -۰/۷$	$\frac{۳\pi}{۴}$
$(\pi,-۱)$	-۱	π

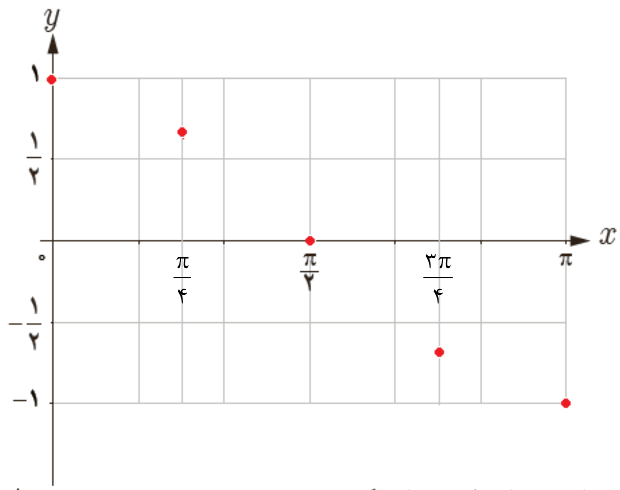
به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به‌دست می‌آید.

$f=\{(۰,۱),(\frac{\pi}{۴},۰/۷),(\frac{\pi}{۲},۰),(\frac{۳\pi}{۴},-۰/۷),(\pi,-۱)\}$

آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

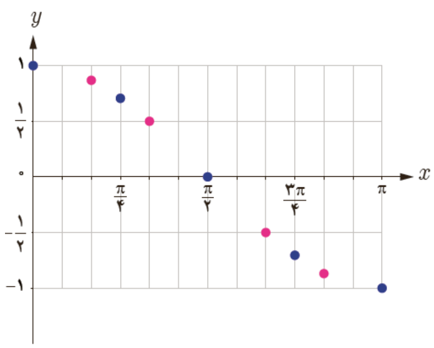
بله یک تابع را مشخص می کند.

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی



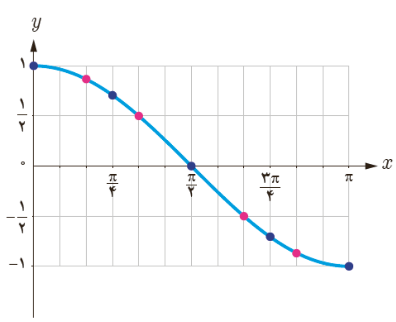
۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.

۳ نقاط به طول‌های $x=\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۶}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به‌دست آید. ($\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$).

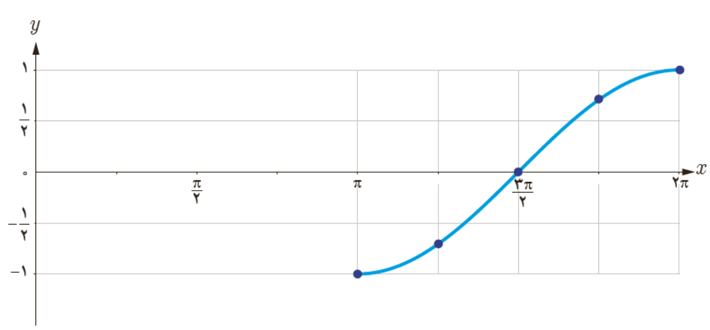


x	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$
$y=\cos x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$

۴ نقاط شکل صفحهٔ قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست آید.
این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y=\cos x$ را در بازهٔ $[۰\ ,\pi]$ مشخص می‌کند.

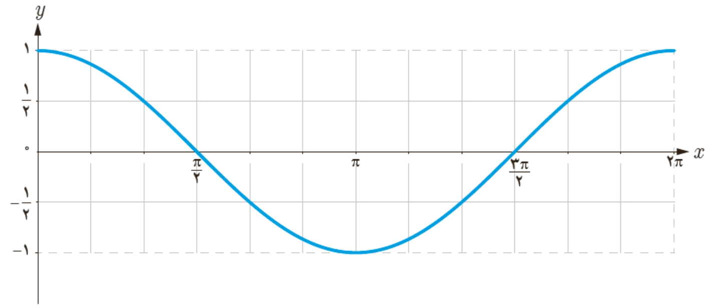


۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\pi$ و $۲\pi]$ به‌صورت شکل مقابل به‌دست آید.



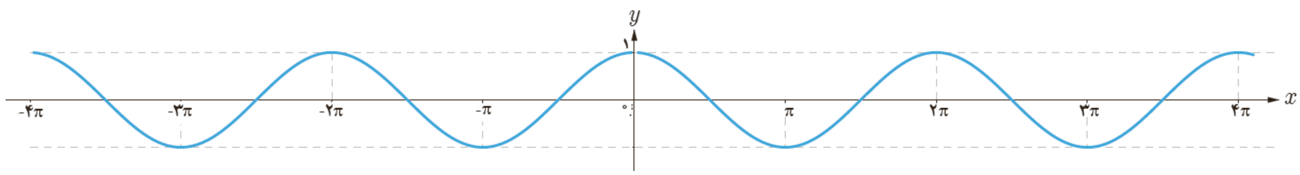
x	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π
y	-۱	$\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$	۰	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱

۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ در بازهٔ $[\circ\,,\,۲\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[\circ,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	مقدارتابع از ۰ به ۱− کاهش می یابد.	مقدارتابع از ۱− به ۰ افزایش می	مقدارتابع از ۰ به ۱ افزایش می یابد.
مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.	مقدارتابع در ربع دوم منفی است .	مقدارتابع در ربع سوم منفی است .	مقدارتابع در ربع چهارم مثبت است .

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[\circ\,,\,۲\pi]$، $[۲\pi\,,\,۴\pi]$، $[-۲\pi\,,\,\circ]$ و $[-۴\pi\,,\,-۲\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\circ\,,\,۴\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحهٔ قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع کسینوس ... R ... و برد آن ... $[-۱,۱]$ ... است.

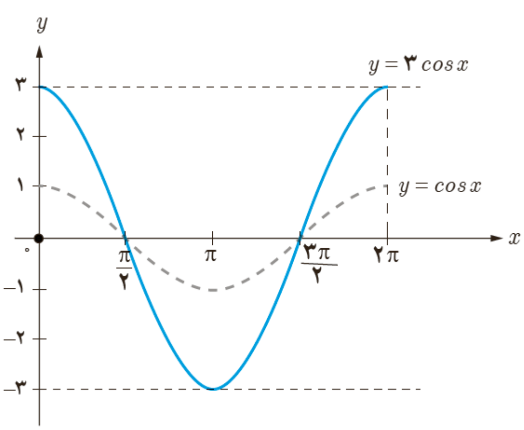
ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های ... $x=\frac{k\pi}{۲}$ ... برابر با صفر است. $(k\in\mathbb{Z})$

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس ... ۱ ... است که در طول‌های $x=۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

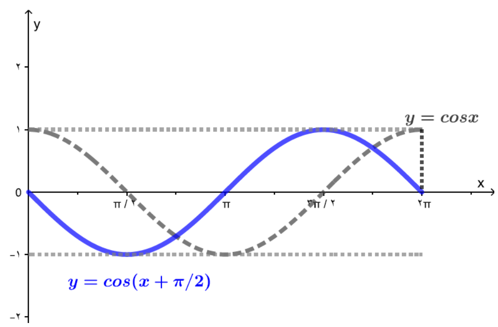
ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ... ۱− ... است که در طول‌های $x=(۲k+۱)\pi$ به‌دست می‌آید. $(k\in\mathbb{Z})$

کار در کلاس

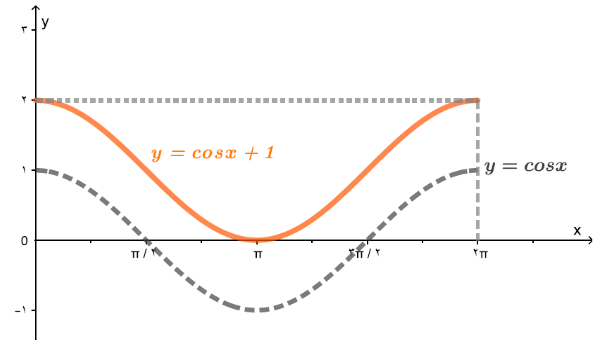
شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳\cos x$ را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[\circ\,,\,۲\pi]$، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



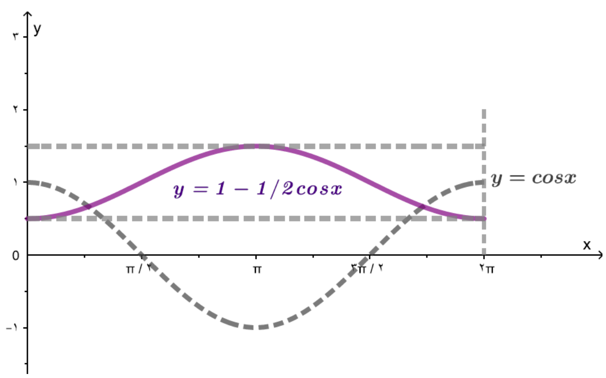
۱ $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$



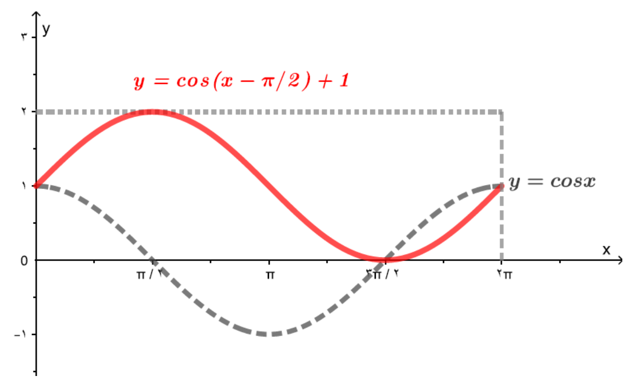
۲ $y=\cos x-۱$



۳ $y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$



۴ $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})+۱$



تمرین

۱ آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y=\sin x \ , \quad y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\cos(-(\frac{\pi}{۲}-x))=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$$

۲) $y=\cos x \ , \quad y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x$$

۳) $y=\cos x \ , \quad y=\cos(۲\pi-x)$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

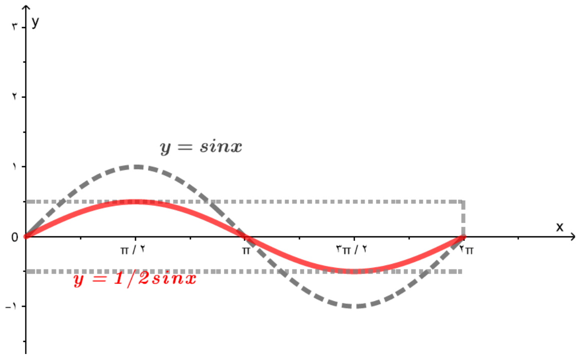
$$y=\cos(۲\pi-x)=\cos x$$

۴) $y=\sin x \quad , \quad y=\sin(۵\pi-x)$

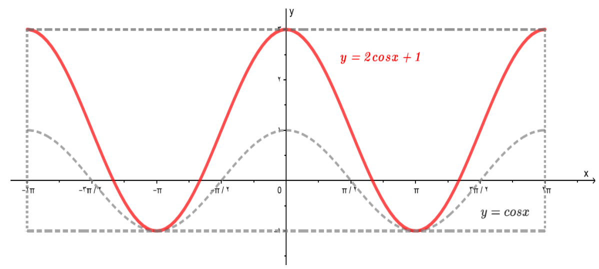
$y=\sin(۵\pi-x)=\sin(۴\pi+\pi-x)=\sin(\pi-x)=\sin x$ این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲ نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

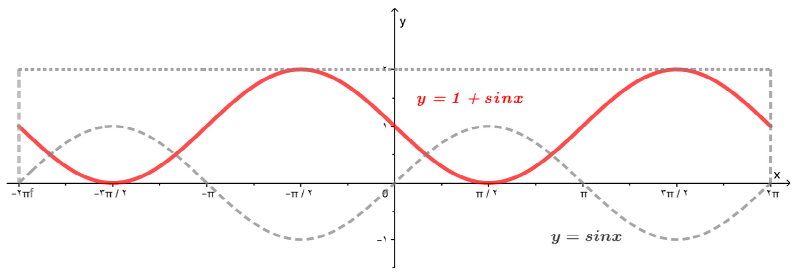
۱) $y=\frac{۱}{۲}\sin x \quad , \quad [۰,۲\pi]$



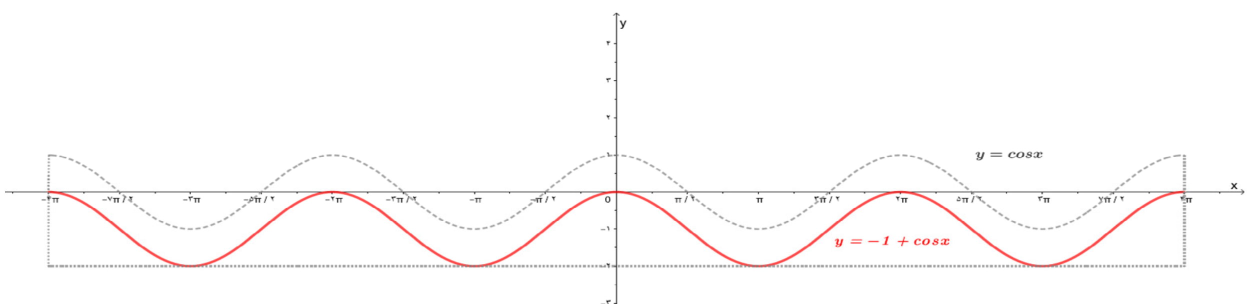
۲) $y=۲\cos x+۱ \quad , \quad [-۲\pi,۲\pi]$



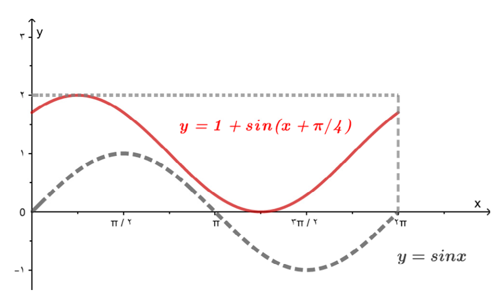
۳) $y=۱-\sin x \quad , \quad [-۲\pi,۲\pi]$



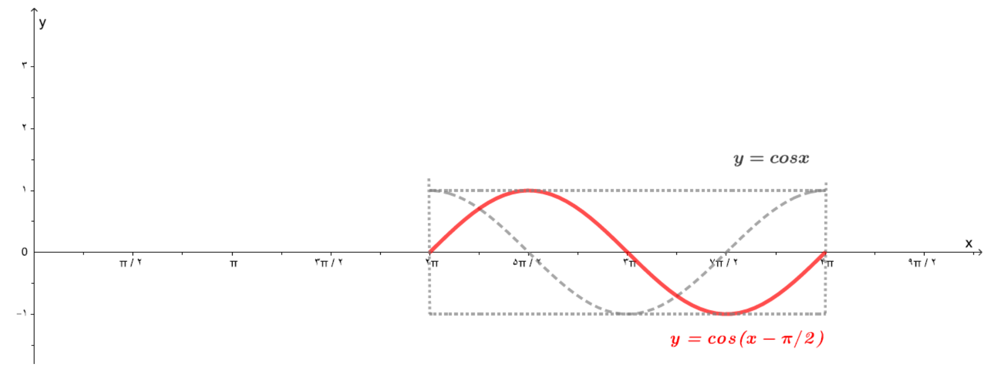
۴) $y=-۱+\cos x \quad , \quad [-۴\pi,۴\pi]$



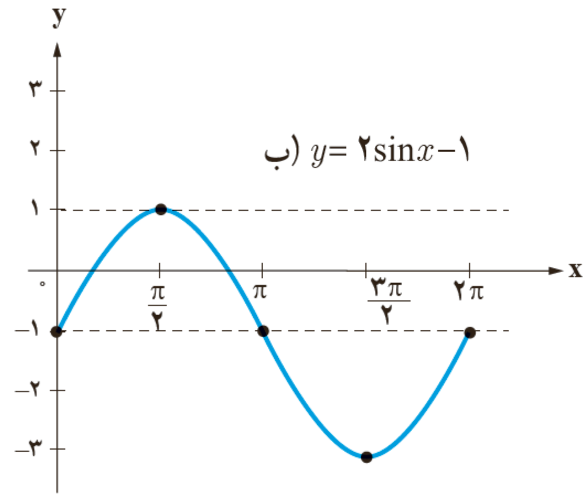
۵) $y=۱+\sin(x+\frac{\pi}{۴}) \quad , \quad [۰,۲\pi]$

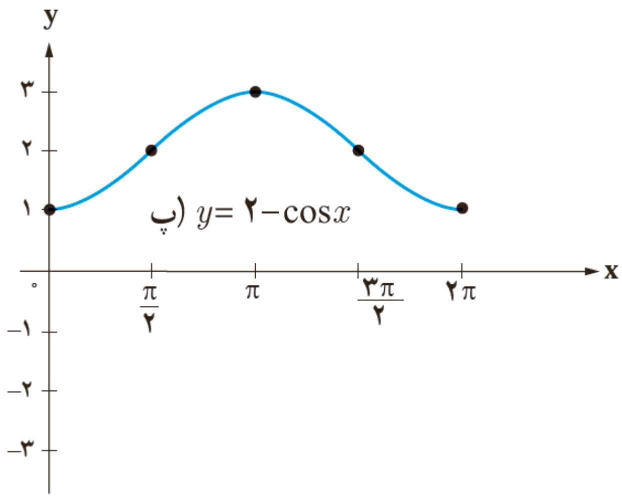


۶) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$, $[۲\pi,۴\pi]$

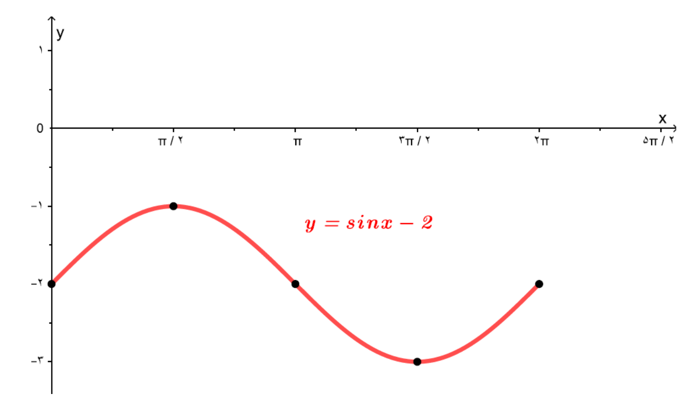


۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.

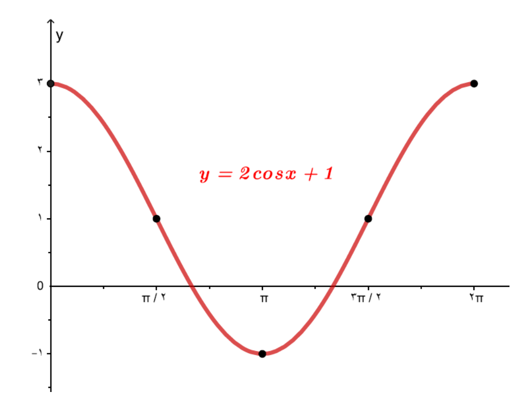




ت) $y=\sin x-۲$

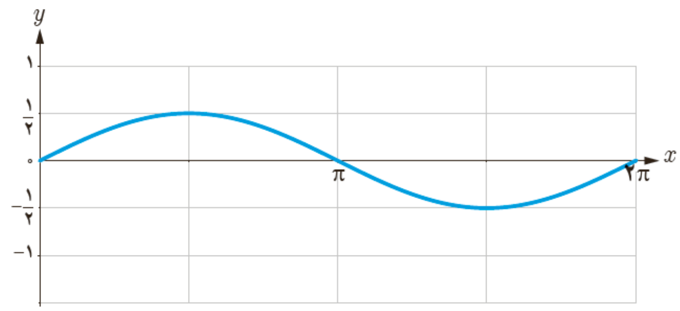


الف) $y=۲\cos x+۱$



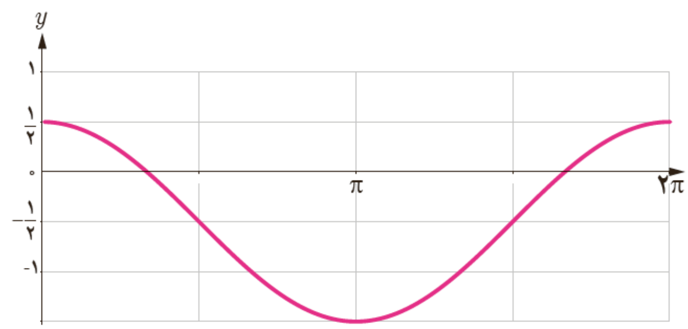
۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ را نشان می‌دهد.



درست است . در نمودار تابع سینوس مقادیر y باید نصف شوند.

ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x-\frac{۱}{۲}$ را نشان می‌دهد.



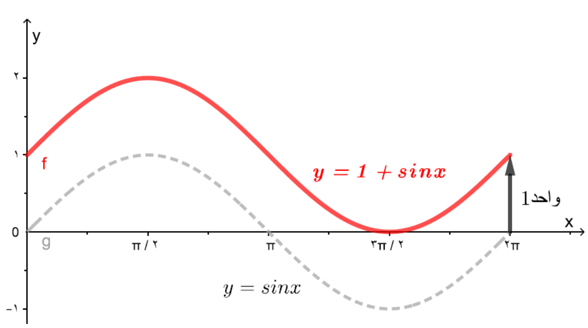
درست است نمودارتابع کسینوس را به اندازه نصف واحد به موازات محور y ها به سمت پایین منتقل می کنیم.

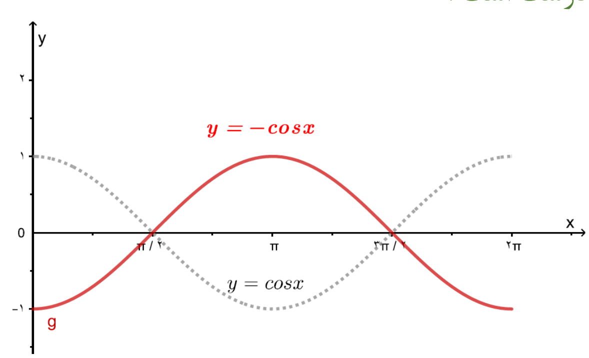
پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۱+\sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازهٔ یک واحد به موازات محور xها انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

پ) باید به اندازه یک واحد به موازات محور y ها به سمت بالا انتقال یابد.

ت) درست است .





تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی