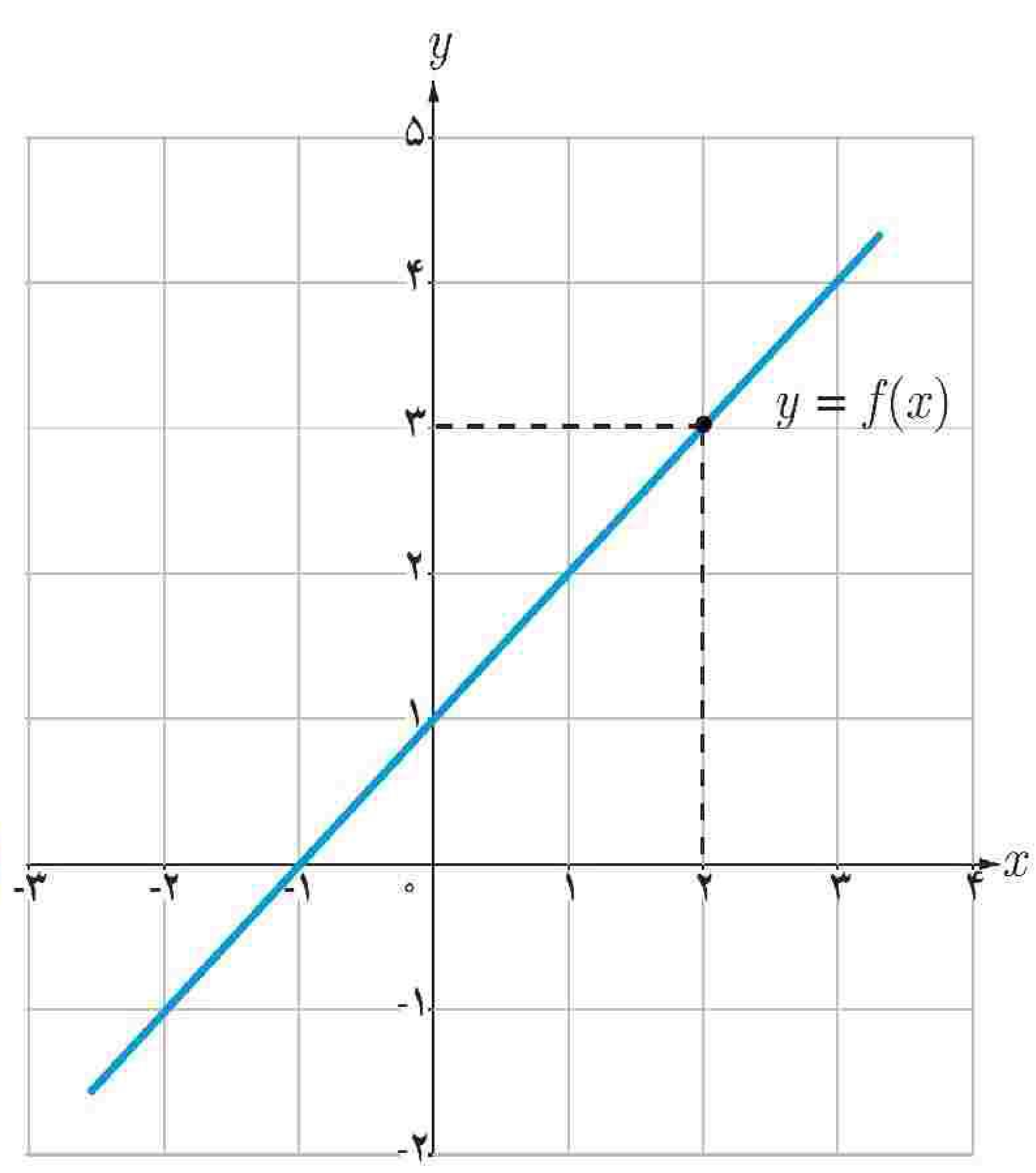
پیوستگی:

اگر نمودار تابع f در نقطه‌ی $x=a$ دارای حفره نباشد و یا در این نقطه، به دو قطعه‌ی جدا از هم تقسیم نشده باشد، گوییم تابع f در این نقطه پیوسته است.

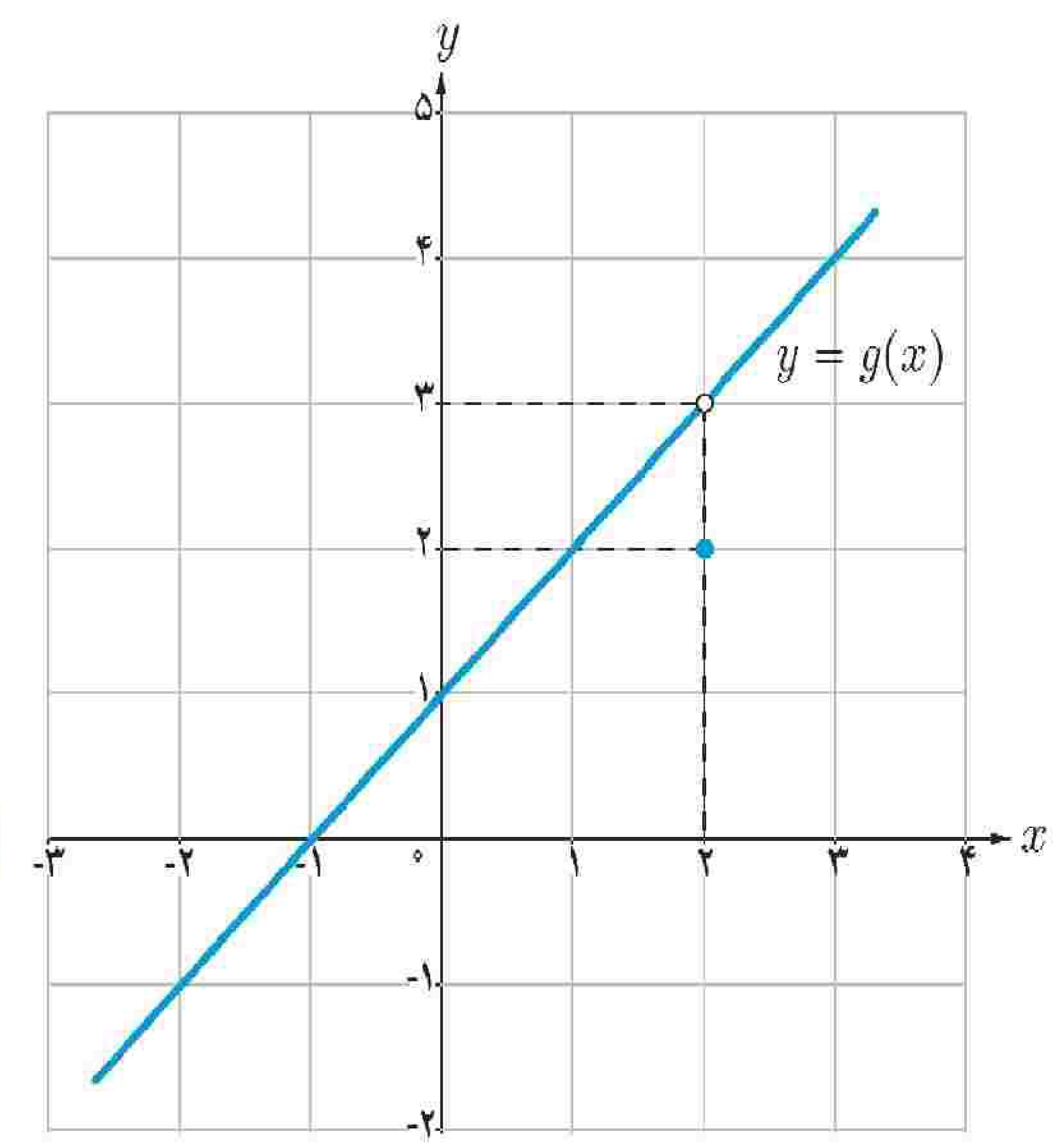
به عبارت دیگر درصورتی که نمودار تابع f در همسایگی های راست و چپ نقطه‌ی $x=a$ به انضمام خود این نقطه، به هم چسبیده باشد، تابع در این نقطه پیوسته است. به عنوان نمونه:

الف)



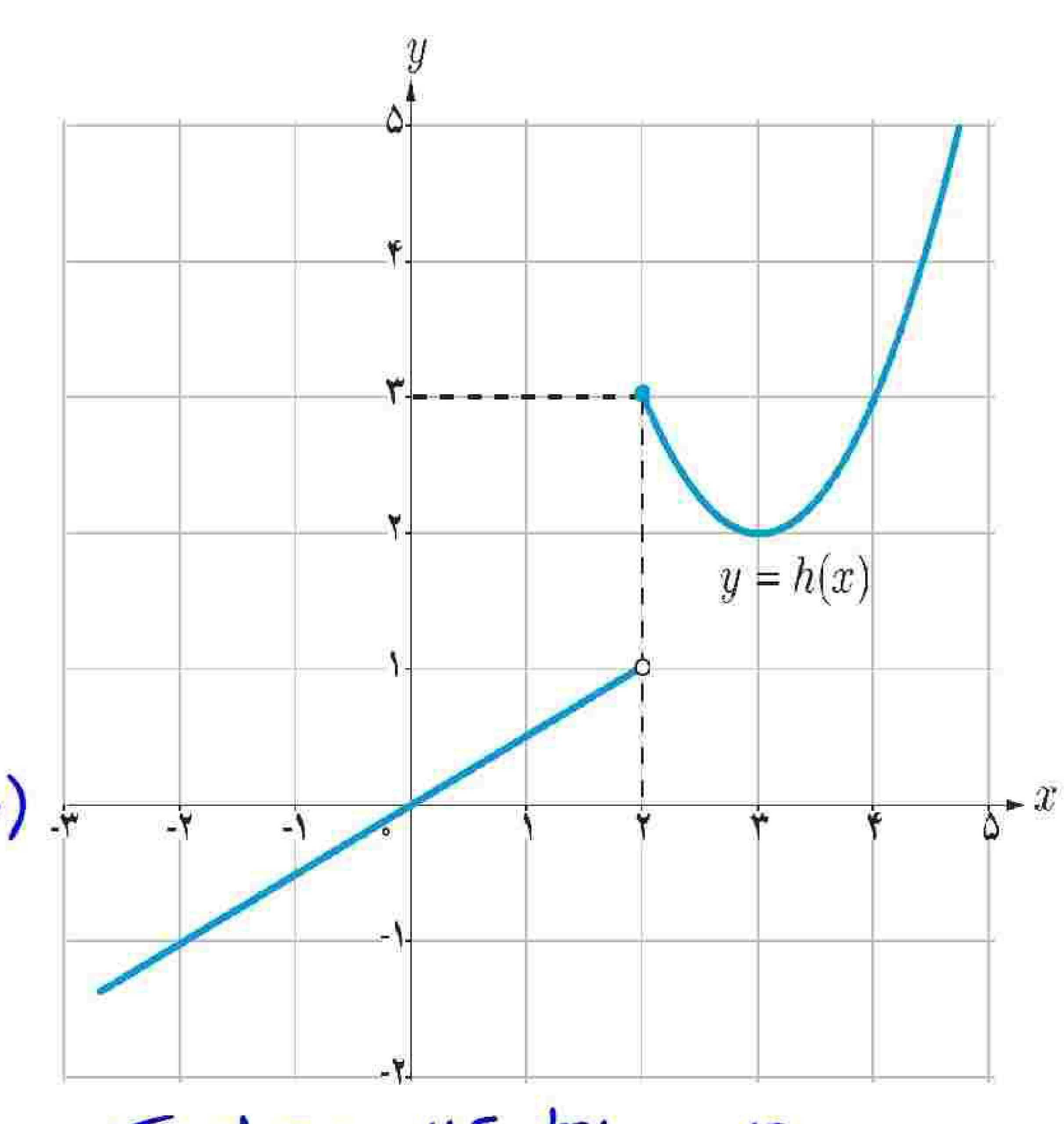
تابع در نقطه ۲ پیوسته است.

ب)



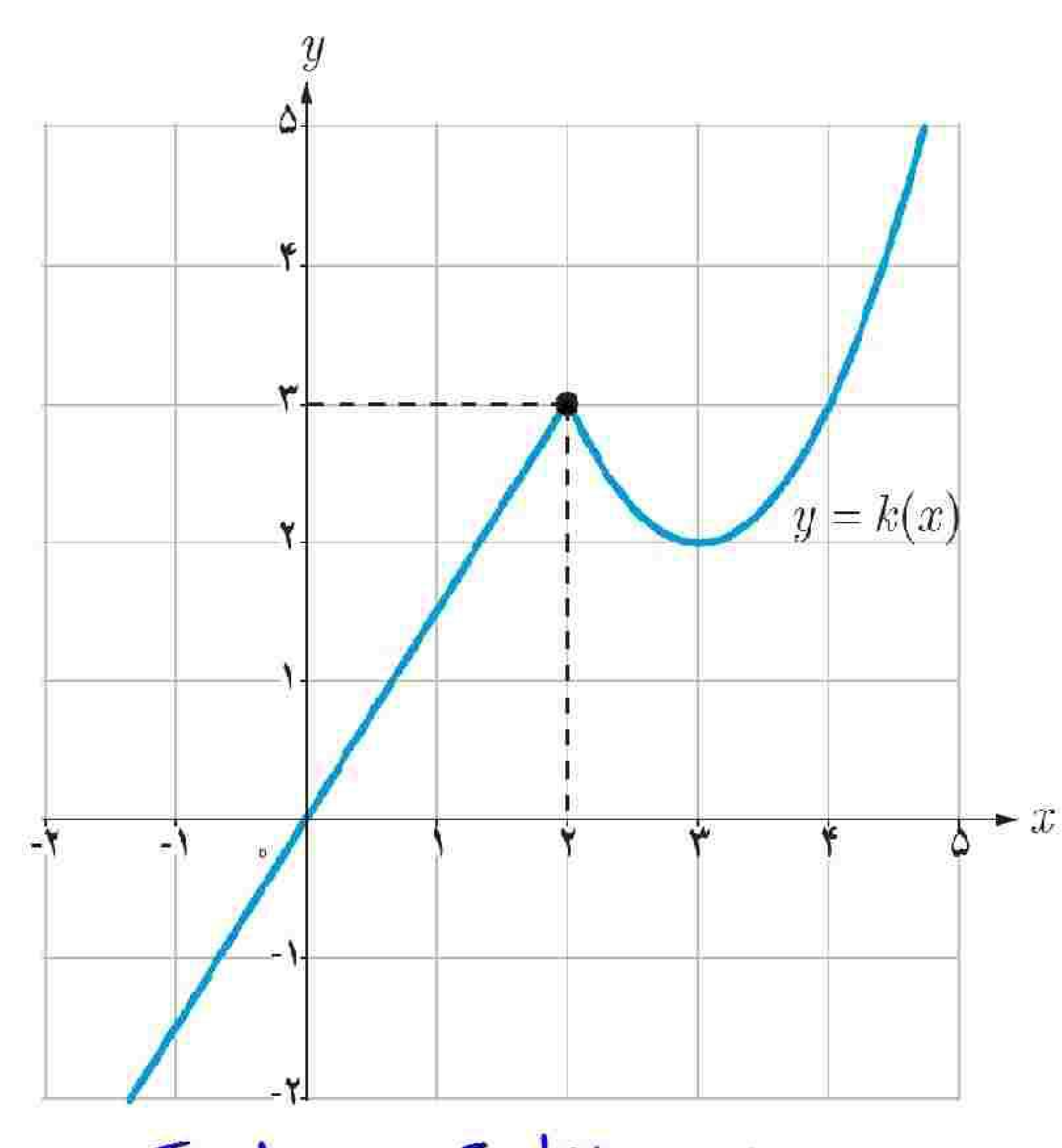
تابع در نقطه ۲ ناپیوسته است.

پ)



تابع در نقطه ۲ ناپیوسته است.

ت)



تابع در نقطه ۲ پیوسته است.

تعریف ریاضی پیوستگی: گوییم تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است هرگاه: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

درصورتی که به نمودارهای قبل از تعریف مراجعه کنیم خواهیم دید که:

نمودار الف: $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ و $f(2)=3 \Rightarrow$ تابع f در $x=2$ پیوسته است

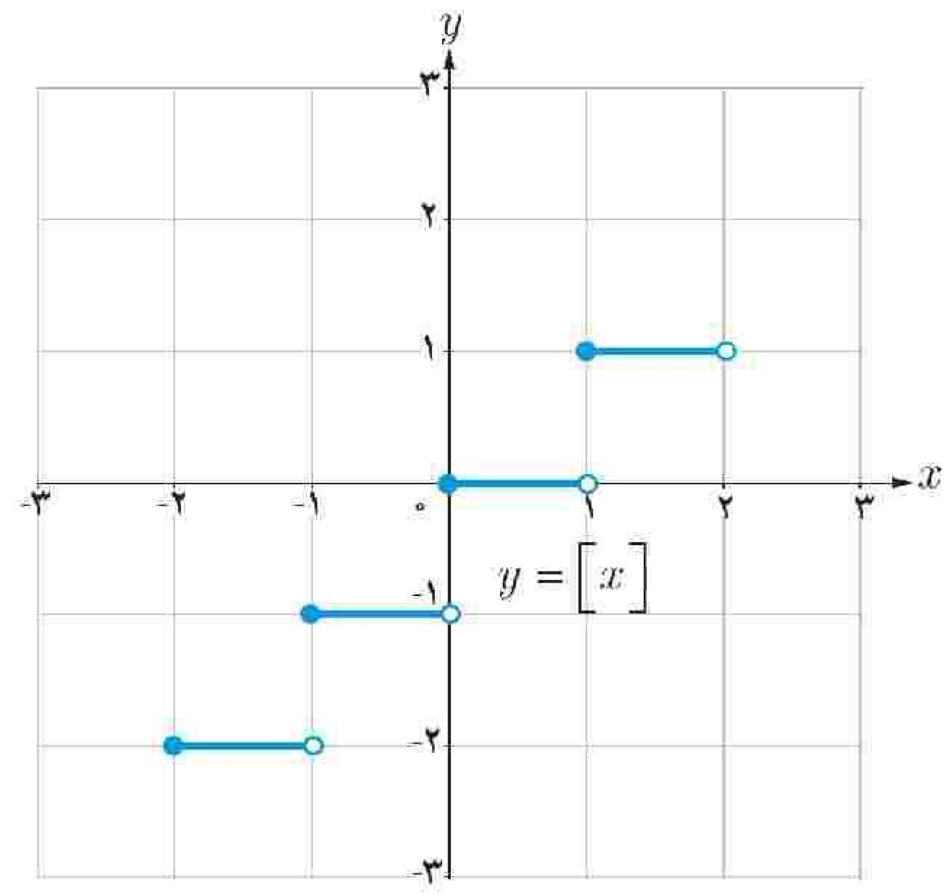
نمودار ب : $\lim_{x\to 2} g(x) = 3$ ، $g(2) = 2 \Rightarrow$ تابع g در ۲=x حد دارد ولی پیوسته نیست

نمودار پ : $\lim_{x\to 2^+} h(x) = 3$ ، $\lim_{x\to 2^-} h(x) = 1$ ، $f(2) = 3 \Rightarrow$ تابع h در ۲=x حد ندارد و پیوسته نیست

نمودار ت : $\lim_{x\to 2} k(x) = 3$ ، $k(2) = 3 \Rightarrow$ تابع k در ۲=x پیوسته است

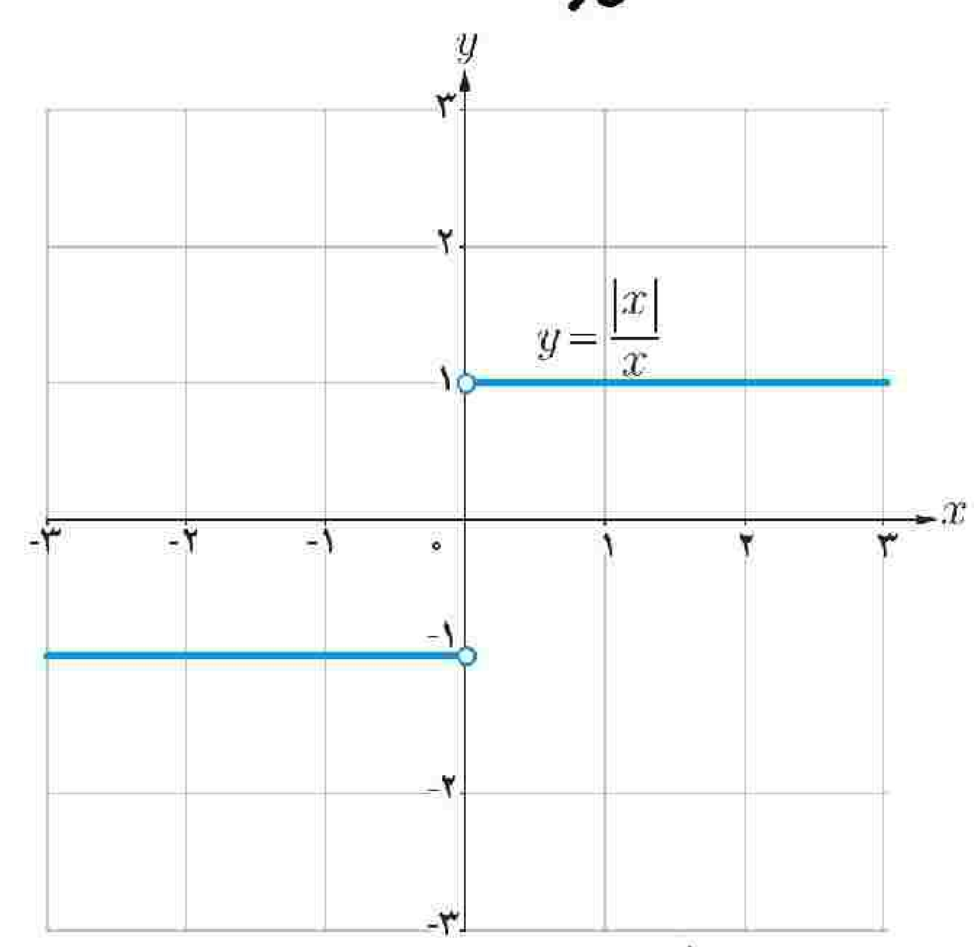
مثال : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کرده و به کمک آن تعیین کنید، این توابع در چه نقاطی ناپیوسته و در کدام نقاط ناپیوسته اند؟

الف) $y = [x]$



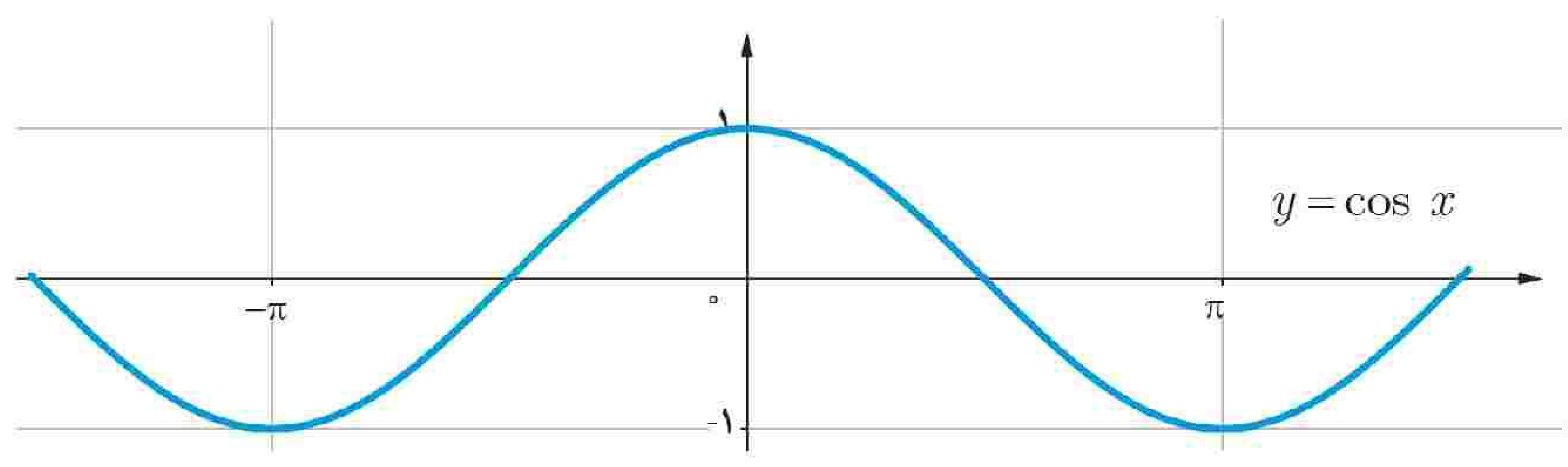
با توجه به شکل، تابع در کلیهٔ نقاط صحیح ($\mathbb{Z}$) ناپیوسته است و در دیگر نقاط ($\mathbb{R}-\mathbb{Z}$) پیوسته می‌باشد.

ب) $y = \frac{|x|}{x}$



با توجه به شکل، تابع فقط در ۰=x ناپیوسته و در دیگر نقاط ($\mathbb{R}-\{0\}$) پیوسته است.

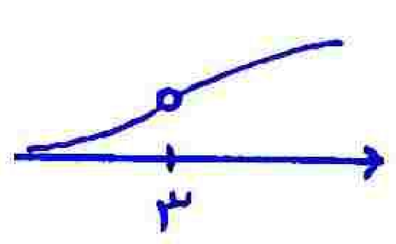
پ) $y = \cos x$



با توجه به شکل، تابع در کلیهٔ نقاط ($\mathbb{R}$) پیوسته است.

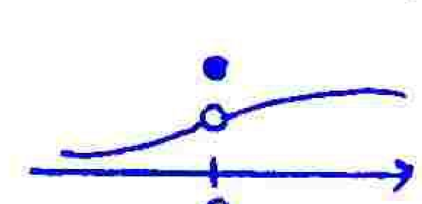
مثال : متناسب با هر یک از شرایط مطرح شده، نمودار یک تابع رسم کنید:

الف) تابع در نقطهٔ ۳ تعریف نشده اما در ۳=x دارای حد باشد.

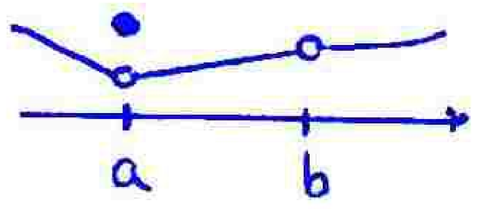


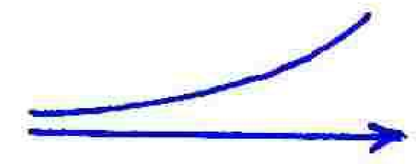
تابع در ۳=x ناپیوسته است

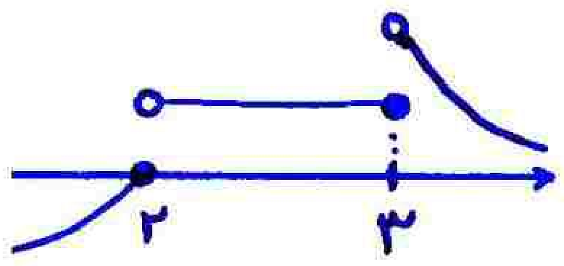
ب) تابع در نقطهٔ a تعریف شده و حد تابع هم در نقطهٔ a موجود باشد، اما با مقدار تابع در a برابر نباشد.

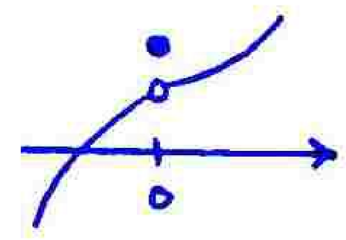


تابع در x=a ناپیوسته است

پ) تابع در همه جا پیوسته باشد به جز در دو نقطه. 

ت) تابع در هر عدد حقیقی پیوسته باشد. 

ث) تابع در دو نقطهٔ ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد. 

ج) تابع در صفر حد داشته ولی ناپیوسته باشد. 

مثال: پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقاط گفته شده، بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ (نقطهٔ $x=3$)

تابع f در $x=3$ تعریف نشده است، لذا $f(3)$ وجود ندارد، پس تابع f در ۳ ناپیوسته است.

ب) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & , \ x\neq 3\\ 6 & , \ x=3\end{cases}$ (نقطهٔ $x=3$)

$\lim\limits_{x\to 3} g(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{0}{0}\to \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=6$ و $g(3)=6$ ← تابع g در ۳ پیوسته است

پ) $h(x)=[x]+[-x]$ (نقطهٔ $x=2$)

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=2+(-3)=-1$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=1+(-2)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} h(x)=-1$

$f(2)=[2]+[-2]=2+(-2)=0$ ← تابع h در $x=2$ حد دارد ولی در این نقطه پیوسته نیست

تعریف:

الف) گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (پیوستگی راست دارد) هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

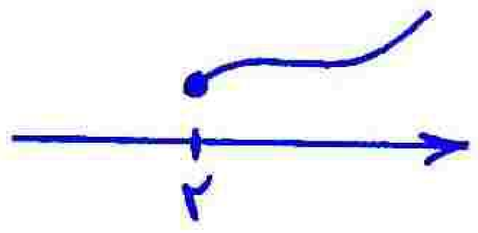
ب) گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (پیوستگی چپ دارد) هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

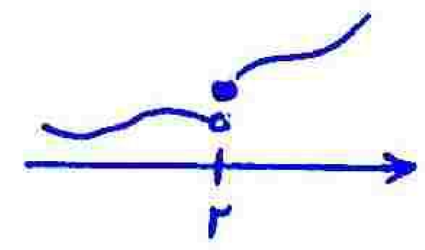
مثال: نمودار تابع f را چنان رسم کنید که:

الف) در همسایگی $x=2$ تعریف شده و فقط دارای پیوستگی راست در این نقطه باشد. 

ب) در $x=2$ فقط پیوستگی راست داشته باشد.

با توجه به این که در مورد تعریف شدن همسایگی چپ، تأکیدی نشده، نمودار آن را می‌توان به دو صورت رسم کرد:





مثال: پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقاط گفته شده، بررسی کنید:

الف) $f(x)=\begin{cases} 3x^2+x & x<0 \\ 2 & x=0 \\ 2\cos x-\sin x & x>0 \end{cases}$ (نقطهٔ $x=0$)

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 3x^2+x=0$ ، $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2\cos x-\sin x=2-0=2$ و $f(0)=2$

تابع در $x=0$ پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.

ب) $g(x)=x+[-x]$ (نقطهٔ $x=4$)

$\lim_{x\to 4^-} g(x)=4+(-4)=0$ ، $\lim_{x\to 4^+} g(x)=4+(-5)=-1$ و $g(4)=4+(-4)=0$

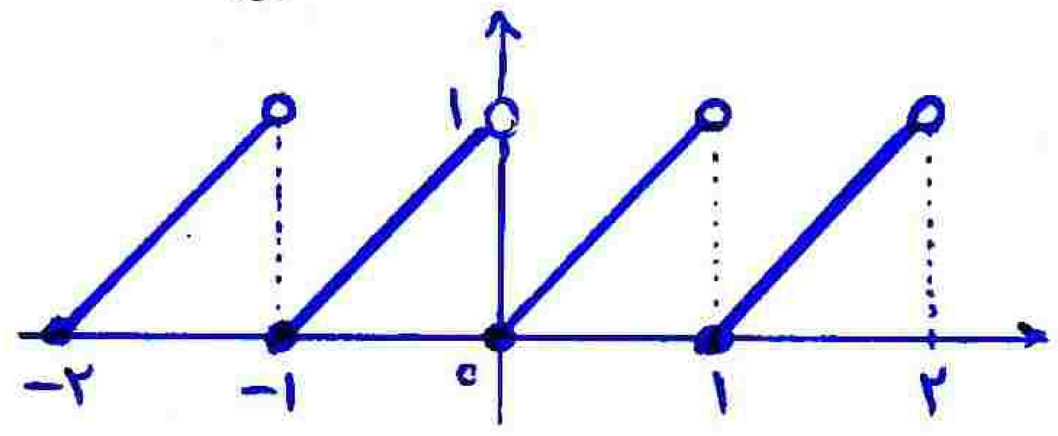
تابع در $x=4$ پیوسته نیست اما در 4 پیوستگی چپ دارد.

پ) $h(x)=\begin{cases} 2[x] & x\leq 1 \\ x^2+1 & x>1 \end{cases}$ (نقطهٔ $x=1$)

$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-} 2[x]=2(0)=0$ ، $\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2+1=2$ و $h(1)=2[1]=2\times 1=2$

تابع در $x=1$ پیوسته نیست اما در 1 پیوستگی راست دارد.

مثال: نمودار تابع $y=x-[x]$ را رسم کرده و طبق آن نمودار، در مورد نقاط ناپیوستگی تابع توضیح دهید.



تابع در کلیهٔ نقاط صحیح ناپیوسته است اما در این نقاط پیوستگی راست دارد.

پیوستگی بر بازه :

① گوییم تابع f بر بازهٔ (a,b) پیوسته است، هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

مثال : پیوستگی توابع زیر را در بازه های داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x) = 2x + \sqrt{x-1} \quad , \quad x \in (1,5)$

گیریم $a \in (1,5)$ نقطهٔ دلخواهی از بازه باشد :

$\lim_{x\to a} f(x) = 2a + \sqrt{a-1} \quad , \quad f(a) = 2a + \sqrt{a-1} \Rightarrow$ تابع f در a پیوسته است

در نتیجه تابع f در تمام نقاط بازهٔ $(1,5)$ پیوسته است ، یعنی بر بازهٔ $(1,5)$ پیوسته است .

ب) $g(x) = 2x - [x] \quad , \quad x \in (3,4)$

با فرض $3 < x < 4$ ، $[x] = 3$ شده و در نتیجه $g(x) = 2x - 3$ است . حال برای هر نقطهٔ دلخواه از بازهٔ $(3,4)$ ، همچون نقطهٔ a داریم :

$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} 2x - 3 = 2a - 3 \quad , \quad g(a) = 2a - 3 \Rightarrow$ تابع g در a پیوسته است

پس تابع g بر بازهٔ $(3,4)$ پیوسته است .

پ) $h(x) = 2[-x] \quad , \quad x \in (1,3)$

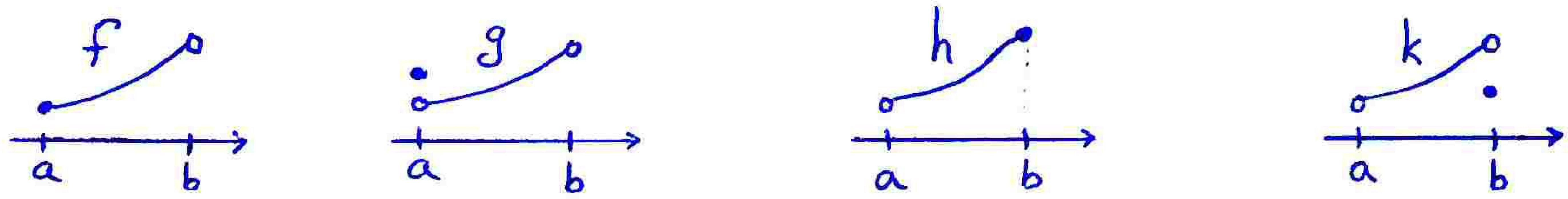
تابع h در این بازه پیوسته نیست زیرا $x=2$ عضوی از این بازه بوده، که تابع h در آن ناپیوسته است :

$\lim_{x\to 2^+} h(x) = 2(-3) = -6 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} h(x) = 2(-2) = -4 \quad , \quad h(2) = 2(-2) = -4$

تابع h در $x=2$ ناپیوسته است (پیوستگی چپ دارد)

② گوییم تابع f بر بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است هرگاه بر بازهٔ (a,b) پیوسته بوده و در نقطهٔ a پیوستگی راست داشته باشد .

به طور مشابه، گوییم تابع f بر بازهٔ $(a,b]$ پیوسته است هرگاه بر بازهٔ (a,b) پیوسته بوده و در نقطهٔ b پیوستگی چپ داشته باشد .



f در $[a,b)$ پیوسته است   g در $[a,b)$ ناپیوسته است   h در $(a,b]$ پیوسته است   k در $(a,b]$ ناپیوسته است

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = x + [x]$ را در بازهٔ $(0,1)$ بررسی کنید.

با فرض $0 < x < 1$ ، $[x]=0$ شده و در نتیجه $f(x)=x$ خواهد بود.

$\forall a \in (0,1) : \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x = a \quad , \quad f(a) = a \Rightarrow$ تابع f در a پیوسته است

$\Leftarrow$ تابع f در بازهٔ $(0,1)$ پیوسته است.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+[x]=0 \quad , \quad f(0)=0 \Rightarrow$ تابع f در $x=0$ از راست پیوسته است

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[0,1)$ پیوسته است.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=x+[x]$ را در بازهٔ $[0,1]$ بررسی کنید.

در مثال قبل نشان دادیم f بر بازهٔ $(0,1)$ پیوسته است، حال باید پیوستگی چپ 1 بررسی شود:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+[x] = 1+0=1 \quad , \quad f(1)=1+[1]=2$

f در $x=1$ از چپ پیوسته نیست

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[0,1]$ ناپیوسته است.

③ گوییم تابع بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است هرگاه بر بازهٔ (a,b) پیوسته بوده و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[0,2]$ بررسی کنید.

$\forall a \in (0,2) : \lim\limits_{x\to a} f(x) = \sqrt{a} \quad , \quad f(a) = \sqrt{a} \rightarrow$ f در a پیوسته است

$\Leftarrow$ f در بازهٔ $(0,2)$ پیوسته است.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ ، $f(0)=0 \longrightarrow$ f در $x=0$ از راست پیوسته است

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{x}=\sqrt{2}$ ، $f(2)=\sqrt{2} \longrightarrow$ f در 2 از چپ پیوسته است

بنابراین f روی بازهٔ $[0,2]$ پیوسته است.

نکته: اگر f تابعی چندجمله‌ای باشد آنگاه f روی هر بازه پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=3x^2-x+1$ بر روی بازه‌های (a,b) , $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ پیوسته است.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=x[-x]$ را در بازهٔ $[-1,1]$ بررسی کنید.

اگر $-1<x<0 \Rightarrow [-x]=0 \Rightarrow f(x)=0 \longrightarrow$ پیوسته است

اگر $0<x<1 \Rightarrow [-x]=-1 \Rightarrow f(x)=-x \longrightarrow$ پیوسته است

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ ، $f(0)=0 \longrightarrow$ f در $x=0$ پیوسته است

$\Rightarrow$ f روی $(-1,1)$ پیوسته است

$\lim_{x\to (-1)^+} f(x)=(-1)(0)=0$ و $f(-1)=(-1)(1)=-1 \Rightarrow$ f در -1 پیوستگی راست ندارد

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1\times(-1)=-1$ ، $f(1)=1(-1)=-1 \Rightarrow$ f در 1 پیوستگی چپ دارد

بنابراین f روی بازهٔ $[-1,1]$ پیوسته نیست.

نکات مهم:

۱- اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، روی هر زیربازهٔ دلخواه آن نیز پیوسته است.

۲- اگر u چندجمله‌ای برحسب x فرض شود آنگاه توابع $\sin u$, $\cos u$, $\tan u$, $\cot u$, $\sqrt{u}$ و $|u|$، همچنین کلیهٔ توابع گویا، در تمام نقاط دامنهٔ تعریفشان پیوسته‌اند.

مثال: بازهٔ مبتدای را ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

دامنه: $3-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 3 \Rightarrow D_f=(-\infty,3]$

f روی دامنهٔ تعریفش (یعنی $(-\infty,3]$) پیوسته است و طبق نکتهٔ 1 روی هر زیربازهٔ آن نیز پیوسته است به طور مثال روی $[0,3]$ نیز پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{x^3-25x}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

$x-4\geq 0 \Rightarrow x\geq 4$

$x^3-25x=0 \Rightarrow x(x^2-25)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=\pm 5$

$\Rightarrow D_f=[4,+\infty)-\{5\}$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است و فقط در $x=5$ ناپیوسته می‌باشد.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+4 & , \ x<1\\ 3x+1 & , \ x\geq 1\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x}+4=5$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}3x+1=4$ و $f(1)=4 \longrightarrow$ f در $x=1$ ناپیوسته

از طرفی با توجه به چندجمله‌ای بودن $3x+1$، تابع در بازه $(1,+\infty)$ پیوسته است.

همچنین عبارت گویای $\frac{1}{x}+4$، فقط در $x=0$ ناپیوسته است (صفر ریشه‌ی مخرج است).

بنابراین تابع f در دو نقطه‌ی $x=1$ و $x=0$ ناپیوسته است.

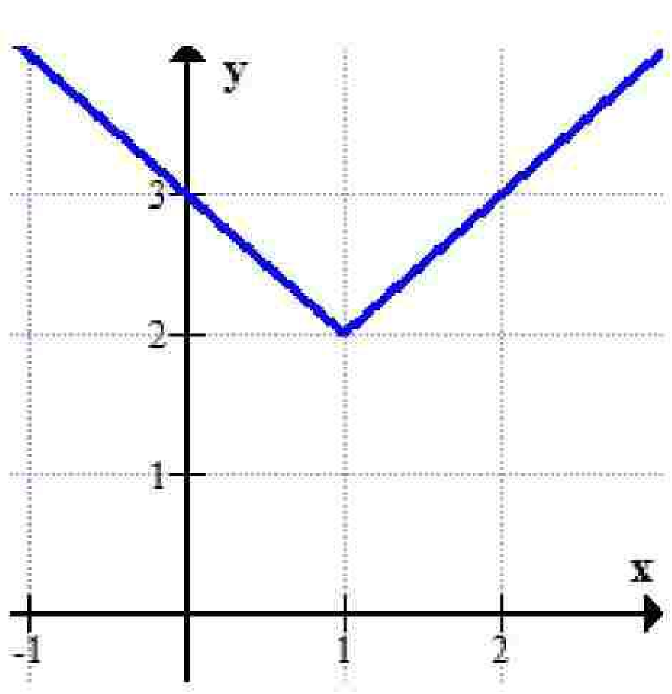
مثال: ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

ساده‌ترین نوع تابع، تابع گویایی است که مخرج آن دارای دو ریشه باشد مانند $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

حل چند نمونه سوال

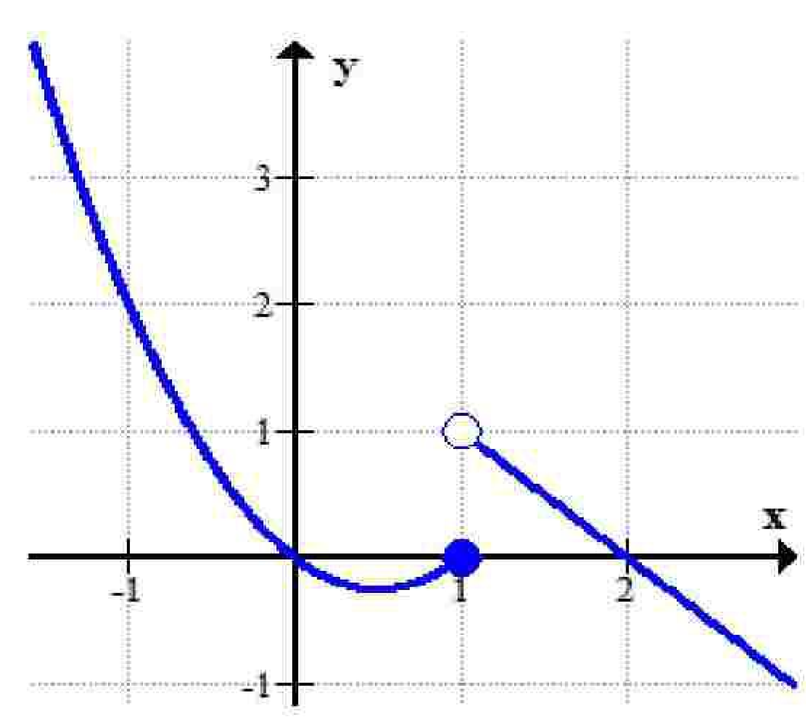
۱- با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-1|+2$



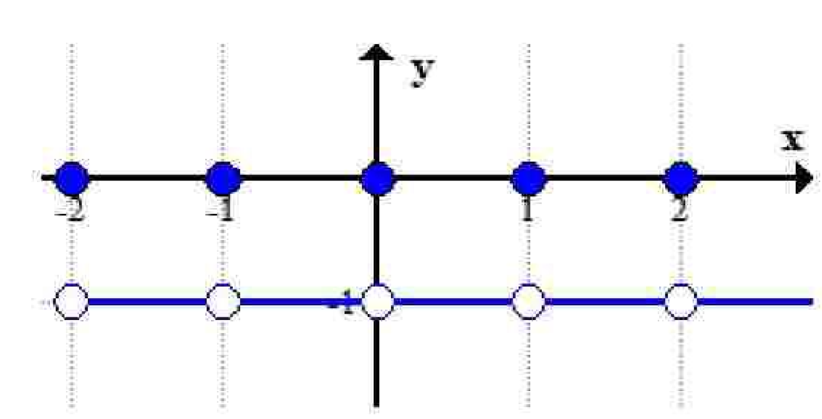
تابع در تمام نقاط پیوسته است و فاقد نقطه‌ی ناپیوستگی است.

ب) $y=\begin{cases}x(x-1) & x\leq 1\\ -x+2 & x>1\end{cases}$



تابع فقط در $x=1$ ناپیوسته است.

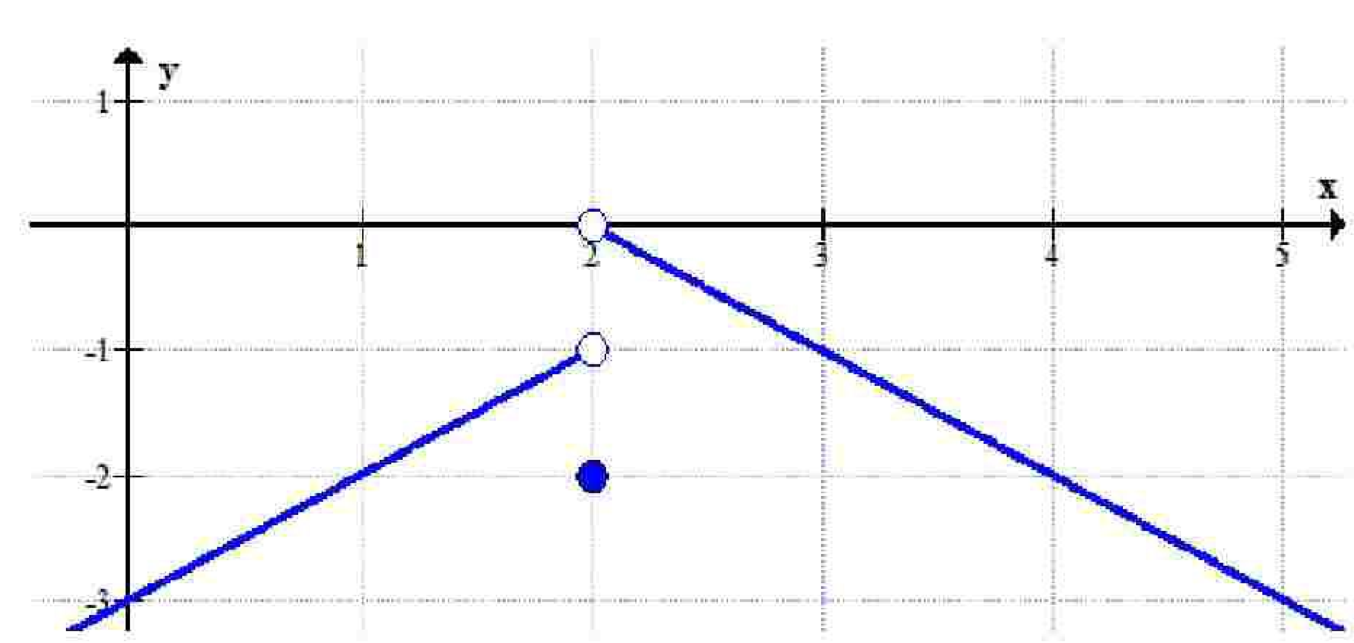
پ) $y=[x]+[-x]$



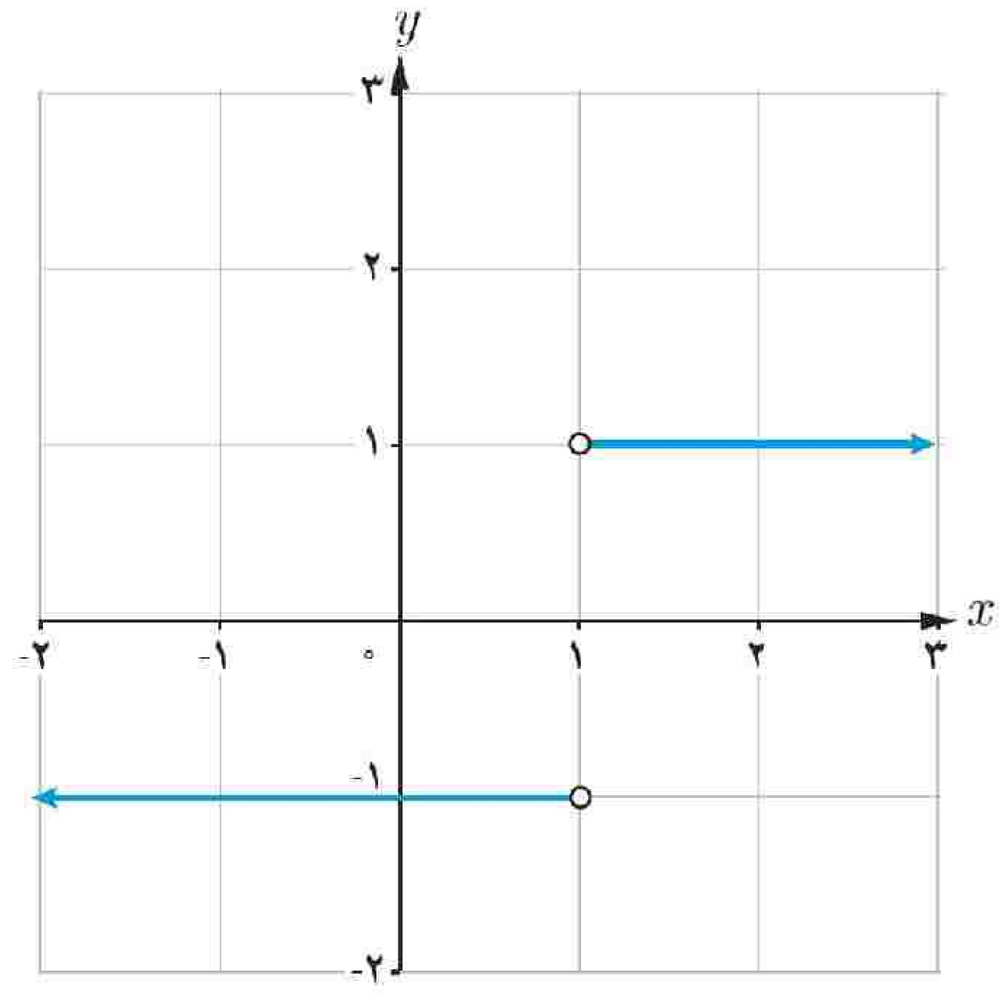
تابع در تمام نقاط صحیح (Z) ناپیوسته است.

ت) $y=\begin{cases}x-3 & x<2\\ -2 & x=2\\ -x+2 & x>2\end{cases}$

تابع فقط در $x=2$ ناپیوسته است

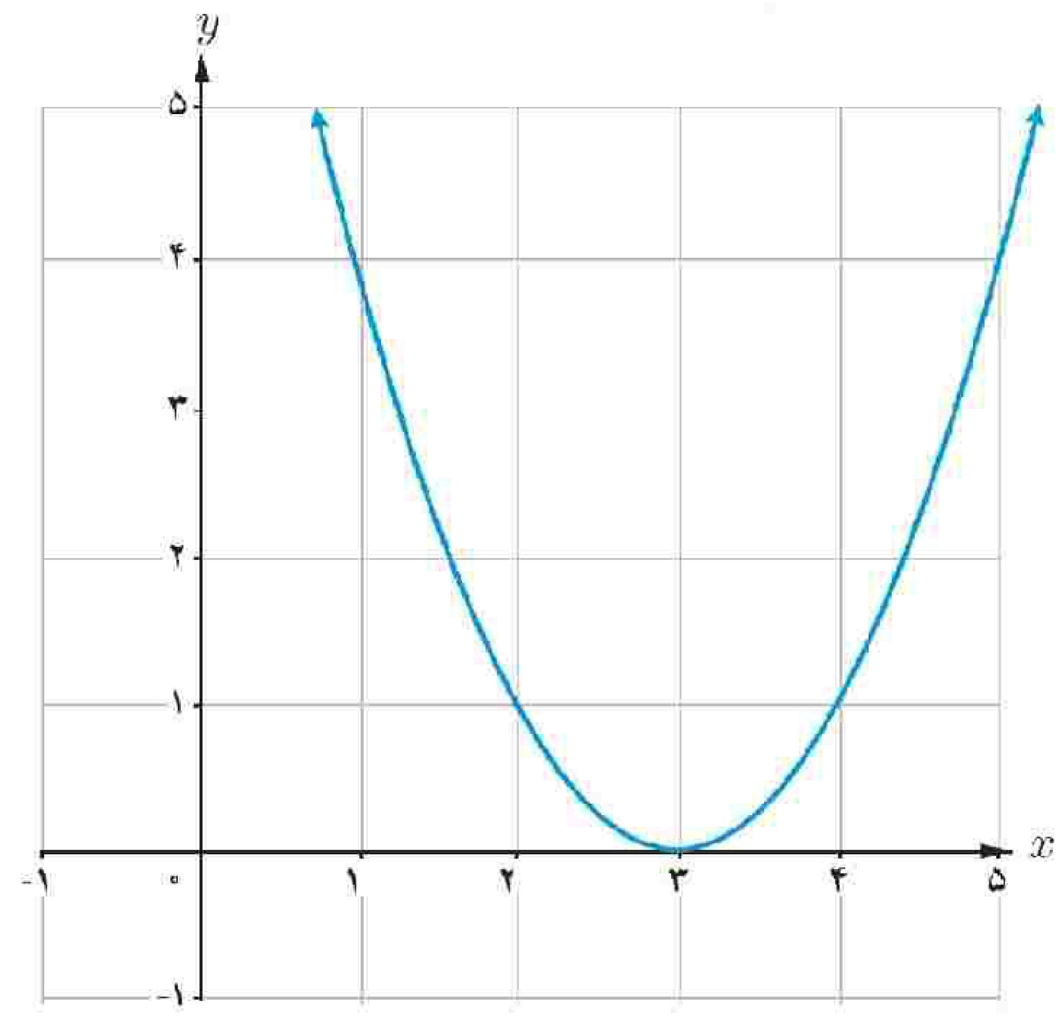


ث) $y = \frac{|x-1|}{x-1}$



تابع فقط در $x=1$ ناپیوسته است.

ج) $y = (x-3)^2$



تابع در تمام نقاط پیوسته است و فاقد نقطهٔ ناپیوستگی است.

۲ - پیوستگی توابع زیر را در $x=0$ بررسی کنید.

الف) $y = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & , x>0 \\ x+[x] & , x\leq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} x+[x] = 0+(-1) = -1$

$f(0) = 0+[0] = 0 \longrightarrow$ f در $x=0$ ناپیوسته است

ب) $y = [|x|]$

$\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} [|x|] = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} [|x|] = 0$, $f(0)=0 \longrightarrow$ f در $x=0$ پیوسته است

پ) $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x+|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{2x+|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{2x+x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{2x+|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{2x-x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

$f(0) = 1 \Longrightarrow$ تابع در $x=0$ فقط از چپ پیوسته است

۳- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1}, & |x|>1\\ 2x, & |x|\le 1\end{cases}$ را در دو نقطه به طول های ۱ و ۱- بررسی کنید.

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1}, & x>1 \ \text{یا}\ x<-1\\ 2x, & -1\le x\le 1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} 2x=-2$ ، $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=-2$

$f(-1)=2(-1)=-2 \longrightarrow$ f در $x=-1$ پیوسته است

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$ ، $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x=2$ ، $f(1)=2(1)=2$

f در $x=1$ فقط از چپ پیوسته است.

۴- پیوستگی تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\pi x$ در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ بررسی کنید.

به ازای هر عدد صحیح n ، مقدار و حدهای چپ و راست تابع $y_1=(-1)^{[x]}$ برابر 1 یا 1- است.
از طرفی مقدار و حد تابع $y_2=\sin\pi x$ در n برابر صفر است. در نتیجه حاصل ضرب آنها برابر صفر می شود
پس تابع f در هر نقطه از $\mathbb{Z}$ پیوسته است.

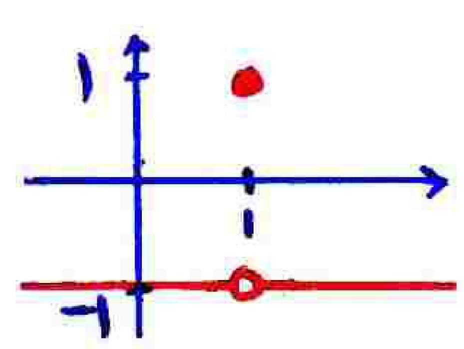
۵- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}-2x+2 & x\le 0\\ x^2+2 & x>0\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -2x+2=2$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+2=2$ ، $f(0)=-2(0)+2=2$

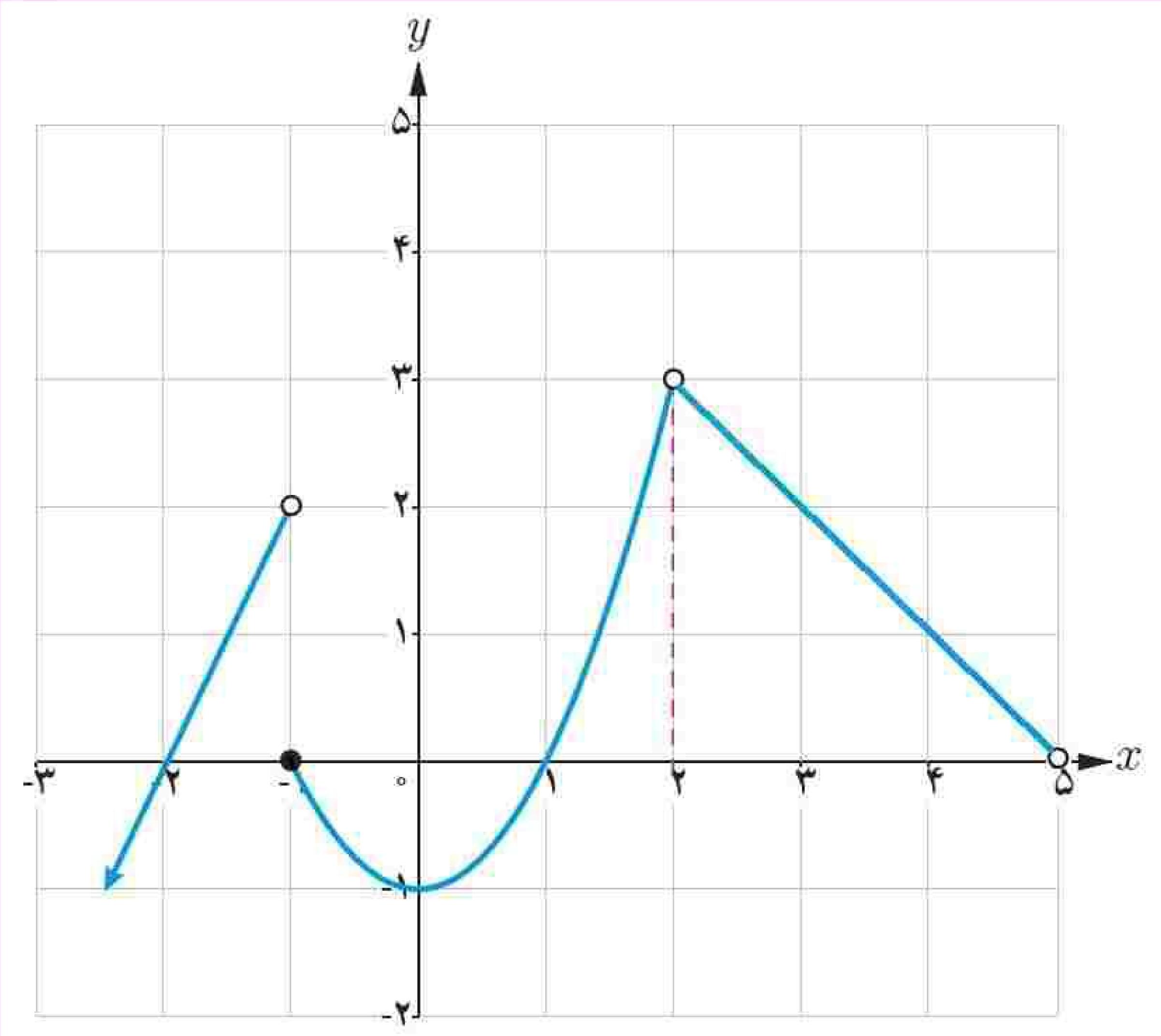
f در $x=0$ پیوسته است.

از طرفی چند جمله ای ها همواره پیوسته اند پس $-2x+2$ و x^2+2 همواره روی بازهٔ تعریفشان پیوسته می باشند پس f در نقاط دیگر پیوسته است.

۶- تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x=1$ مساوی 1- باشد ولی تابع در 1 پیوسته نباشد.



تابع $y=\begin{cases}-1 & , x\ne 1\\ 1 & , x=1\end{cases}$ ساده ترین تابعی است که در $x=1$ دارای حد 1- است ولی در این نقطه پیوسته نیست.



۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\leq x<2\\ 5-x & 2<x<5\end{cases}$ مفروض است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) دامنه و برد f را به دست آورید.

$D_f=(-\infty,5)-\{2\}$, $R_f=(-\infty,3)$

پ) پیوستگی تابع f را روی بازه های $[-1,1]$ و $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.

تابع f روی بازه $[-1,1]$ و $(2,5)$ پیوسته است ولی روی بازهٔ $[-2,0]$ پیوسته نیست زیرا در نقطهٔ -1 ناپیوسته است.

ت) کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

۱) f روی بازهٔ $(-\infty,-1]$ پیوسته است. نادرست (زیرا در -1 پیوستگی چپ ندارد.)

۲) f روی بازهٔ $(-\infty,-1)$ پیوسته است. درست

۳) f روی بازهٔ $[2,5]$ پیوسته است. نادرست (زیرا تابع در 2 و 5 تعریف نشده و ناپیوسته است.)

۴) $\lim_{x\to 5} f(x)=0$. نادرست (زیرا همسایگی راست 5 تعریف نشده و درنتیجه حد راست ندارد.)

۵) $\lim_{x\to 5^-} f(x)=0$. درست

۶) f روی بازهٔ $(-2,0)$ پیوسته است. نادرست (زیرا f در -1 ناپیوسته است.)

ث) دو بازهٔ بسته از دامنهٔ تابع f مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

تابع f روی بازهٔ $[-3,-2]$ پیوسته و روی بازهٔ $[1,2]$ ناپیوسته است.

ج) a و b ای را مثال بزنید که تابع روی (a,b) پیوسته باشد، اما روی $[a,b]$ پیوسته نباشد.

$a=0$ و $b=2$. تابع روی $(0,2)$ پیوسته ولی روی $[0,2]$ ناپیوسته است.

۸- سه تابع متفاوت مثال بزنید که:

الف) روی بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته باشد. $\longleftarrow$ $f(x)=2x+1$

ب) روی بازه $[-2,+\infty)$ پیوسته باشد. $\longleftarrow$ $f(x)=\sqrt{x+2}$

پ) روی بازه $(-\infty,0]$ پیوسته باشد. $\longleftarrow$ $f(x)=\sqrt{-x}$

۹- تابع $f(x)=[x]+\sqrt{x-3}$ در چند نقطه از بازهٔ $[0,5]$ ناپیوسته است؟

دامنهٔ تابع $[3,+\infty)$ می‌باشد، لذا قسمت‌های تعریف نشدهٔ بازهٔ $[0,5]$ حذف شده و باید در مورد نقاط ناپیوستگی تابع در بازهٔ $[3,5]$ صحبت کرد:

همسایگی چپ ۳ و راست ۵ تعریف نشده لذا در این نقاط، تابع ناپیوسته است.

از طرفی تابع در $x=4$ نیز ناپیوسته است زیرا:

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=4+1=5$ ، $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=3+1=4$ و $f(4)=4+1=5 \xrightarrow{\text{است}}$ f در ۴ ناپیوسته

بنابراین تابع در سه نقطهٔ ۳ و ۴ و ۵ ناپیوسته است.

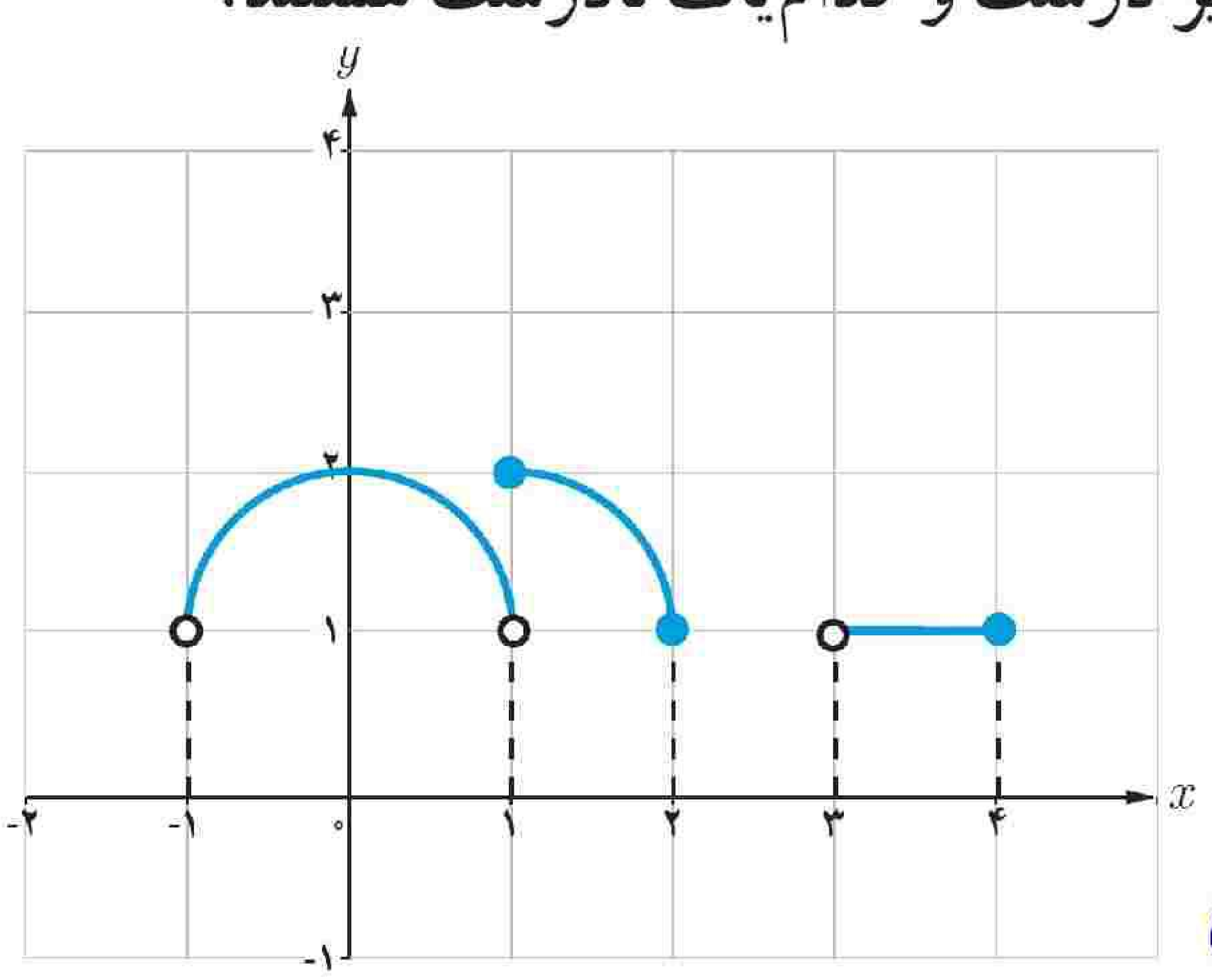
۱۰ـ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases}6t+4 & 0\le t<1\\ 2t+10 & 1\le t\le 10\end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به‌طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود: $f(\frac{1}{2})=6\times(\frac{1}{2})+4=7$ ۶ ماه $\to \frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ سال

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید. $f(5)=2(5)+10=20$ ، $f(2)=2(2)+10=14$

ب) آیا f در بازهٔ $[0,10]$ پیوسته است؟ خیر زیرا در $t=1$ ناپیوسته است:

$\lim\limits_{t\to1^+} f(t)=\lim\limits_{t\to1^+} 2t+10=12$ و $\lim\limits_{t\to1^-} f(t)=\lim\limits_{t\to1^-} 6t+4=10$ و $f(1)=12 \Longrightarrow$ f در $t=1$ ناپیوسته است.

۱۱ـ در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟



الف) تابع f بر بازه $[1\,,2]$ پیوسته است. درست

ب) تابع f در هر نقطه از $[1\,,2]$ پیوسته است.
نادرست (زیرا در ۱ و ۲ پیوسته نیست)

پ) تابع f بر بازه $[3\,,4]$ پیوسته است.
نادرست (زیرا در ۳ تعریف نشده و پیوسته نیست)

ت) تابع f بر بازه $[0\,,2]$ پیوسته است. نادرست (زیرا در ۱ ناپیوسته است)

۱۲ـ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ a & x=1\\ -x+2 & x>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} 2x-1=1$ ، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} -x+2=1$

، $f(1)=a \Rightarrow a=1$

ب) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱\\ a & x=۱\end{cases}$

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=3$$

$$,\ g(1)=a \Rightarrow a=3$$

پ) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰<x<۱\\ [x]+a & x\geq ۱\end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{x\to 1^+}[x]+a=1+a \quad ,\quad h(1)=1+a \Rightarrow 1+a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

$$\lim_{x\to 1^+} k(x)=\lim_{x\to 1^+}([x]-a)[x]=(1-a)\times 1=1-a$$

$$\lim_{x\to 1^-} k(x)=\lim_{x\to 1^-}([x]-a)[x]=(0-a)\times 0=0$$

$$k(1)=(1-a)\times 1=1-a \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1$$

۱۳ ــ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=۰$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases}x & x<۰\\ a & x=۰\\ ۲x+۱ & x>۰\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0 \quad ,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x+1=1 \quad ,\quad f(0)=a$$

$\Longrightarrow$ تابع f در $x=0$ حد ندارد $\Longrightarrow$ تابع f به ازای هیچ مقدار a نمی‌تواند پیوسته باشد

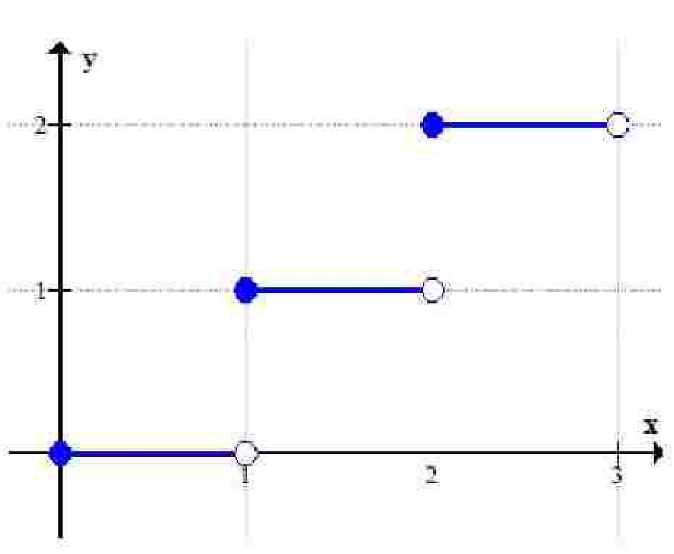
ب) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{|x|} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}}=a$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{-x}=-a \quad ,\quad g(0)=1$$

تابع g به شرطی پیوسته است که تساوی $a=-a=1$ برقرار باشد، واضح است که این تساوی هیچگاه برقرار نیست، پس تابع g به ازای هیچ مقدار a نمی‌تواند پیوسته باشد.

۱۴ ــ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲\,,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟



تابع $f(x)=[x]$ در اعداد صحیح ناپیوسته و در دیگر اعداد حقیقی پیوسته است. بنابراین اگر f در بازهٔ $(2,k)$ پیوسته است، حتماً این بازه شامل هیچ عدد صحیحی نیست، لذا k حداکثر می‌تواند ۳ باشد که بازه به صورت $(۲,۳)$ خواهد شد.

۱۵ـ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & x>0\\ b-1 & x=0\\ x-2a & x<0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{1}{\sin^2 x}}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x-2a=0-2a=-2a \quad , \quad f(0)=b-1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}\\ b-1=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}\end{cases}$$

ده تست از مبحث پیوستگی

۱ـ اگر تابع $f(x)=a[x-2]+3[x]$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -3 ۴) 3

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-2a \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-3a-3 \quad , \quad f(0)=-2a \Rightarrow -2a=-3a-3\Rightarrow a=-3$$

۲ـ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}3x-[x] & , x<2\\ a & , x=2\\ x+2 & , x>2\end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته است؟

(سراسری تجربی ۹۲)

۱) 4 ۲) $4{,}5$ ۳) 5 ۴) هیچ مقدار a

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 3x-[x]=6-1=5 \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x+2=4 \longrightarrow$$
تابع در $x=2$ حد ندارد

به ازای هیچ مقدار a پیوسته نیست

۳ـ تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & , x\notin \mathbb{Z}\\ a & , x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟

(سراسری ریاضی ۹۶)

۱) -1 ۲) 1 ۳) صفر ۴) همواره ناپیوسته

اگر $x\notin Z$، آنگاه $[x]+[-x]=-1$ است بنابراین: $f(x)=\begin{cases}-1 & , x\notin Z\\ a & , x\in Z\end{cases}$

اگر $n\in Z \Rightarrow \lim_{x\to n} f(x)=\lim_{x\to n} -1=-1 \quad , \quad f(n)=a \Rightarrow a=-1$

۴ـ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}} & , x>1\\ ax-a+2 & , x\leq 1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

(سراسری تجربی خارج کشور ۹۶)

۱) 1 ۲) 2 ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}+1)\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-1)}} = ۲ \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax-a+۲ = ۲$$

$f(1) = a-a+۲ = ۲ \Rightarrow$ به ازای هر مقدار a تابع f در ۱ پیوسته است

۵- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & , x\neq ۰ \\ a & , x=۰ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است؟

(سراسری تجربی ۹۴)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \times \frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to ۰} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x} = ۲ \quad , \quad f(۰)=a \Rightarrow a=۲$$

۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \left[\dfrac{\sin x}{x}\right]\cos ۴x & , |x|<\frac{\pi}{۲}, x\neq ۰ \\ a & , x=۰ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=۰$ پیوسته است؟

(سراسری ریاضی خارج کشور ۹۶)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) همواره ناپیوسته

با توجه به نمودار تابع $y=\frac{\sin x}{x}$، در همسایگی صفر، همواره $۰<\frac{\sin x}{x}<1$ واقع است و در نتیجه $\left[\frac{\sin x}{x}\right]=۰$ است بنابراین $f(x)=\begin{cases} ۰ & , |x|<\frac{\pi}{۲}, x\neq ۰ \\ a & , x=۰ \end{cases}$.

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} ۰ = ۰ \quad , \quad f(۰)=a \Rightarrow a=۰$$

۷- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ۲x-\sin x}{x} & , x\neq ۰ \\ a & , x=۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۲x-\sin x}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۲x}{x} - \frac{\sin x}{x} = ۲-۱=۱ \quad , \quad f(۰)=a \Rightarrow a=۱$$

۸- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x>۲ \\ x^۲+bx-1 & x<۲ \end{cases}$ با شرط $f(۲)=۵$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد a کدام است؟

۱) ۲- ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} ax+b = ۲a+b \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} x^۲+bx-1 = ۳+۲b \quad , \quad f(۲)=۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳+۲b=۵ \Rightarrow b=۱ \\ ۲a+b=۵ \end{cases} \Rightarrow ۲a+۱=۵ \Rightarrow a=۲$$

۹- تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} a+\sin 3x & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ b\cos 3x & \frac{\pi}{2}<x\le 2\pi \end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{2})=2$ ، در بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است.

$a-b$ کدام است؟ ۱) -5 ۲) -4 ۳) 4 ۴) 5 (سراسری تجربی ۸۹)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} a+\sin 3x=a-1 \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} b\cos 3x=-b \quad , \quad f(\frac{\pi}{2})=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=2 \Rightarrow a=3 \\ -b=2 \Rightarrow b=-2 \end{cases} \Rightarrow a-b=5$$

۱۰- به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & , x\neq 1 \\ a & , x=1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

(سراسری ریاضی خارج کشور ۸۸)

۱) $-\pi$ ۲) π ۳) 1 ۴) هیچ مقدار a

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x}$$ می‌گیریم $x-1=t \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ t\to 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+\pi t)}{-t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin \pi t}{-t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{t}=\pi \quad , \quad f(1)=a \Rightarrow a=\pi$$