

فصل دوم: تابع

درس اول: مفهوم تابع

در محیط اطراف ما پدیده هایی وجود دارد که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد. به عنوان مثال طول فنر تابعی است از وزنه ای که به فنر آویزان می کنیم. بطوری که با تغییر وزنه آویزان شده، طول فنر نیز تغییر می کند.

مثال ۱: می دانیم مساحت دایره از رابطه ی $S = 4\pi r^2$ بدست می آید.

در اینجا با تغییر شعاع (r) مساحت نیز تغییر می کند.

سوال:

۱- کدام متغیر مستقل و کدام متغیر وابسته است؟

۲- آیا محیط دایره نیز به شعاع وابسته است؟

رابطه خطی $y = 3x + 1$ را در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید:

x	-۱	۲	$y = 3x + 1$
y	-۲	$3\sqrt{2} + 1$...	
(x, y)	$(-1, -2)$	$(..., 1)$	$(\frac{2}{3}, 3)$	$(1, ...)$	$(..., ...)$	$(..., ...)$	

در این رابطه y تابعی از تغییرات متغیر مستقل x است. یعنی وقتی x را به دلخواه و مستقل تغییر می دهیم y نیز تغییر می کند.

اگر x ها را روی محور افقی و y ها را روی محور عمودی در نظر بگیریم، به ازای هر x و y یک نقطه در صفحه مشخص می شود که آنرا بصورت زوج مرتب (x, y) نمایش می دهیم.

در اینجا ترتیب قرار گرفتن x و y اهمیت دارد. به x مولفه اول و به y مولفه دوم گوییم.

نکته: دو زوج مرتب زمانی با هم مساویند که مولفه های اولشان با هم و مولفه های دومشان نیز با هم مساوی

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad \text{باشند یعنی:}$$

مثال ۲: مقادیر x و y را چنان بیابید که دو زوج مرتب $(3, x - y)$ و $(x, 1)$ با هم مساوی باشند.

مثال ۳: اگر دو زوج مرتب $(4, x - y)$ و $(2, x + y)$ با هم مساوی باشند x و y را بدست آورید.

مثال ۴: در هر قسمت مجهولات را به گونه ای حساب کنید که دو زوج مرتب مساوی باشند.

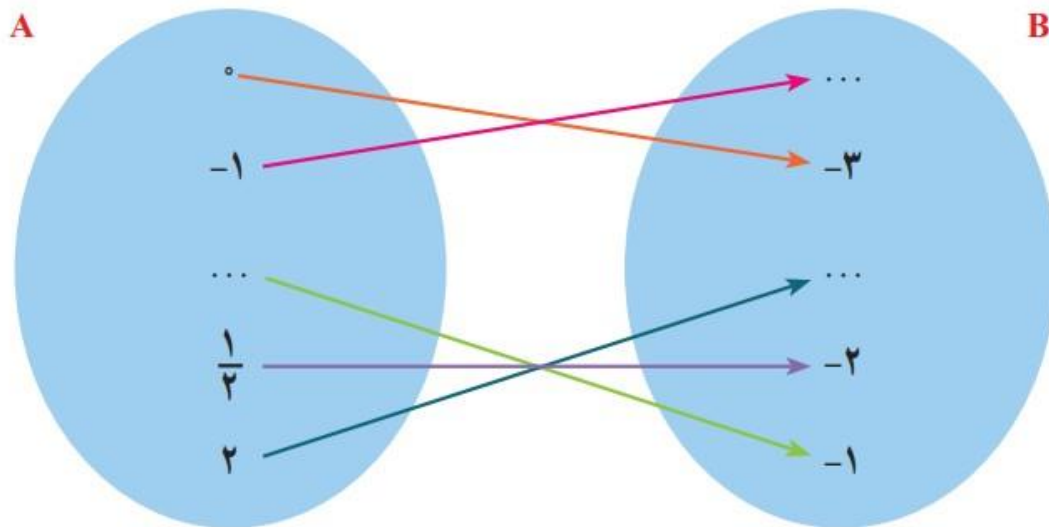
الف) $(3, x - 1)$ و $(5, 2y - 1)$

ب) $(b + 7, \frac{2a - b}{4})$ و $(a - 7, a + b)$

کاردرکلاس:

با توجه به رابطه $y = 2x - 3$ اگر متغیرهای مستقل یعنی x ها، اعضای مجموعه $A = \{0, 1, -1, \frac{1}{2}\}$ باشند، ابتدا جدول را کامل و سپس نمودار پیکانی را تکمیل کنید.

x	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲	$y = 2x - 3$
y	-۵	
(x, y)	$(-1, -5)$ C	$(0, ...)$ D	... E	... F	... G	



نمودار مختصاتی رابطه‌ی خطی قبلی به چه صورت است؟

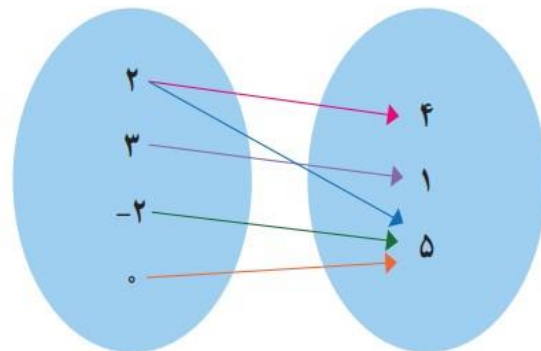
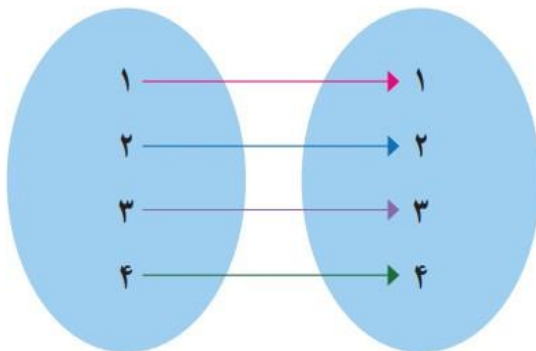
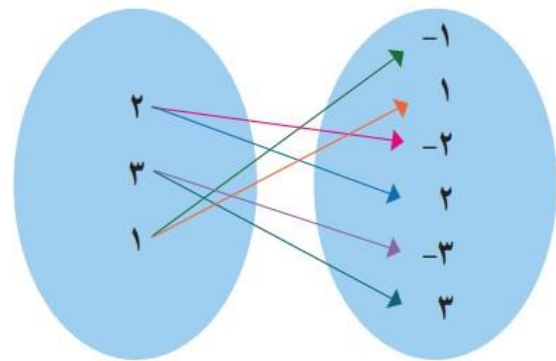
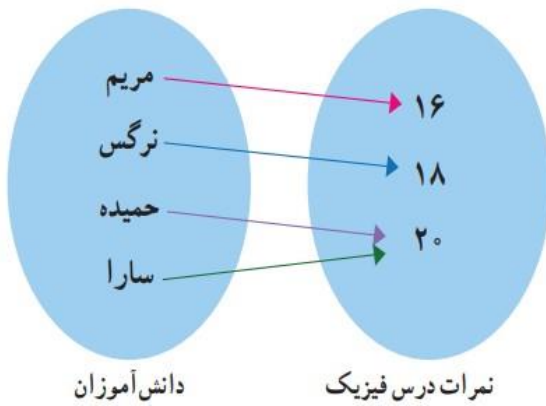
مثال ۵: برای رابطه $y = x^2$ که در آن $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ است، جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

تعریف تابع:

یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به مجموعه B) یک تابع نامیده می‌شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

فعالیت:

۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟



۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(۲,۳), (۳,۳), (۴,۳), (۵,۳)\}$

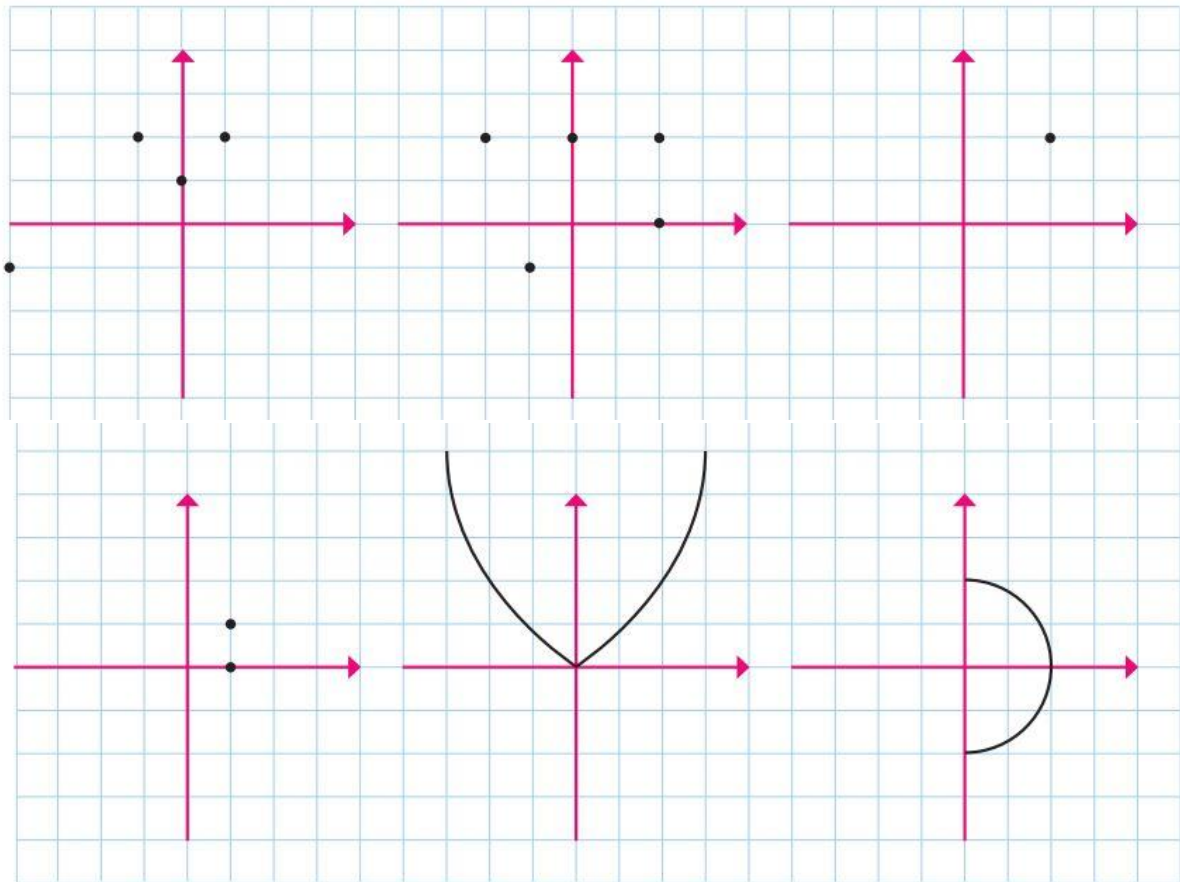
ب) $G = \{(۴,۱), (۲,-۱), (۱,-۱), (۴,۲)\}$

پ) $H = \{(۲,۳)\}$

ت) $I = \{(۳,۳)\}$

ث) $J = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۲,۴)\}$

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع اند؟ چرا؟



۴. کدامیک از رابطه‌های تعریف شده زیر یک تابع هست؟ کدامیک نیست؟ دلیل بیاورید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران سوغاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد روز تولد او را نسبت می‌دهد.

ج) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

د) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

نکته: با توجه به فعالیت و تعریف تابع می توان گفت:

- اگر رابطه بین X و Y را بصورت زوج مرتبی و جدولی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که:
- اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را بصورت پیکانی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که:
- اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که:

مثال ۶: در رابطه ی زیر، جای خالی را طوری پر کنید که f یک تابع باشد.

$$f = \left\{ (4, 8), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 3 \right), (\sqrt{16}, \square), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \square \right) \right\}$$

مثال ۷: در رابطه ی زیر، جای خالی را طوری پر کنید که f تابع نباشد.

$$f = \left\{ \left(2, \frac{3}{7} \right), (5, 8), (\square, 10), (\sqrt{25}, 2^3) \right\}$$

مثال ۸: اگر مجموعه ی $f = \{(1, 2a - 5), (1, 1 - a), (5, 6)\}$ یک تابع باشد، a را بیابید.

مثال ۹: اگر $f = \{(2, 1), (a, 30), (-1, a^2 - 1), (-1, 3)\}$ یک تابع باشد، a را بیابید.

کار در کلاس: جدول زیر را کامل کرده و مشخص کنید کدام رابطه یک تابع است.

نمایش پیکانی	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی										
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۱</td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td>۴</td> </tr> <tr> <td>۳</td> <td>۹</td> </tr> <tr> <td>۴</td> <td>۱۶</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	۱	۱	۲	۴	۳	۹	۴	۱۶
x	y													
۱	۱													
۲	۴													
۳	۹													
۴	۱۶													
			<p>f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{-2, -1, 1, 2, 0\}$ توان چهارم آن را نسبت می‌دهد</p>											
		<p>$f = \{(\text{نسنا, علی}) \text{ و } (\text{فوتبال, رضا}), (\text{نسنا, رضا}) \text{ و } (\text{والیبال, آرش}) \text{ و } (\text{گشتی, حمید}) \text{ و } (\text{تیراندازی, علی})\}$</p>												

مثال ۱۰: نمودار تابع $f = \{(3, 2), (-2, a + 1), (-a, b), (-2, 3)\}$ شامل چند نقطه است؟

مثال ۱۱: تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $f = \{(2, 5), (-3, 4), (1, 5), (2, 6)\}$

ب) $f = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), (2, 8), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right) \right\}$

X	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	$\sqrt{100}$
Y	۵	۶	۷	۸	۹

X	۰	۱	۲	۳	۴
Y	۲	۲	۲	۲	۲

ت)

ث) رابطه ای که به هر فرد ایرانی کد ملی اش را نسبت می دهد.

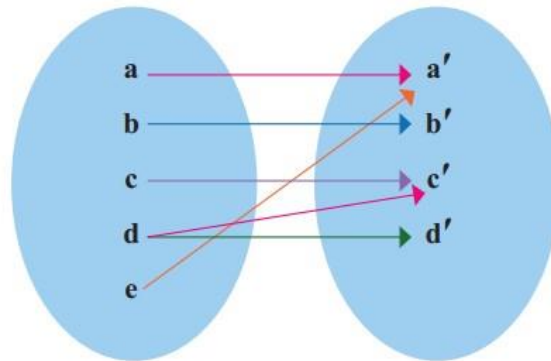
ج) رابطه ای که به هر عدد طبیعی مقسوم علیه های طبیعی اش را نسبت می دهد.

چ) رابطه ای که به هر چند ضلعی مساحتش را نسبت می دهد.

تمرین



۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟

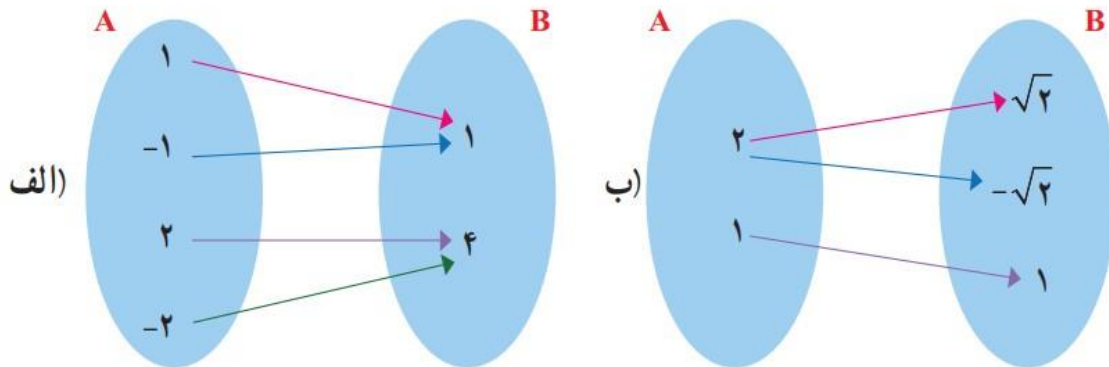


۲. اگر A مجموعه ای ۳ عضوی و B مجموعه ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.

۳. در رابطه زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



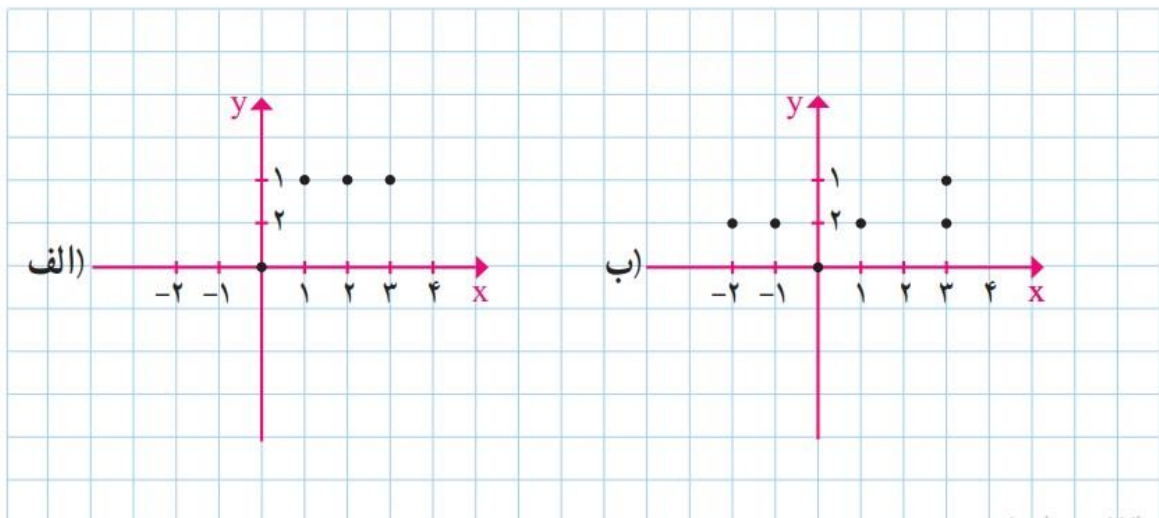
پ) $f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$

ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می‌دهد.

۵. اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل $x^2 + y^2$ را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید.)

$$f = \{(2, x + y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x - y)\}$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟

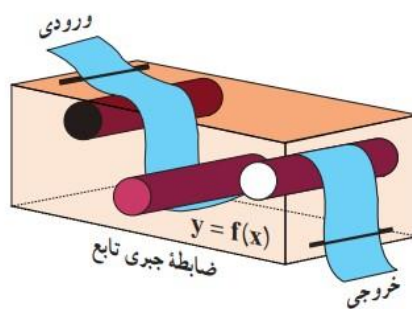


درس دوم: ضابطه‌ی جبری تابع

گاهی اوقات می‌توانیم رابطه‌ی بین مولفه‌ی اول و دوم زوج‌های مرتب یک تابع را با یک ضابطه (قانون) بیان کنیم.

به عنوان مثال در تابع $f = \{(2, 6), (-3, 1), (1, 5), (3, 7)\}$ با اضافه کردن ۴ واحد به مولفه‌ی اول، مولفه‌ی دوم بدست می‌آید.

یعنی اگر $(x, y) \in f$ در اینصورت $y = x + 4$ ، معادله‌ی $y = x + 4$ را ضابطه‌ی تابع نامیم.



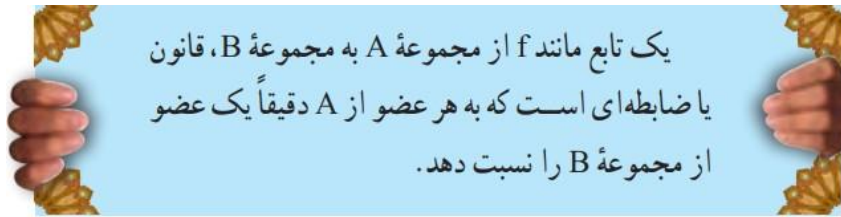
تاثیر تابع f روی x را بصورت $f(x)$ نمایش داده و حاصل این تاثیر همان متغیر وابسته است.

یعنی: $y = f(x)$

نکته: در نمایش تابع بصورت زوج‌های مرتب، مجموعه‌ی همهی مولفه‌های اول را دامنه تابع (D_f) و مجموعه‌ی همهی مولفه‌های دوم را برد تابع (R_f) می‌نامیم.

مثال ۱: در تابع $f = \{(2, 6), (-3, 1), (1, 5), (3, 7)\}$ دامنه و برد را مشخص کنید.

مثال ۲: اگر تابع f بصورت $f = \{(1, 2), (a, 5), (1, 2a - 3)\}$ باشد، دامنه تابع را مشخص کنید.



برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می‌نویسیم: $\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$

که در آن $y = f(x)$ ضابطه‌ی تابع و A دامنه‌ی تابع است.

فعالیت: با توجه به ضابطه‌ی هر تابع و دامنه داده شده، مجموعه‌ی مقادیر (برد) را بدست آورید.

$$A = \left\{ -1, \sqrt{2}, 2, 0, 1, \frac{1}{2} \right\} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f : A \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x^2 + 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$A = \left\{ 1, 0, -1, 4, \sqrt[3]{3}, 2, \frac{1}{3} \right\} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = x^3 - 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$A = \{ 0, -1, 8, 3, 2 \} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \end{cases} \quad (\text{پ})$$

$$A = \left\{ 1, 0, -1, 4, \sqrt[3]{3}, 2, \frac{1}{3} \right\} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = x^3 - 1 \end{cases} \quad (\text{ت})$$

$$A = \left\{ -2, 0, 1, \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right\} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x-2} \end{cases} \quad (\text{ث})$$

مثال ۳: از مجموعه‌ی $A = \{5, 6, 7\}$ به مجموعه‌ی $B = \{10, 20\}$ تابعی بنویسید که:

الف) بردش تک عضوی باشد. ب) بردش دو عضوی باشد.

مثال ۴: برای تابع $\begin{cases} f : D_f \rightarrow R_f \\ f(x) = 4x + 1 \end{cases}$ جاهای خالی را پر کنید.

$$R_f = \{ \dots, \dots, \dots, 21, 41 \} \quad D_f = \{ 1, 2, 3, \dots, \dots \}$$

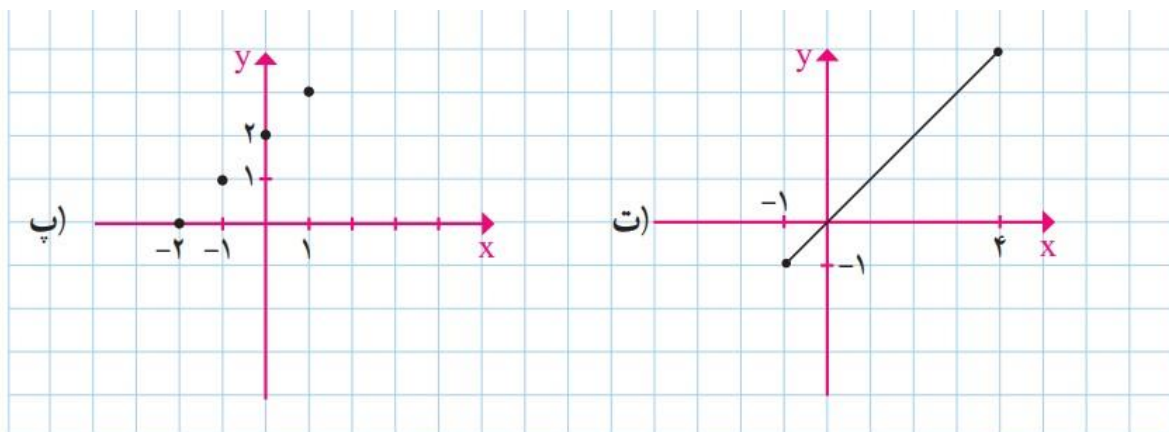
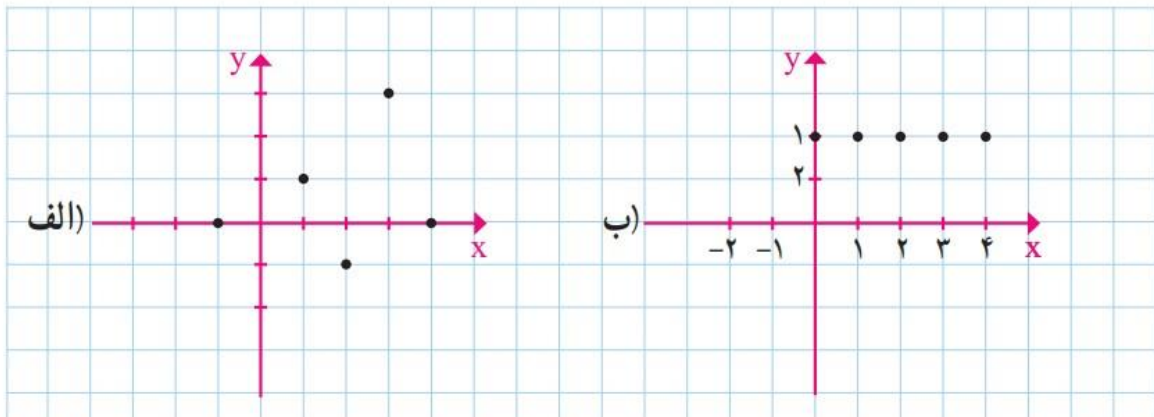
مثال ۵: اگر رابطه‌ی f تابع باشد ابتدا مقادیر x و y را بدست آورده و سپس دامنه و برد را مشخص کنید.

$$f = \{ (3, x - 3y), (1, 2), (3, 4), (1, x + y), (10, 12) \}$$



کار در کلاس

۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و بُرد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.



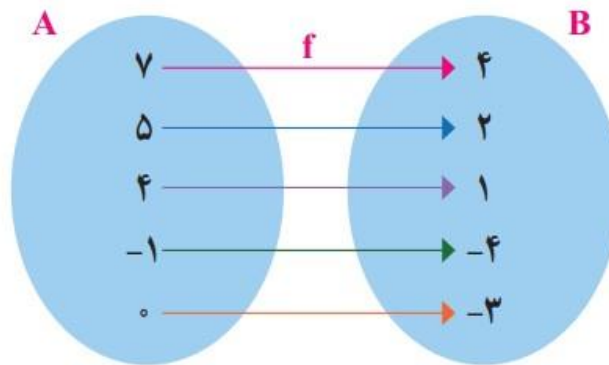
۲. دامنه و برد هریک از تابع‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $f: A \rightarrow B$ $R = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

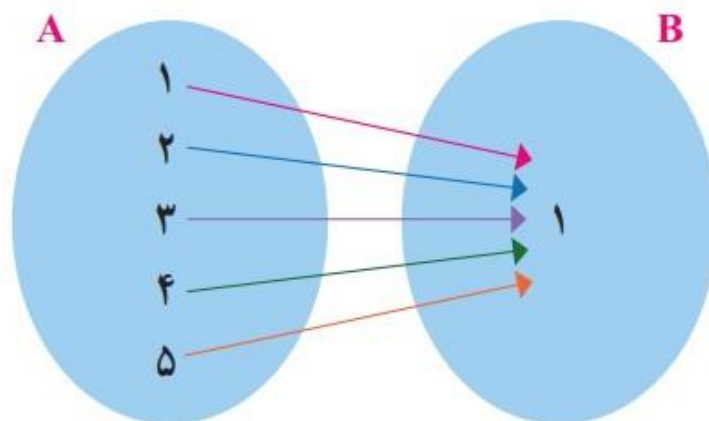
$f(x) = x + 4$ $A = \{2, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

پ)



ت)



ث) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0)\}$

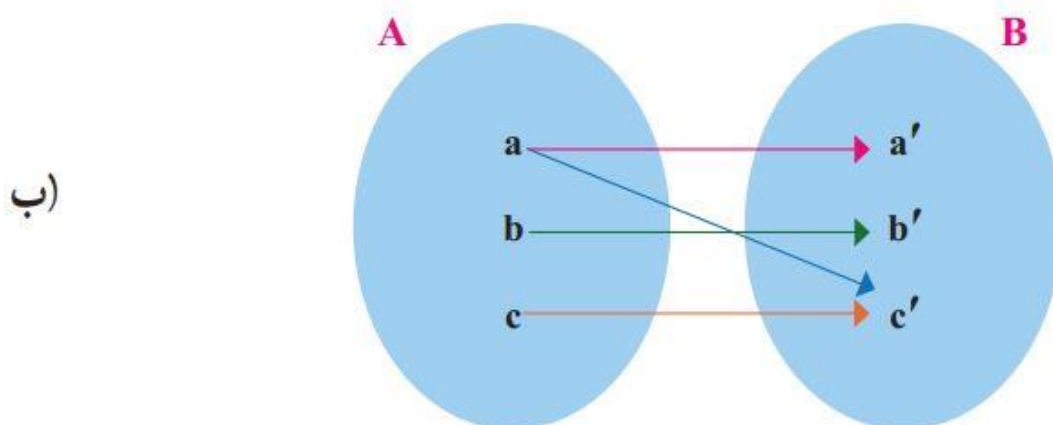
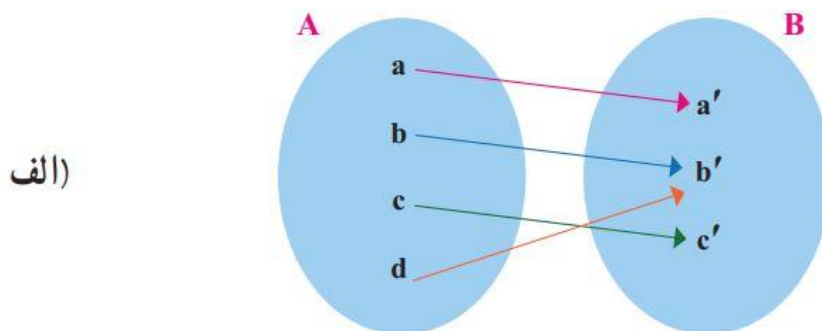
نکته مهم:

۱. در نمایش پیکانی، مجموعه‌ی آغاز (A) دامنه و اعضای از مجموعه‌ی (B) که به آنها پیکان وارد می‌شود برد تابع را تشکیل می‌دهند.
۲. در نمایش مختصاتی، سایه نمودار (تصویر نمودار) روی محور افقی، دامنه و سایه آن روی محور عمودی برد تابع را معلوم می‌کند.



تمرین

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



$$\text{پ) } f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$$

$$\text{ت) } g = \{(1, 1)\}$$

$$\text{ث) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$\text{ج) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

$$\text{ح) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2$$

۲. بُرد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

$$\text{الف) } f: A \rightarrow B, A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$$

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$\text{ب) } f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad A = \left\{ \frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2 \right\}$$

$$\text{پ) } f: A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+1}, \quad A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$$

$$\text{ت) } f: A \rightarrow B \\ f(x) = x, \quad A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\text{ث) } f: A \rightarrow B \\ f(x) = 0, \quad A = \mathbb{R}$$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $f(3)$ را بیابید.

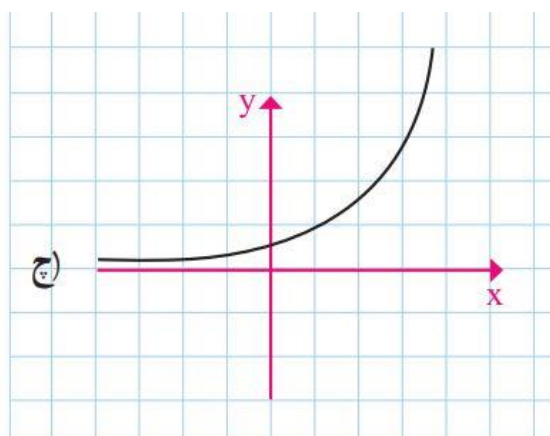
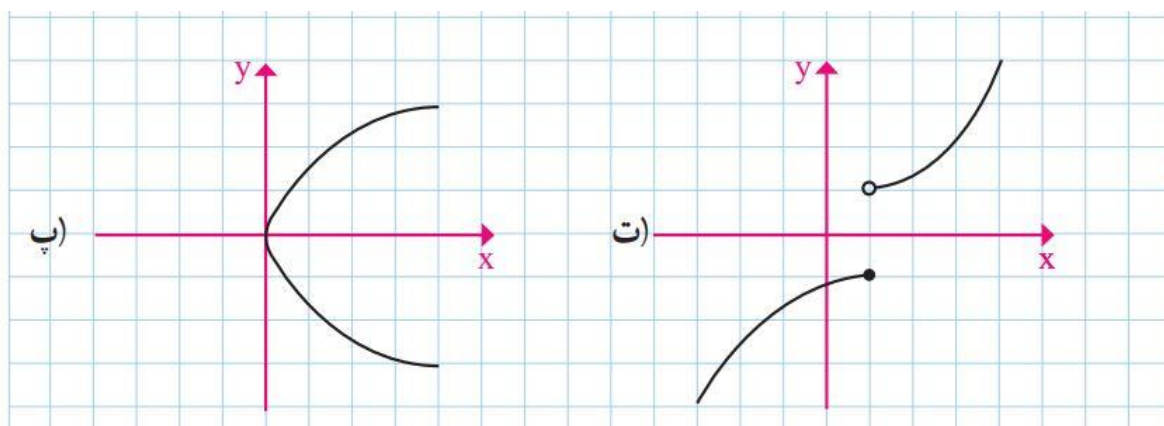
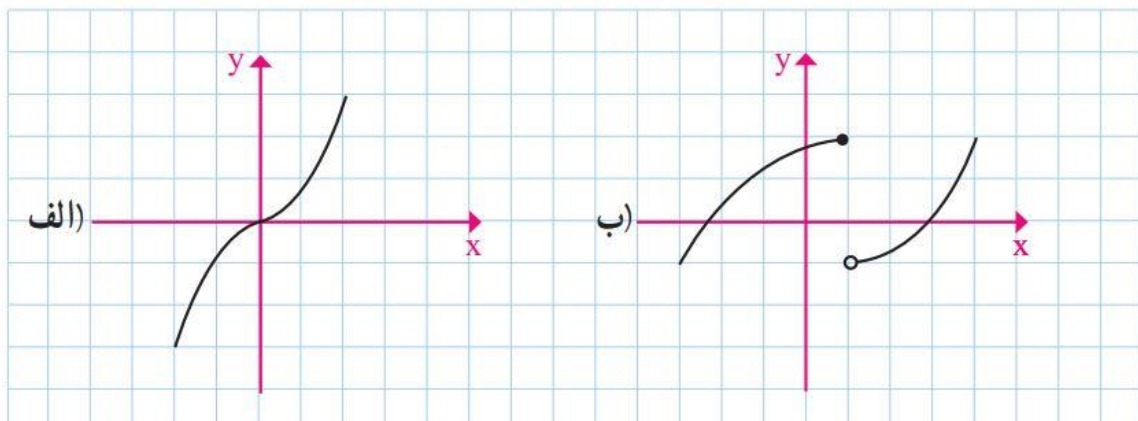
$$\text{الف) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2(x-4)^3$$

$$\text{ب) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2\sqrt[3]{x-4}$$

$$\text{پ) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x^3 - 4$$

$$\text{ت) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2\sqrt{x-4}$$

۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می باشد؟ چرا؟



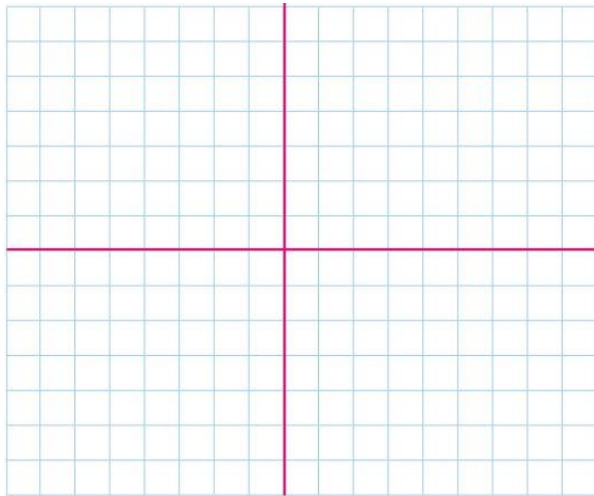
درس سوم: نمودار تابع خطی

هر تابع به صورت $y=f(x)$ که در آن $y=mx+h$ ، یک تابع خطی نامیده می شود.

در حالت کلی دامنه و برد تابع خطی مجموعه‌ی اعداد حقیقی \mathbb{R} می باشد.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = mx + h$ دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص و سپس آن دو را به هم وصل می کنیم.

کار در کلاس: در یک تابع خطی $f(0) = 2$ و $f(2) = 3$ است، ابتدا m و سپس $f(x)$ را پیدا کنید و نمودار تابع را رسم کنید.



مثال ۱: مقادیر m و n را به گونه ای بیابید که در تابع $f(x) = mx + n$ روابط $f(1) = 3$ و $f(-2) = 4$ برقرار باشند.



کار در کلاس

جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی بر حسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به ۴۴۰ درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$: شیب خط	$y=f(x)=mx+h$: معادله خط یا ضابطه تابع	$f(۱)$	$f(۲)$



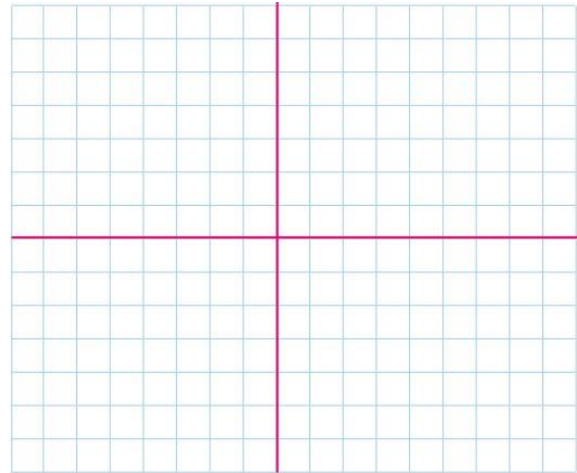
کار در کلاس

ضابطه تابع محیط مستطیل‌هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.
- آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟



کار در کلاس

اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1) = 2$ باشد، نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.



مثال ۲: تابع خطی f از مبدأ گذشته و در آن $f(2) = 3$ است. مقدار $f(6)$ چند است؟

مثال ۳: f تابعی خطی است که از نقطه $A = (2, 3)$ می‌گذرد. اگر این تابع محور عرض‌ها را در نقطه 2 -قطع کند، ضابطه $f(x)$ را بیابید.

مثال ۳: اگر خط $3x + 5y = 2$ از نقطه $(2a - 1, 3)$ بگذرد، مقدار a را بیابید.

مثال ۴: نمودار تابع خطی f از مبدا می‌گذرد و $f(3) = -5$ است. مقدار $f(0/1) - f(-0/1)$ را بیابید.



تمرین

۱. مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(2) = 4$ و $f(1) = 1$.

۲. ضابطه تابع خطی f را که از نقاط $(2, 3)$ و $(4, 1)$ می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳. در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(2) = 8$ ، مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ و از نقطه $A \left| \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right.$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(0/1)$ و $f(-0/1)$ را به دست آورید.

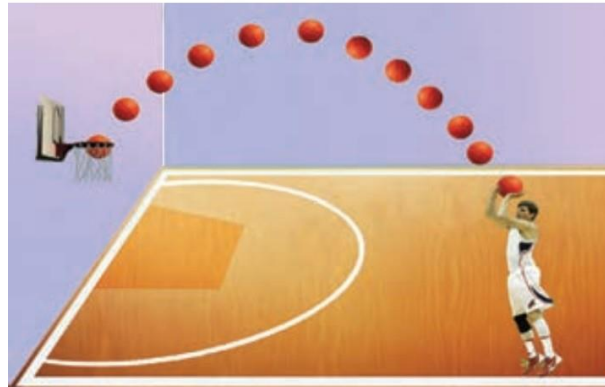
۶. رابطه بین درجه دما بر حسب سانتی گراد و فارانهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20 درجه سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن بر حسب فارانهایت چقدر افزایش داشته است؟

۷. یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را 70 تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲



فعالیت

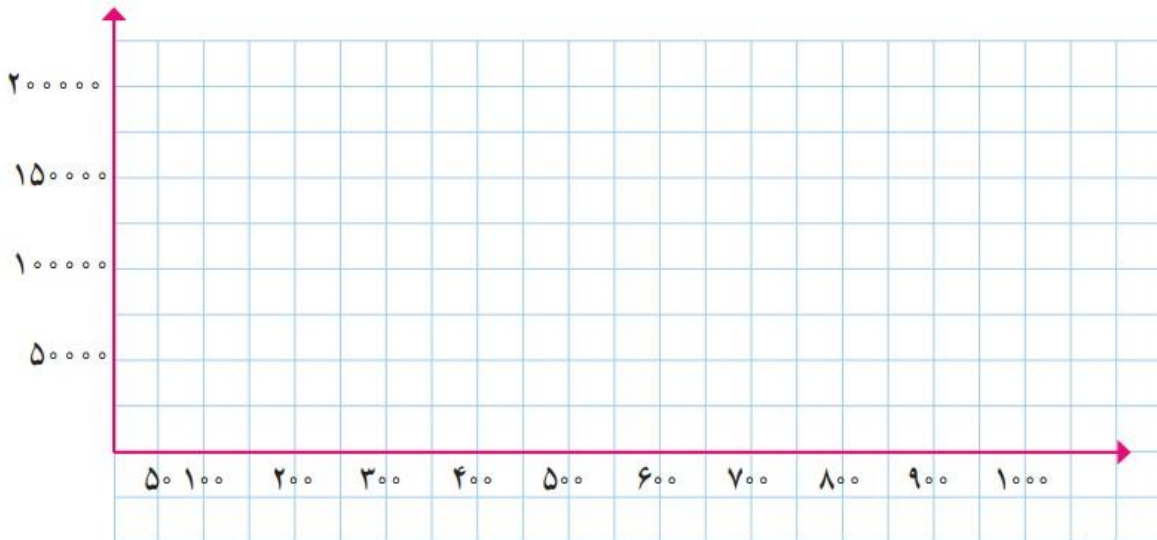


یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $x - 1200$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب مترمربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه 30000 تومان و همچنین مترمربعی 200 تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر مترمربع رنگ آمیزی به ازای $x = 200$ (متر کار در یک روز) و $x = 300$ چقدر است؟

ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x = 200$ و $x = 300$ چقدر است؟

ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



چ) چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هرچه متر از بیشتری رنگ آمیزی شود، گروه سود بیشتری کسب می کند؟

رسم تابع درجه دوم:

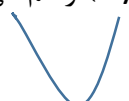
* معادله ی تابع درجه دوم در حالت کلی بصورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ است.

* نمودار آن به یکی از دو صورت  یا  است که به آن سهمی می گوئیم.

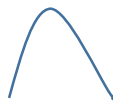
* در سهمی به معادله ی $y = ax^2 + bx + c$ ، نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ راس سهمی است.

* برای پیدا کردن عرض راس کفایت طول بدست آمده در مرحله قبل را در معادله ی $y = ax^2 + bx + c$ به جای x قرار دهیم تا مقدار y بدست آید.

* خطی که از راس سهمی به موازات محور عرض ها (محور y ها) رسم می شود، محور تقارن سهمی است.

* اگر در معادله ی سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی بصورت  خواهد بود.

در این حالت سهمی در نقطه راس خود دارای کمترین مقدار (مینیمم) خواهد بود.

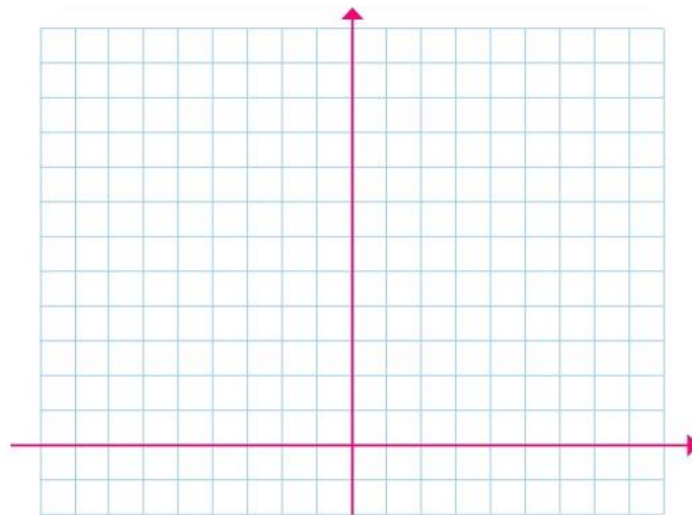
*اگر در معادله‌ی سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی بصورت  خواهد بود.
در این حالت سهمی در نقطه راس خود دارای بیشترین مقدار (ماکسیمم) خواهد بود.

فعالیت



ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...		9			0					...

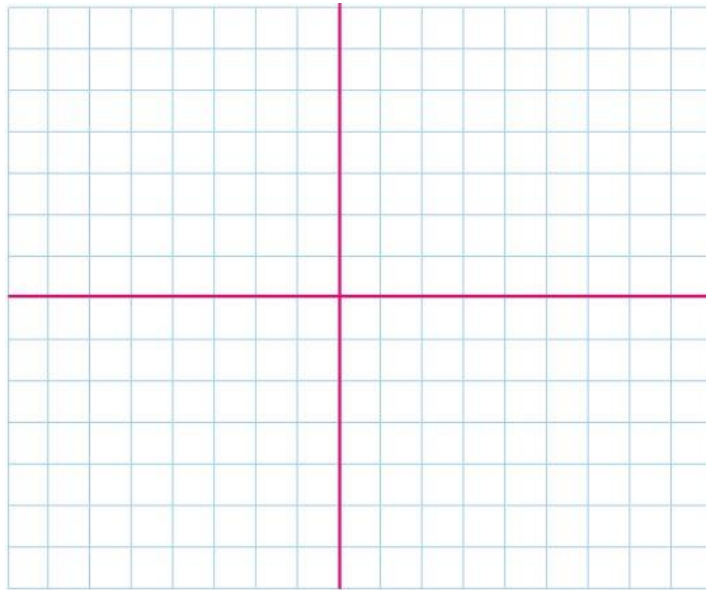


کار در کلاس



جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	3	4	...
y	...		9			0				...



کار در کلاس

نقاط رأس سهمی‌هایی را که معادله‌های آنها داده شده است، مشخص کنید.

الف) $y = x^2$

ب) $y = 4 - x^2$

پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$

ت) $y = 2(x-1)^2 + 1$

مثال ۱: بیشترین مقدار تابع $y = -x^2 + 8x - 5$ را به دست آورید.

مثال ۲: اگر خط $x = \frac{5}{3}$ محور تقارن سهمی $y = (k - 3)x^2 - 1 \cdot kx + 1$ باشد، مقدار k را بدست آورید.

مثال ۳: نمودار سهمی $y = 5x^2 - 12x + 6$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

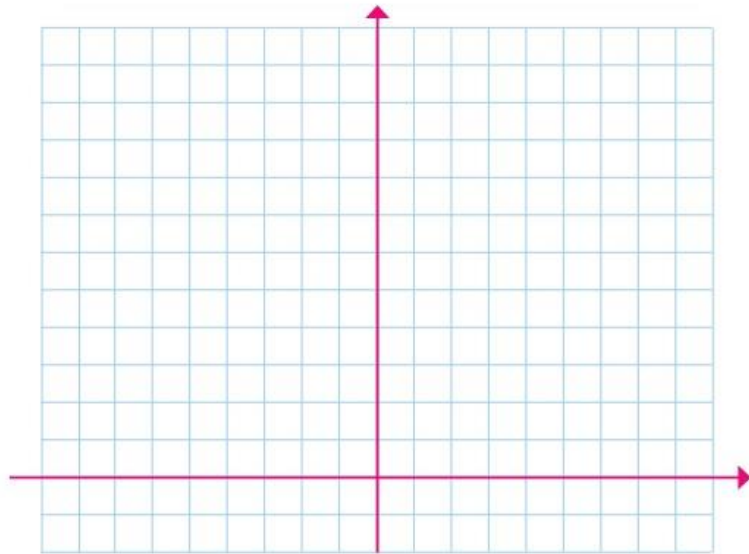
مثال ۴: نمودار سهمی $y = x^2 - 7x - 8$ محور طول ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

مثال ۵: اگر طول راس سهمی $y = -mx^2 + 6x + m - 1$ برابر ۲ باشد، بیشترین مقدار تابع را بدست آورید.



کار در کلاس

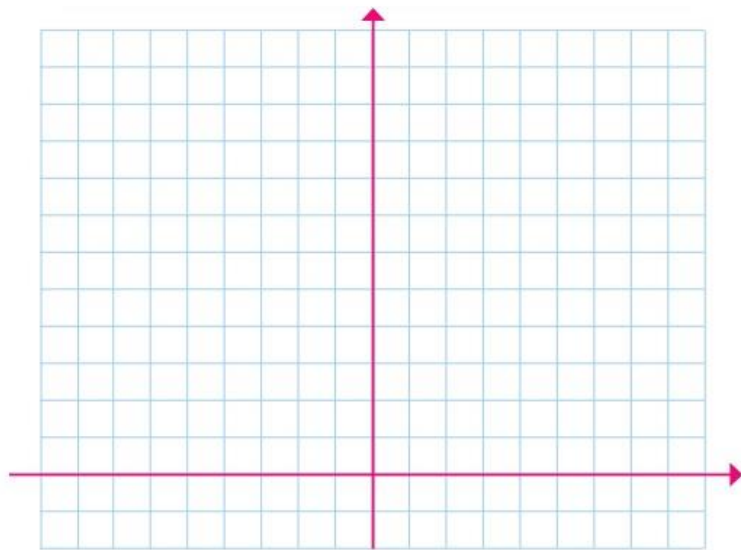
الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.





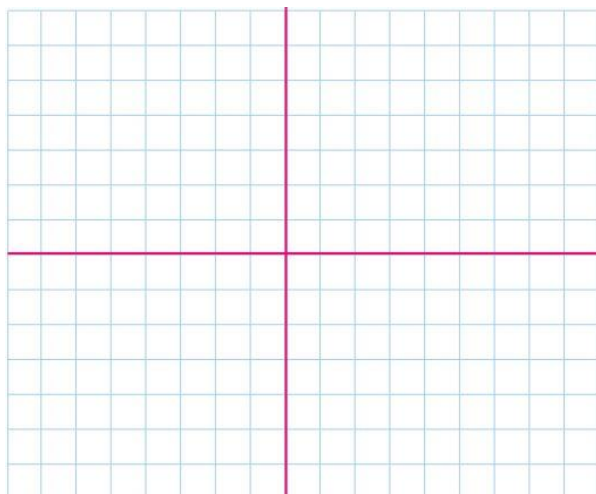
کار در کلاس

الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.



ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.

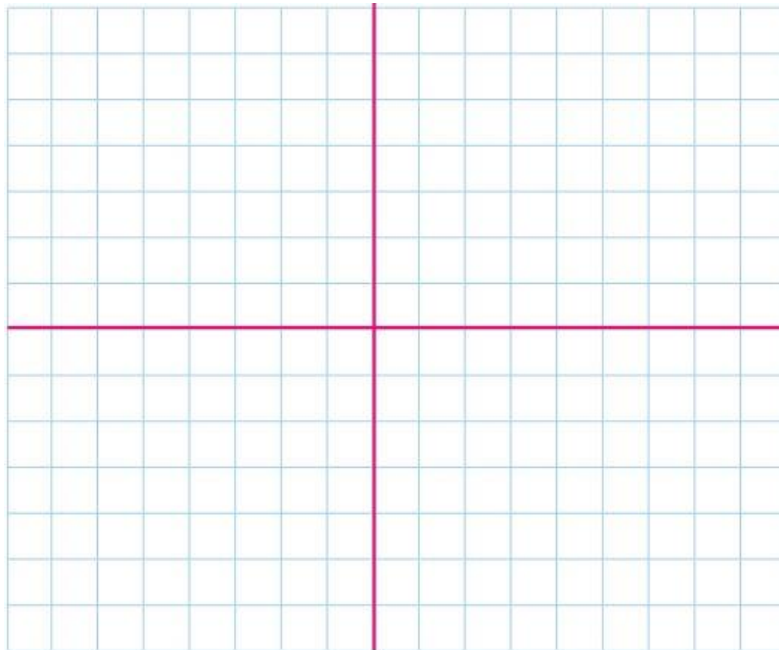
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...				0				...



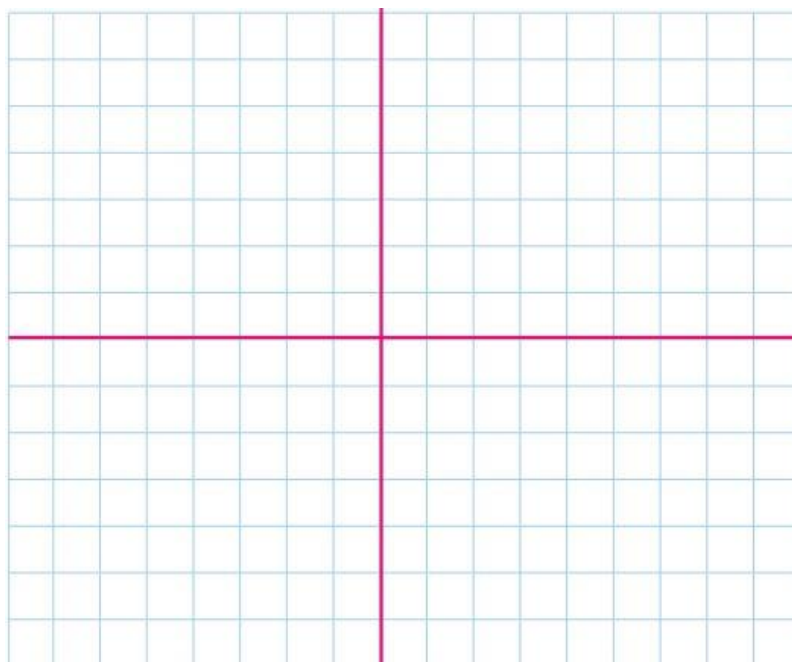


کار در کلاس

۱. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 1$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



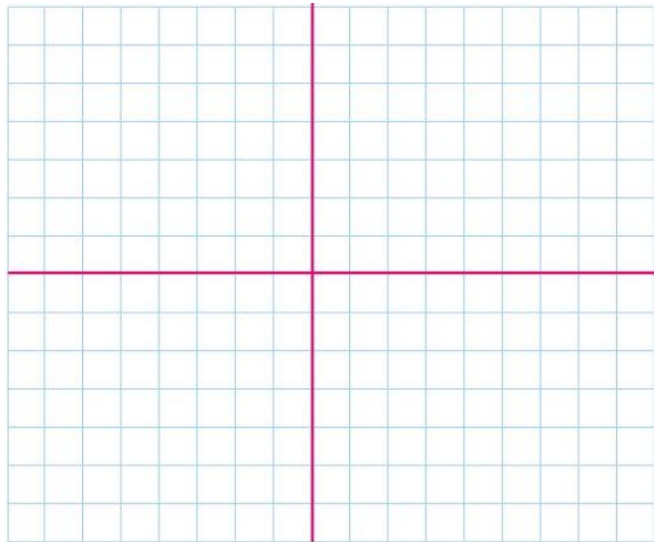
۲. نمودار توابع $y = -x^2 + 6x - 1$ و $y = x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو خم را مشخص کنید.





تمرین

۱. نمودار سهمی‌های به معادله‌های $y=x^2-2x$ و $y=-(x-1)^2+1$ و $y=x^2+4x+1$ را رسم کنید.



۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.

۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می‌شود.

۴. اگر $2x+a=100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y=xa$ ماکسیمم شود.

۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هریک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

مثال ۶: نمودار توابع درجه دوم زیر را رسم کنید.

$$y = -2(x - 1)^2 + 3 \text{ (ب)}$$

$$y = 2x^2 - 4x + 1 \text{ (الف)}$$

مثال ۷: نمودارهای دو تابع $y = x^2 - 3x$ و $y = x^2 + 7x + 1$ در چه نقطه یا نقاطی با هم تلاقی دارند؟

مثال ۸: نمودار سهمی $y = x^2 - 5x + 6$ و خط $y = 3x + 6$ در چه نقطه یا نقاطی با هم تلاقی دارند؟

مثال ۹: اگر بین x و y رابطه‌ی $2x + y = 60$ برقرار باشد، ماکسیمم حاصل ضرب x و y را به دست آورید.

مثال ۱۰: اگر $4x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که عبارت $y = xa$ ماکسیمم شود. سپس بیشترین مقدار آن را بیابید.

مثال ۱۱: در مستطیل هایی با محیط ۸۰ متر، بیشترین مقدار مساحت چقدر است؟

مثال ۱۲: اگر تابع درآمد شرکتی بصورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 28x$ و تابع هزینه بصورت $y = 18x + 20$ باشد، ماکسیمم مقدار سود شرکت را بدست آورید.

مثال ۱۳: اگر معادله تقاضای کالایی بصورت $x = 200 - 4p$ و تابع هزینه بصورت $C(x) = 400 + 10x$ باشد، سود ماکسیمم شرکت را بدست آورید. (X تعداد کالاها و p قیمت فروش هر واحد کالا است.)

مثال ۱۴: در یک کارخانه تولید لامپ، قیمت فروش هر لامپ ۴۰۰ تومان است. اگر هر روز، X لامپ تولید شود و تابع هزینه بصورت $C(x) = x^2 + 20 \cdot x + 300$ باشد:

الف) تابع سود روزانه این کارخانه را بنویسید.

ب) چند لامپ باید در روز تولید شود تا کارخانه بیشترین سود را داشته باشد؟

ج) بیشترین سود روزانه این کارخانه چقدر است؟