

# فصل هفتم

## توان و جذر

[Hasan.roshangar@gmail.com](mailto:Hasan.roshangar@gmail.com)

### نکته های مهم توان:

۱) اگر یک عدد چند بار در خودش ضرب شود برای سادگی در نوشتن در محاسبات ریاضی آن را به صورت عدد تواندار می نویسیم. برای مثال

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5} = 2^5 \quad \text{و} \quad \text{عدد } 2^5 \text{ را می خوانیم } 2 \text{ به توان } 5 \text{ ( عدد } 2 \text{ را پایه و عدد } 5 \text{ را توان یا نما می گویند)}$$

پس با توجه به نکته بالا حاصل عددی عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$3^2 = \quad (-2)^3 = \quad 5^3 = \quad \left(\frac{2}{7}\right)^2 =$$

۲) برای به توان رساندن اعداد منفی و کسری باید از پرانتز استفاده کنیم. در مثال های زیر اهمیت استفاده از پرانتز در محاسبه اعداد تواندار مشخص می شود.

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16 \\ -2^4 &= -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \\ \frac{3^2}{4} &= \frac{3 \times 3}{4} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

۳) هر عدد یا عبارتی که توان نداشته باشد توان آن یک است. یا به عبارتی عددی که توان آن یک باشد برابر با همان عدد است.

$$a^1 = a$$

$$5^1 = 5$$

۴) عدد یک به هر توانی برسد برابر با همان یک است.

$$1^{1000} = 1$$

۵) صفر به توان هر عدد (مخالف صفر) برسد برابر با صفر است.

$$0^{500} = 0$$

(۶) هر عدد ( مخالف صفر) به توان صفر برابر با یک است.  $a^0 = 1$   $5^0 = 1$

(۷) اگر عدد منفی داخل پرانتز باشد و به توان عددی زوج برسد حاصل مثبت می شود و اگر به توان عددی فرد برسد حاصل منفی می شود. برای مثال:

$$(-2)^4 = 16$$

$$(-2)^3 = -8$$

(۸) به توان دوم هر عدد مجذور یا مربع آن عدد می گویند.

$$5^2 = 25$$

برای مثال: مجذور عدد ۵ برابر است با

(۹) به توان سوم هر عدد مکعب آن عدد می گویند.

$$(-2)^3 = -8$$

برای مثال: مکعب عدد -۲ برابر است با

(۱۰) در ضرب اعداد تواندار اگر

(الف) پایه ها مساوی باشند یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

الگوی کلی

برای مثال:

$$7^2 \times 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$$

(ب) پایه ها مساوی نباشند اما توان ها برابر باشند، پایه ها را در هم ضرب می کنیم و یکی از توان ها را می نویسیم.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

الگوی کلی

برای مثال:

$$5^2 \times 6^2 = (5 \times 6)^2 = 30^2$$

(۱۱) اگر عدد توانداری داخل پرانتز باشد و دوباره به توان برسد، پایه را می نویسیم و توان ها را در هم ضرب می کنیم. برای

مثال:

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$$

اما باید بدانیم اگر پرانتز نباشد در واقع توان را به توان می رسانیم

$$5^{2^3} = 5^8 \quad \text{زیرا} \quad 2^3 = 8$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

الگوی کلی

(۱۲) در تقسیم اعداد تواندار اگر

الف) پایه ها مساوی باشند یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم. (تذکر: خط کسری به معنای تقسیم است).

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$8^5 \div 8^2 = 8^{5-2} = 8^3$$

ب) پایه ها مساوی نباشند اما توان ها برابر باشند، پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم و یکی از توان ها را می نویسیم. برای مثال

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$10^3 \div 2^3 = (10 \div 2)^3 = 5^3$$

$$3^6 \div 7^6 = (3 \div 7)^6 = \left(\frac{3}{7}\right)^6$$

(۱۳) اولویت عملیات ریاضی به ترتیب به صورت زیر است:

۱- عملیات داخل پرانتز ( و اگر داخل پرانتز، پرانتز دیگری باشد اولویت با داخلی ترین پرانتز می باشد)

۲- توان و جذر

۳- ضرب و تقسیم ( البته از سمت چپ هر کدام جلوتر نوشته شده باشد آن را انجام می دهیم)

۴- جمع یا تفریق

مثال) حاصل هر عبارت را بدست آورید.

$$4 + 3^2 - (5^2 - 24)^{10} = 4 + 9 - (25 - 24)^{10} = 4 + 9 - 1^{10} = 4 + 9 - 1 = 1$$

$$2 - 2 \times 4^2 \div 2^3 = 2 - \underbrace{2 \times 16}_{32} \div 8 = 2 - \underbrace{32 \div 8}_4 = 2 - 4 = -2$$

## نکته های مهم جذر و ریشه گیری

(۱) برای یادگیری مفهوم ریشه ی دوم با یک مثال شروع می کنیم. داریم

$$3^2 = 9 \quad \text{و} \quad (-3)^2 = 9$$

بنابراین همانطور که قبلا گفته شد ۹ مجذور (مربع) اعداد ۳ و -۳ -

می باشد. و می گوئیم ۳ و -۳ ، ریشه های دوم عدد ۹ هستند.

(۲) هر عدد مثبت دو ریشه دوم دارد. (یکی مثبت و دیگری منفی است)

به طور مثال: ۵ و -۵ ریشه های دوم عدد ۲۵ هستند.

(۳) اعداد منفی ریشه دوم ندارند. چون مجذور هیچ عددی، منفی نمی شود.

(۴) جذر گرفتن عکس عمل مجذور می باشد ( یعنی توان دوم عدد را پس بگیریم) علامت جذر را رادیکال می گوئیم و به

صورت  $\sqrt{\quad}$  نشان می دهیم پس داریم: ریشه های دوم عدد ۹ را با  $\sqrt{9}$  و  $-\sqrt{9}$  نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sqrt{9} = 3 \quad -\sqrt{9} = -3$$

برای مثال : ریشه های دوم عدد ۶ برابر است با  $\sqrt{6}$  و  $-\sqrt{6}$  ( عدد ۶ جذر دقیق ندارد) و به مقدار عددی  $\sqrt{6}$

جذر عدد ۶ می گویند. یعنی به عبارتی عددی که در خودش ضرب شود و حاصل ۶ شود.

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \quad \text{جذر ۱۶} \implies$$

مثال:

پس داریم:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{0} = 0 & \sqrt{1} = 1 & \sqrt{4} = 2 & \sqrt{9} = 3 & \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{25} = 5 & \sqrt{36} = 6 & \sqrt{49} = 7 & \sqrt{64} = 8 & \sqrt{81} = 9 \\ \sqrt{100} = 10 & \sqrt{121} = 11 & \sqrt{144} = 12 & \sqrt{169} = 13 & \sqrt{196} = 14 \end{array}$$

(۵) بعضی اعداد جذر دقیق ندارند باید و جذر آنها را به صورت تقریبی محاسبه کرد.

$$\sqrt{13} \approx ?$$

برای مثال می خواهیم جذر عدد ۱۳ را تا یک رقم اعشار محاسبه کنیم.

جواب: می دانیم اعدادی که جذر دقیق دارند و کوچکتر و بزرگتر از ۱۳ هستند اعداد ۹ و ۱۶ می باشند یعنی

$$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$$

پس داریم  $3 < \sqrt{13} < 4$  بنابراین  $\sqrt{13}$  بین دو عدد ۳ و ۴ قرار دارد. در ادامه باید

مشخص کنیم که  $\sqrt{13}$  به ۳ نزدیکتر است یا به ۴. چون فاصله عدد ۱۳ به ۱۶ سه واحد می باشد و فاصله ۱۳ تا ۹

چهار واحد است پس عدد ۱۳ به ۱۶ نزدیکتر است بنابراین نتیجه میگیریم  $\sqrt{13}$  به عدد ۴ نزدیکتر می باشد پس برای جواب طبق جدول زیر از عدد ۳/۵ شروع میکنیم و ۱/۱ به عدد قبلی اضافه میکنیم

عدد	۳/۶	۳/۷	۳/۸	۳/۹
مجذور عدد	$(۳.۶)^۲ = ۱۲/۹۶$	$(۳.۷)^۲ = ۱۳/۶۹$	$(۳.۸)^۲ = ۱۴/۴۴$	$(۳.۹)^۲ = ۱۵/۲۱$

پس با توجه به جدول بالا مقداری قابل قبول است که نزدیک و کمتر از عدد ۱۳ باشد بنابراین جواب ۳/۶ می باشد.

$$\sqrt{13} \approx \frac{3}{6}$$

## تمرین

(۱) حاصل عبارت های زیر را به صورت عددهای تواندار بنویسید.

$$۸^۳ \times ۸^۲ = \quad (./۵)^۲ \times (./۲)^۷ = \quad ۳^۲ \times ۱۲^۵ \times ۴^۲ =$$

$$۵^x \times ۵^y = \quad ۸^۴ \times ۹^۵ \times ۸ = \quad ۲۷ \times ۳^۴ =$$

$$۳^۴ + ۳^۴ + ۳^۴ = \quad (./۳)^۴ \times ۳^۴ = \quad (./۶)^۳ \times (./۷)^۳ =$$

$$(./۴)^۵ \times (./۵)^۳ = \quad ۶^۷ \times (۱/۵)^۷ = \quad ۲^۳ \times ۸^۵ \times ۴^۲ =$$

(۲) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$۵ + ۲ \times (-۳)^۳ = \quad ۲ - ۲(۳^۲ - ۳) =$$

$$(-۹)^۲ - ۲^۳ \times ۱۰ = \quad ۱۳۹۲^۰ \times ۱۳۹۲^۱ =$$

$$۵^۰ + ۱^۵ + ۵^۱ + ۰^۵ = \quad (۵^۲ - ۳^۲)^۲ - (۵ - ۳)^۲ =$$

$$\frac{5 \times 3^2 + 5}{7^2 - 3^2} =$$

$$\frac{3^2 \times 6 - 58}{4 \times 5 - 4^2} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{8} =$$

۳) جاهای خالی را با نوشتن عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید.

a. مکعب عدد ۲ برابر ..... است.

b. ریشه های دوم عدد ۱۵ برابر ..... و ..... است.

c. هر عدد منفی به توان فرسد برسد حاصل عددی ..... است.

d. حاصل  $\sqrt{\sqrt{81}}$  برابر است با .....

e. سه برابر عدد  $3^7$  به صورت عددی تواندار مساوی ..... است.

f. نصف عدد  $2^6$  به صورت عددی تواندار مساوی ..... است.

g. عدد  $10^{18}$  یک عدد ..... رقمی است.

h. مقدار تقریبی  $\sqrt{21}$  بین دو عدد صحیح متوالی ..... و ..... قرار دارد و به عدد ..... نزدیکتر است.

i. اگر  $2^x \times 2^3 = 2^5$  باشد، مقدار X برابر است با .....

۴) تساوی های زیر را کامل کنید.

$$-\sqrt{\frac{1}{49}} =$$

$$\sqrt{./ . 1} =$$

$$\sqrt{25 \times 36} =$$

$$\sqrt{\sqrt{16}} =$$

$$\sqrt{5^2} =$$

۵) جاهای خالی را با علامت مناسب پر کنید. (> یا < یا =)

$$./ 25^{15} \quad \bigcirc \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$$

$$0^{1399} \quad \bigcirc \quad 0$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \bigcirc \quad 3^0$$

$$7^0 \quad \bigcirc \quad 7^1$$

۶) جذر تقریبی اعداد زیر را با کمک جدول مناسب تا یک رقم اعشار بدست آورید.

$$\sqrt{75} \approx$$

$$\sqrt{27} \approx$$

۷) گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۱. حاصل عبارت  $3^9 + 3^9 + 3^9$  کدام گزینه است؟

(د)  $3^{10}$

(ج)  $3^9$

(ب)  $3^{27}$

(الف)  $3^{27}$

۲. کدام یک از موارد زیر درست است؟

(د)  $1^0 = 10$

(ج)  $3^0 = 3$

(ب)  $3^0 = 1$

(الف)  $3^0 = 0$

۳. حاصل عبارت  $8 \times 2^{\sqrt{16}} \times 2^{\sqrt{4}}$  کدام است؟

(د)  $2^{10}$

(ج)  $2^9$

(ب)  $2^8$

(الف)  $2^7$

۴. حاصل عبارت  $(\sqrt{100})^{\sqrt{4}}$  برابر است با:

(ج) ۵۰

(ج) ۴۰۰

(ب) ۱۰۰

(الف) ۲۰۰

۵. حاصل عبارت  $\sqrt{25-16} \times \sqrt{49-48}$  کدام است؟

(د) ۵

(ج) ۱

(ب) ۳

(الف) ۴



۶. کدام رابطه صحیح است؟

الف)  $4 < \sqrt{28} < 5$       ب)  $-\sqrt{25} = -5$       ج)  $4 < \sqrt{8} < 5$       د)  $7 < \sqrt{48} < 8$

۷. کدام تساوی زیر درست است؟

الف)  $-2^2 = 4$       ب)  $-(-2)^2 = -4$       ج)  $(-2)^2 = -4$       د)  $-(-1^5) = -1$

موفق و سربلند باشید