آمار و احتمال

پایه ی یازدهم «رشته ی ریاضی فیزیک»

فصل ۲ : احتمال

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@amerimath

مهر ۱۴۰۱

درس اوّل : مبانی احتمال

در این درس به مفهوم احتمال می پردازیم. ولی قبل از ورود به مطلب ، به تفاوت بین آمار و احتمال می پردازیم.

تفاوت آمار و احتمال :

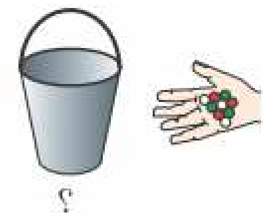
پیرامون تفاوت آمار و احتمال ، به طور خلاصه می توان گفت که :

علم آمار ، علم شناختن جامعه‌ی نامعلوم، با استفاده از نمونه های جمع آوری شده‌ی معلوم

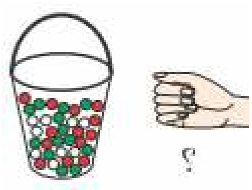
علم احتمال : علم بررسی یک نمونه‌ی نامعلوم از یک جامعه‌ی معلوم

به نمودار مقابل توجه کنید.

علم آمار



علم احتمال



به عبارتی دیگر ، می توان گفت که، اگر اعضای یک جامعه و خصوصیات آنها ، کلاً برای معلوم نباشد، روش ها آماری با جمع آوری و دسته بندی اطلاعات مختلف درباره‌ی این جامعه، جامعه را به ما می شناساند.امّا وقتی بخواهیم در این جامعه ی معلوم و شناخته شده، شانس وقوع پیشامدی را به دست آوریم، از احتمال کمک می گیریم.

مثال: دو کارخانه‌ی ایران خودرو و سایپا را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم بدانیم هر کدام از این کارخانه ها در سال چند نوع خودرو و از هر کدام چندتا تولید می کنند و چند درصد از محصولات آنها در سال سالم یا معیوب هستند، از علم آمار کمک می گیریم. امّا وقتی بعد از معلوم شدن وضعیت تولیدات کارخانه، بخواهیم یک نمونه از محصولات کارخانه را بررسی کنیم،(مثلاً به تصادف از هر کدام از کارخانه ها ۱۰ خودرو انتخاب کنیم و بخواهیم شانس سالم بودن این خودروها در کدام کارخانه بیشتر است.) از علم احتمال کمک می گیریم.

تمرین ۱ : کدام یک از سئوال های زیر مربوط به آمار و کدام یک ، مربوط به علم احتمال است.

صورت مسئله	آمار	احتمال
۱ : می دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست کم یک سیب خراب برداشته باشیم.		
۲ : درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟		
۳ : ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش آموز پایه‌ی یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه مند باشند؟		
۴ : در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکوردار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟		
۵ : چه تعداد از دانش آموزان پایه‌ی یازدهم مدرسه‌ی شما به ورزش شنا علاقه دارند؟		

جواب :

مسائل ۲ و ۵ به علم آمار و مسائل ۱ و ۳ و ۴ به احتمال می پردازند.

***

تعریف فضای نمونه ای و پیشامد تصادفی

مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را **فضای نمونه ای** می نامند و آن را با S نمایش می دهند. هر یک از اعضای فضای نمونه ای را **برآمد** می گویند. همچنین هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را **پیشامد تصادفی** نامیده می شود و آنرا نیز با یک حرف بزرگ لاتین مانند E نمایش می دهند.

مثال : در استخراج دو مهره از ۶ مهره داخل کیسه‌ای به صورت تصادفی ابتدا تعداد برآمد های فضای نمونه‌ای را نوشته و سپس تمام برآمد ها را بنویسید.

حل : تعداد برآمد های فضای نمونه ای $\binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!(۶-۲)!} = \frac{۶\times۵\times۴!}{۲\times۱\times۴!} = ۱۵$

حال اگر این مهره ها a و b و c و d و e و f نامگذاری شوند، در این صورت :

برآمد های فضای نمونه ای به صورت زیر می شوند.

$$\begin{array}{lllll} a,b & b,c & c,d & d,e & e,f \\ a,c & b,d & c,e & d,f & \\ a,d & b,e & c,f & & \\ a,e & b,f & & & \\ a,f & & & & \end{array}$$

تمرین ۲ : یک راننده‌ی تاکسی ، در ایستگاه منتظر می ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند، گر چه ممکن است با کمتر از چهار نفر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز به همین صورت عمل می کند. فضای نمونه ای توصیف چنین پدیده ای را با توجه به تعداد مسافرها در رفت و برگشت بنویسید.

حل : اگر تعداد مسافرها را در دو مسیر رفت و برگشت به صورت مجموعه بنویسیم، فضای نمونه ای این موضوع به صورت زیر است.

$$S=\{۰,۱,۲,۳,۴\}\times\{۰,۱,۲,۳,۴\}$$

که دارای ۲۵ برآمد ، به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{ccccc} (۰,۰) & (۰,۱) & (۰,۲) & (۰,۳) & (۰,۴) \\ (۱,۰) & (۱,۱) & (۱,۲) & (۱,۳) & (۱,۴) \\ (۲,۰) & (۲,۱) & (۲,۲) & (۲,۳) & (۲,۴) \\ (۳,۰) & (۳,۱) & (۳,۲) & (۳,۳) & (۳,۴) \\ (۴,۰) & (۴,۱) & (۴,۲) & (۴,۳) & (۴,۴) \end{array}$$

در این فضای نمونه ای ، منظور از برآمد (۱,۲) این است که تاکسی با ۱ نفر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر داشته است.

تمرین۳ : در پرتاب یک تاس ، پیشامد آن را بنویسید که عدد اوّل رخ دهد.

حل :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه ای

$E=\{۲,۳,۵\}$ پیشامد تصادفی

توجه : اگر E یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای S باشد. واضح است که :

$$\Phi \subseteq E \subseteq S$$

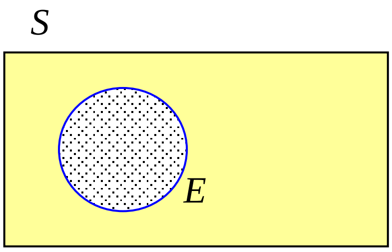
اگر $E=\Phi$ باشد، پیشامد E را **غیر ممکن** می نامند. مثلاً در پرتاب تاس انتظار داریم عدد بیشتر از ۱۰ بیاید.

اگر $E=S$ باشد، پیشامد E را **حتمی** می نامند. مثلاً در پرتاب تاس انتظار داریم عدد کمتر از ۱۰ بیاید.

اگر S فضای نمونه‌ای و E یک پیشامد تصادفی از آن باشد، پیشامدی را که متناظر با رخ ندادن E می باشد، **مکمل** E می نامند و آن را با E' یا E^C نمایش می دهند. بدیهی است که $E'=S-E$

***

مفهوم احتمال و قوانین آن



اگر E یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد. در این صورت ، خارج قسمت تعداد اعضای پیشامد تصادفی E بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای نظیر آن یعنی S را **احتمال** وقوع پیشامد تصادفی E می نامند.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

تمرین۴ : در پرتاب یک تاس ، احتمال آن را حساب کنید که مضرب ۳ بیاید.

حل :

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(S)=۶$

پیشامد تصادفی $E=\{۳,۶\} \rightarrow n(E)=۲$

احتمال آمدن مضرب ۳ $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

تمرین ۵ : در تمرین۲، تعیین کنید که چقدر احتمال دارد، تعداد مسافرها در رفت و برگشت برابر باشند؟

حل :

$n(S)=۲۵$

$E=\{(۰,۰),(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\} \to n(E)=۵$

$\to P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}=\dfrac{۵}{۲۵}=\dfrac{۱}{۵}$

تمرین ۶ : از بین اعداد طبیعی از ۱۰ تا ۱۰۰ به تصادف یک عدد انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد انتخاب شده مضرب ۸ باشد.

حل :

$S=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۱۰۰\} \to n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱۰+۱=۹۱$

$E=\{۱۶,۲۴,...,۹۶\} \to n(E)=\dfrac{b-a}{k}+۱=\dfrac{۹۶-۱۶}{۸}+۱=۱۱$

$P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}=\dfrac{۱۱}{۹۱}$

***

اصول احتمال

برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه ای S، احتمال وقوع E، عددی حقیقی از بازه‌ی $[۰,۱]$ می باشد و آن را با $P(E)$ نمایش می دهند. اصول احتمال عبارتند از :

اصل ۱ : $P(S)=۱$

اصل ۲ : برای هر دو پیشامد A و B که $A\cap B=\Phi$ داریم، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

اصل ۳ : برای هر دو پیشامد A و B که $A=B$ داریم، $P(A)=P(B)$

تمرین ۷ : برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه ای S، ثابت کنید که $P(E')=۱-P(E)$

حل : چون $E'\cap E=\Phi$ پس $P(E\cup E')=P(E)+P(E')$ و چون $E\cup E'=S$ لذا :

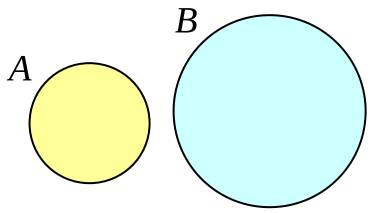
$P(S)=P(E)+P(E')\xrightarrow{P(S)=۱}P(E)+P(E')=۱\to P(E')=۱-P(E)$

تمرین ۸ : ثابت کنید که $P(\Phi)=۰$

حل : چون $E'\cap E=\Phi$ پس $P(E\cup E')=P(E)+P(E')$ و چون $E\cup E'=S$ لذا :

$P(\Phi)=P(S')=۱-P(S)\xrightarrow{P(S)=۱}P(\Phi)=۱-۱=۰$

پیشامد های سازگار و ناسازگار



دو یا چند پیشامد را **ناسازگار** گویند، هرگاه اشتراک آنها تهی باشد. ناسازگاری این دو پیشامد به این معنا است که رخ دادن هر دوی آنها هم زمان محال است.

اگر دو پیشامد ناسازگار نباشند، آنها را **سازگار** نیز می نامند.

تمرین۹ : تاسی را پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد رخ دادن عدد بزرگتر از ۵ و B پیشامد رخ دادن عدد کمتر از ۳ باشد. نشان دهید که این دو پیشامد ناسازگارند.

حل :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(S)=۶$ فضای نمونه ای

$B=\{۱,۲\}$ عدد کمتر از ۳ $\qquad$ $A=\{۶\}$ عدد بزرگتر از ۵

و چون $A \cap B=\{\}$ این دو پیشامد ناسازگارند.

تمرین۱۰ : در هر مورد ، سازگاری یا ناسازگاری دو پیشامد داده شده را مشخص کنید .

الف : دانش آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می کنید.

A : متولد ماه مهر باشد. $\qquad$ B: متولد فصل تابستان باشند.

ب : سکه ای که سه بار پرتاب می کنید.

A : هر سه بار مشابه بیاید. $\qquad$ B: زوج بار رو بیاید.

ج : فردا در آبادان

A : خورشید در آسمان دیده شود. $\qquad$ B: باران بیاید.

د : تاسی را پی در پی پرتاب می کنیم.

A : برای اوّلین بار در مرتبه‌ی سوّم ۶ بیاید. $\qquad$ B: تا پرتاب سوّم دو بار ۶ بیاید.

حل : پیشامد های تعریف شده در بنده های الف و د ناسازگار و در بندهای ب و ج سازگار می باشند.

تمرین ۱۱ : اگر C و B و A سه پیشامد ناسازگار باشند، ثابت کنید که[1] :

$$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

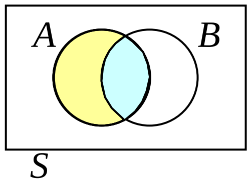
حل : چون C و B و A سه پیشامد ناسازگارند، پس $B\bigcup C$ و A نیز ناسازگار خواهند بود و لذا

$$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A\bigcup(B\bigcup C))=P(A)+P(B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

تمرین ۱۲ : برای هر دو پیشامد B و A ثابت کنید:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$$

حل : واضح است که دو پیشامد $A-B$ و $A\bigcap B$ ناسازگار هستند. پس :

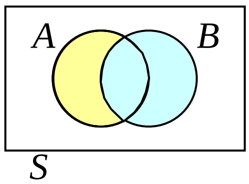


$$A=(A-B)\bigcup(A\bigcap B)$$
$$\rightarrow P(A)=P\,[(A-B)\bigcup(A\bigcap B)]$$
$$\rightarrow P(A)=P(A-B)+P(A\bigcap B)$$
$$\rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$$

تمرین ۱۳ : برای هر دو پیشامد B و A ثابت کنید:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

حل : واضح است که پیشامد های $A-B$ و B ناسازگار هستند. لذا:



$$A\bigcup B=(A-B)\bigcup B$$
$$\rightarrow P(A\bigcup B)=P[(A-B)\bigcup B]$$
$$\rightarrow P(A\bigcup B)=P(A-B)+P(B)$$
$$\rightarrow P(A\bigcup B)=P(A)-P(A\bigcap B)+P(B)$$
$$\rightarrow P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

تمرین ۱۴ : اگر A و B دو پیشامد دلخواه و $B\subseteq A$ باشند، هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A-B)=P(A)-P(B)$ ب) $P(B)\leq P(A)$

اثبات :

---

[1] . برای هر تعداد پیشامد ناسازگار قابل تعمیم است.

الف :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\xrightarrow{A\cap B=B}P(A-B)=P(A)-P(B)$$

ب :

$$B\subseteq A\to n(B)\le n(A)\xrightarrow{\div n(S)}\frac{n(B)}{n(S)}\le\frac{n(A)}{n(S)}\to P(B)\le P(A)$$

تمرین۱۵ : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید که :

$$P(A'\cup B)-P(A\cap B)=P(A')$$

حل:

$$P(A'\cup B)-P(A\cap B)=P(A')-P(A'\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A')-\underbrace{P(B\cap A')}+\underbrace{P(B)-P(A\cap B)}$$

$$=P(A')-P(B-A)+P(B-A)=P(A')$$

تمرین۱۶: هر یک از اعداد طبیعی از ۱۱ تا ۱۰۰ را روی یک کارت می نویسیم و یک کارت به تـصادف از میان آنها استخراج می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه عدد روی این کارت:

الف : بر ۴ یا بر ۶ بخش پذیر باشد.

ب : بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

ج : فقط بر یکی از دو عدد ۴ یا ۶ بخش پذیر باشد.

د : نه بر ۴ و نه بر ۶ بخشپذیر باشد.

حل :

$$S=\{۱۱,۱۲,...,۱۰۰\}\to n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱۱+۱=۹۰$$

بخش پذیر بر۴ $A=\{۱۲,۱۶,...,۹۶,۱۰۰\}\to n(A)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۱۰۰-۱۲}{۴}+۱=۲۳$

بخش پذیر بر۶ $B=\{۱۲,۱۸,...,۹۶\}\to n(B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۶}+۱=۱۵$

بخش پذیر بر۱۲(ک م م ۴ و۶) $A\cap B=\{۱۲,۲۴,...,۹۶\}\to n(A\cap B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۱۲}+۱=۸$

الف :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲۳}{۹۰}+\frac{۱۵}{۹۰}-\frac{۸}{۹۰}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

ب :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۲۳}{۹۰}-\frac{۸}{۹۰}=\frac{۱۵}{۹۰}=\frac{۱}{۶}$$

ج :

$$P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲\times P(A\cap B)$$
$$=\frac{۲۳}{۹۰}+\frac{۱۵}{۹۰}-۲\times\frac{۸}{۹۰}=\frac{۲۳+۱۵-۱۶}{۹۰}=\frac{۲۲}{۹۰}=\frac{۱۱}{۴۵}$$

د :

$$P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین برای حل :

۱۷ : اگر $P(A\cup B)=\frac{۶}{۸}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A')=\frac{۳}{۸}$ باشند. مطلوب است محاسبه‌ی :

الف) $P(B)$ ب) $P(B-A)$ ج) $P(A\cap B')$

۱۸ : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B ثابت کنید.

$$P(A\cap B')-P(B\cap A')+P(A')=۱-P(B)$$

۱۹: احتمال اینکه دانش آموزی در درس آمار و احتمال قبول شود، ۰/۳۴ و در درس حسابان قبول شود، ۰/۲۳ و احتمال اینکه دست کم در یکی از این دو درس قبول شود، ۰/۳۸ است. احتمال اینکه این دانش آموز در هر دو درس قبول شود، چقدر است؟

۲۰: احتمال آن که خانه ای یخچال داشته باشد، برابر ۰/۸۵ و احتمال اینکه هم یخچال و هم تلویزیون باشد برابر ۴۰/ و احتمال آن که حداقل یکی از این دو وسیله باشند ۰/۹۶ می باشد. احتمال آن را بیابید که در این خانه :

الف : تلویزیون باشد. ب : فقط یخچال باشد.

۲۱ : عددی به تصادف از مجموعه‌ی {۱,۲,۳,...,۱۰۰۰} انتخاب کنیم، احتمال اینکه :

الف : عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، امّا بر ۵ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟

ب : عدد انتخاب نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

***

تهیه کننده : جابر عامری

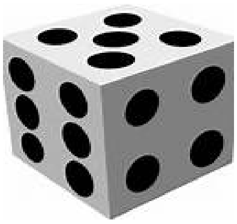
دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس دوّم : احتمال غیرهم شانس

نتایج بسیاری از آزمایش ها و اتفاق هایی که در آینده رخ می دهند، از قبل مشخص نیست. گاهی برآمد های مربوط به فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی شانس یا احتمال انتخاب برابر دارند. مثلاً در پرتاب یک تاس سالم ، شانس انتخاب هر عضو $\frac{۱}{۶}$ است.



$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ $\qquad \rightarrow n(S)=۶$

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۱

$$P(S)=P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

همچنین در پرتاب یک سکه‌ی سالم می توان نوشت:

برآمد	R	P	جمع
احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱

$$P(S)=P(R)+P(P)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

امّا گاهی ، برآمد های ، فضای نمونه ای شانس یکسان ندارند. برای مثال اگر هوا ابری باشد، احتمال بارش باران و عدم بارش برابر نیست. در این درس به بررسی احتمال در فضای نمونه ای که برآمد های آن شانس یکسان در انتخاب در پیشامد تصادفی را ندارند، می پردازیم.

***

احتمال غیر هم شانس

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه ای S احتمال برابر داشته باشند، S را فضا نمونه ای با احتمال غیر هم شانس می گوییم. اگر E یک پیشامد k عضوی از فضای نمونه ای متناهی S باشد، در این صورت می توان نوشت:

$E=\{e_۱,e_۲,...,e_k\}$

برآمد	$e_۱$	$e_۲$	$e_۳$	....	e_k
احتمال	$P(e_۱)$	$P(e_۲)$	$P(e_۳)$	....	$P(e_k)$

$$P(E)=P(e_۱)+P(e_۲)+...+P(e_k)=\sum_{i=۱}^{k}P(e_i)$$

برا این اساس نتیجه می شود که مجموع احتمالات وقوع هر یک از برآمد های فضای نمونه ای برابر یک است. یعنی :

$S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$

برآمد	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	....	s_n	جمع
احتمال	$P(s_۱)$	$P(s_۲)$	$P(s_۳)$	....	$P(s_n)$	۱

$$P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+...+P(s_n)=\sum_{i=۱}^{n}P(s_i)=۱$$

اضافه می گردد که

الف : $P(S)=۱$ ب : $P(\Phi)=۰$ ج : $۰\leq P(E)\leq ۱$

تمرین ۱ : سکه ای در پرتاب طوری سنگینی می کند که احتمال آمدن رو دو برابر احتمال آمدن پشت است. احتمال آمدن رو و پشت را محاسبه کنید.

حل :

برآمد	R	P	جمع
احتمال	$۲x$	x	۱

$$P(S)=۲x+x=۱\rightarrow ۳x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\begin{cases}P(R)=۲x=۲(\frac{۱}{۳})=\frac{۲}{۳}\\ P(P)=x=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

***

تمرین ۲ : تاسی طوری ساخته شده است که وقتی پرتاب شود، احتمال آمدن عدد زوج دو برابر احتمال آمدن عدد فرد است. مطلوبست محاسبه‌ی :

الف : احتمال آمدن عدد ۵   ب : احتمال آمدن عدد ۴   ج : احتمال پیشامد $\{۲,۳,۵\}$

حل :

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	x	$۲x$	x	$۲x$	x	$۲x$	۱

$$P(S)=x+۲x+x+۲x+x+۲x=۱\to ۹x=۱\to x=\frac{۱}{۹}$$

$$P(۵)=x=\frac{۱}{۹}$$

$$P(۴)=۲x=۲(\frac{۱}{۹})=\frac{۲}{۹}$$

$$P(\{۲,۳,۵\})=P(۲)+P(۳)+P(۵)=۲x+x+x=۴x=۴(\frac{۱}{۹})=\frac{۴}{۹}$$

***

تمرین۳ : تاسی طوری ساخته شده است که وقتی پرتاب شود، احتمال آمدن عدد زوج سه برابر احتمال آمدن عدد فرد است. اگر در یک پرتاب تاس ، A پیشامد وقوع عدد بزرگتر از ۲ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.

حل:

برآمد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
احتمال	x	$۳x$	x	$۳x$	x	$۳x$	۱

$$P(S)=x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱\to ۱۲x=۱\to x=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(A)=P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=x+۳x+x+۳x=۸x=۸\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

***

تمرین۵ : با توجه به جدول زیر ابتدا مقدار x را تعیین و سپس احتمال پیشامد $\{a,b\}$ را محاسبه کنید.

برآمد	a	b	c	جمع
احتمال	$۳x$	x	$۲x$	۱

حل:

$$P(S)=۳x+x+۲x=۱\to ۶x=۱\to x=\frac{۱}{۶}$$

$$P(\{a,b\})=P(a)+P(b)=۳x+x=۴x=۴(\frac{۱}{۶})=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین۶ : فرض کنیم $S=\{a,b,c,d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه‌ی تصادفی باشد و داشته باشیم

$P(d)=\frac{۳}{۸}$ و $P(a)=P(b)=۷P(c)$.

الف : مقدار $P(b)$ را محاسبه کنید.   ب : مقدار $P(\{a,c\})$ را بیابید.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	a	b	c	d	جمع
احتمال	$۷x$	$۷x$	x	$\frac{۳}{۸}$	۱

$$P(S)=۷x+۷x+x+\frac{۳}{۸}=۱\rightarrow ۱۵x=\frac{۵}{۸}\rightarrow x=\frac{۱}{۲۴}$$

$$P(b)=۷x=۷(\frac{۱}{۲۴})=\frac{۷}{۲۴}$$

$$P(\{a,c\})=P(a)+P(c)=۷x+x=۸x=۸(\frac{۱}{۲۴})=\frac{۱}{۳}$$

***

تمرین۷ : در فضای نمونه ای $S=\{a,b,c\}$ اگر داشته باشیم : $P(\{a,b\})=۳p(\{c\})$

در این صورت، مقدار $P(c)$ را محاسبه کنید.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	a	b	c	جمع
احتمال	$۳x$		x	۱

$$P(S)=۳x+x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

$$P(c)=x=\frac{۱}{۴}$$

تمرین۸ : در یک مسابقه‌ی چهارجانبه‌ی فوتبال، تیم های a و b و c و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم های a و b و c با یکدیگر برابر باشند، ولی احتمال قهرمانی تیم d، دوبرابر هر یک از تیم های دیگر باشد. احتمال قهرمانی هر یک از تیم ها را به دست آوريد.

حل : با توجه به مسئله داریم :

برآمد	a	b	c	d	جمع
احتمال	x	x	x	$۲x$	۱

$$P(S)=x+x+x+۲x=۱\rightarrow ۵x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۵}$$

$$P(a)=P(b)=P(c)=x=\frac{۱}{۵}$$

$$P(d)=۲x=۲(\frac{۱}{۵})=\frac{۲}{۵}$$

تمرین۹ : در یک آزمایش تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{x,z\})=\frac{۱}{۲}$. احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به دست آورید.

حل :

$$P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}\rightarrow P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{P(x)+P(y)+P(z)=۱}\frac{۲}{۳}+P(z)=۱\rightarrow P(z)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(\{x,z\})=\frac{۱}{۲}\rightarrow P(x)+P(z)=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{P(z)=\frac{۱}{۳}}P(x)+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲}\rightarrow P(x)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}\rightarrow P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{P(x)=\frac{۱}{۶}}\frac{۱}{۶}+P(y)=\frac{۲}{۳}\rightarrow P(y)=\frac{۱}{۲}$$

تمرین برای حل :

۱۰ : در پرتاب یک سکه‌ی ناسالم، احتمال« رو» نصف احتمال آمدن « پشت» است. در پرتاب این سکه ، احتمال ظاهر شدن « رو» و احتمال آمدن « پشت» را به دست آورید.

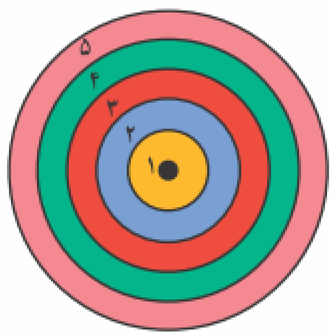
۱۱ : یک تاس طوری ساخته شده است که روی سه وجه آن عدد ۱ و روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی مانده‌ی آن عدد ۳ مشاهده می شود. در پرتاب این پرتاب ابتدا فضای نمونه ای را نوشته و سپس احتمال وقوع هر یک از برآمد های آن را بنویسید.

۱۲ : در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده‌ی هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

۱۳ : اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,b,c,d\}$ و $C=\{a,b,e\}$ سه پیشامد باشند، به طوری که $P(A)=\frac{۲}{۷}$ و $P(B)=\frac{۳}{۵}$ ، مقدار $P(C')$ را به دست آورید.

۱۴ : در یک تجربه‌ی تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(x)$ و $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامد ها را به دست آورید.

۱۵ : در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره ای شکل، مطابق شکل روبرو که به پنج ناحیه‌ی مجزا تقسیم شده است. فرض کنید، احتمال اصابت دارت به ناحیه‌ی اوّل، x باشد. اگر احتمال اصابت دارت به ناحیه‌ی kام، برابر $(۲k-۱)x$ باشد.



الف : احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

ب : احتمال اصابت دارت به کدام ناحیه بیشترین و به کدام ناحیه کمترین است؟

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس سوّم : احتمال شرطی

نتایج بسیاری از آزمایش ها و اتفاق هایی که در آینده رخ می دهند، مشروط به نتایج آزمایش های دیگر می باشند. احتمال این چنین رخداد هایی را احتمال شرطی می نامند. برای مثال احتمال آسیب دیدن یک راننده در یک تصادف به شرط اینکه از کمربند ایمنی استفاده کرده باشد. یک احتمال شرطی است. در واقع در احتمال شرطی با دو پیشامد مختلف سروکار داریم و فرض می کنیم یکی از آنها رخ داده است و می خواهیم بدانیم احتمال رخ دادن دیگری چه تغییری کرده است.

احتمال شرطی

فرض کنید B و A دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B)>۰$ در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می دهیم و آنرا احتمال شرطی A به شرط وقوع B (یعنی B قبل از A رخ داده باشد.) می گوییم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال : در یک مسابقه‌ی اتومبیل رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل : اگر B پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل و A پیشامد رسیدن به خط پایان تعریف کنیم. در این صورت داریم: $P(A\cap B)=۰/۷$ و $P(B)=۰/۸$ لذا:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۷}{۰/۸}=\frac{۷}{۸}$$

نتیجه ۱ : فرض کنید B و A دو پیشامد باشند، به قسمی که $B\neq\Phi$ در این صورت طبق تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

نتیجه ۲ : در حالتی که فضای نمونه ای احتمال هم شانس است، شرطی کردن یک پیشامد مانند A نسبت به پیشامد دیگر مثل B این است که فضای نمونه ای یعنی S را کنار گذاشته و B را فضای نمونه ای تلقی می کنیم. احتمال روی این فضای نمونه ای نیز هم شانس است. به این رویکرد « کاهش فضای نمونه ای » گفته می شود.

تمرین ۱ : دو تاس پرتاب می شوند، اگر مجموع شماره ها ۶ باشد، احتمال آنکه اقلاً یکی از دو تاس ۲ باشد را حساب کنید.

حل: تعریف می کنیم که A پیشامد اینکه اقلاً یکی از دو عدد ۲ و B مجموع دو عدد ۶ باشد.پس:

$$A=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\}$$

$$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$$

$$A\bigcap B=\{(۲,۴),(۴,۲)\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۵}$$

تمرین ۲ : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. می دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت ، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد، چقدر است؟

حل : سه بار رو آمدن سکه را A و دست کم یک بار رو آمدن سکه را B می نامیم. در این صورت:

$$S=\{RRR.RRP,RPR,PRR,PPR,PRP,RPP,PPP\}$$

$$B=\{RRR.RRP,RPR,PRR,PPR,PRP,RPP\}$$

$$A=\{RRR\}$$

$$A\bigcap B=\{RRR\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۷}$$

تمرین ۳ : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده است باشد، چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ باشد، چقدر است؟

حل :

الف :

$A=\{(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$ تاس سبز ۶ باشد.

$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

$A\bigcap B=\{(۶,۴)\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۳}$$

ب :

$$P(B|A)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(A)}=\frac{۱}{۶}$$

نتیجه : بطور کلی برای هر دو پیشامد و نمی توان نتیجه گرفت که : $P(A|B)=P(B|A)$

تمرین ۴ : اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $P(a)=P(b)=\frac{۱}{۳}$ و $P(c)=P(d)=\frac{۱}{۶}$ مطلوبست محاسبه‌ی

الف) $P(\{a,b,c\})$ ب) $P(\{a,b,c\}|\{b,c,d\})$

جواب :

برآمد	a	b	c	d	جمع
احتمال	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۱

$$A=\{a,b,c\}\rightarrow P(A)=P(a)+P(b)+P(c)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

$$B=\{b,c,d\}\rightarrow P(B)=P(b)+P(c)+P(d)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

$$A\bigcap B=\{b,c\}\rightarrow P(A\bigcap B)=P(b)+P(c)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

تمرین۵ : در امتحانات پایانی، ۲۰٪ دانش آموزان یک کلاس از درس ریاضی و ۱۵٪ از فیزیک و ۱۰٪ از هر دو درس تجدید شده اند.

الف) احتمال اینکه دانش آموزی از این کلاس حداقل از یکی از این دو درس تجدید شده باشد، را محاسبه کنید.

ب) احتمال اینکه دانش آموزی فقط از درس فیزیک تجدید شده باشد، را بیابید.

ج) احتمال آن را حساب کنید که این دانش آموز فقط از یکی از این دو درس تجدید شده باشد.

د) احتمال اینکه دانش آموزی از این کلاس از درس فیزیک تجدید شده باشد، مشروط به اینکه از درس ریاضی تجدید شده است را بدست آورید.

حل:

$$P(F\cup R)=P(F)+P(R)-P(F\cap R)=\frac{۱۵}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}-\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(F-R)=P(F)-P(F\cap R)=\frac{۱۵}{۱۰۰}-\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$P(F-R)+P(R-F)=P(F)+p(R)-۲P(F\cap R)=\frac{۱۵}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}-۲(\frac{۱۰}{۱۰۰})=\frac{۱۵}{۱۰۰}$$

$$P(F\,|\,R)=\frac{P(F\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{۱۰}{۱۰۰}}{\frac{۲۰}{۱۰۰}}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین۶ : اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A)=\frac{۳}{۴}$ باشد. مقدار $P(B\,|\,A)$ را بدست آورید.

حل :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}-P(A\cap B)\rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین ۷ : اگر $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{1}{6}$ و $P(A|B)=\frac{1}{3}$ باشد. $P(A\cup B)$ و $P(B\cap A')$ را بدست آورید.

حل:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\rightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{13}{36}$$

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{2}{18}$$

تمرین ۸ : فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید:

الف : اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه :

$$P((A_1\cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

ب : برای هر پیشامد A داریم:

$$P(A'|B)=1-P(A|B)$$

حل :

الف: اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند، در این صورت دو پیشامد $A_1\cap B$ و $A_2\cap B$ نیز ناسازگار می باشند.

$$P((A_1\cup A_2)|B)=\frac{P((A_1\cup A_2)\cap B)}{P(B)}=\frac{P((A_1\cap B)\cup(A_2\cap B))}{P(B)}$$

$$=\frac{P((A_1\cap B)+(A_2\cap B))}{P(B)}=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

ب :

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B)$$

تمرین برای حل :

۹ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A|A)=۱$ ب) $P(A|A')=۰$

۱۰ : دربارهٔ‌ی خانواده ای چهار فرزندی ، می دانیم که دست کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر باشند، چقدر است؟ (جواب : ۰/۴)

***

قانون ضرب احتمالات

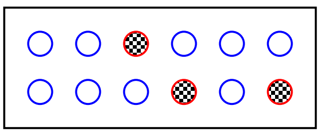
برای هر دو پیشامد B و A ، با توجه به تعریف احتمال شرطی یعنی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ می توان نوشت:

$$P(A\cap B)=P(B).P(A|B)$$

این رابطه را ***قانون ضرب احتمالات*** می نامند.

مثال: جعبه ای محتوی ۱۲ لامپ است و می دانیم که ۳ تای آنها معیوب اند. از این جعبه به تصادف یک لامپ بر می داریم، سپس بدون جایگذاری لامپ اوّل، لامپ دیگری به تصادف بر می داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند، چقدر است؟

حل: تعریف می کنیم، A پیشامد لامپ اوّل معیوب و B پیشامد لامپ دوّم معیوب



بنابراین $A\cap B$ پیشامد معیوب بودن هر دو لامپ است.

واضح است که $P(A)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$

اگر لامپ اوّل معیوب باشد، لامپ دوّم را از بین ۱۱ لامپ باقی مانده که ۲ تای آنها معیوب است، بر می داریم. یعنی $P(B|A)=\frac{۲}{۱۱}$ احتمال لامپ دوّم معیوب به شرط اینکه لامپ اوّل معیوب است.

در نهایت احتمال هر دو لامپ معیوب (اوّل و دوّم) به صورت زیر بدست می آید.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۲۲}$$

تمرین ۱۱ : در کیسه ای ۱ گوی سبز ، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز وجود دارد. از این کیسه دو گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می کنیم. احتمال اینکه گوی اوّل سبز و گوی دوّم سفید باشد، چقدر است؟

حل : تعریف می کنیم.

$B =$ گوی سفید $\qquad\qquad$ $A =$ گوی سبز

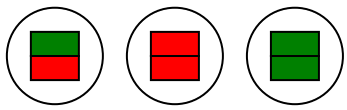
واضح است که $P(A)=\frac{۱}{۶}$ و $P(B|A)=\frac{۳}{۵}$ لذا

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۱۰}$$

تمرین ۱۲: سه کارت هم شکل را در نظر می گیریم. دو روی کارت اوّل سبز و دو روی کارت دوّم قرمز است و یک روی کارت سوّم سبز و روی دیگرش قرمز است. یکی از این کارت ها را به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد، چقدر است؟

حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$B =$ روی مشاهده شده‌ی کارت انتخابی سبز $\qquad\qquad$ $A =$ کارت دو رو سبز



$$P(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳}$$

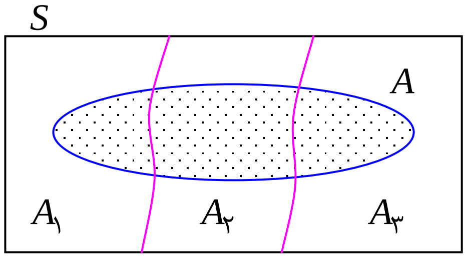
و چون اگر کارت انتخاب دو روز سبز باشد، روی مشاهده شده حتماً سبز است در نتیجه :

$$P(A|B)=\frac{۲}{۳}$$

***

قانون احتمال کل

اگر A_3 و A_2 و A_1 یک افراز از S و A یک پیشامد از S باشد. در این صورت:



$$A \subseteq S$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$$

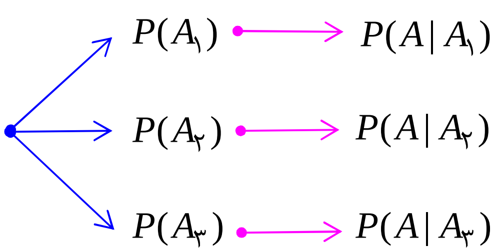
$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3)$$
$$= P(A_1).P(A|A_1) + P(A_2).P(A|A_2) + P(A_3).P(A|A_3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i).P(A|A_i)$$

تذکر: این تساوی را می توان برای تعداد محدودی پیشامد ناسازگار تعمیم داد.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(A|A_i)$$

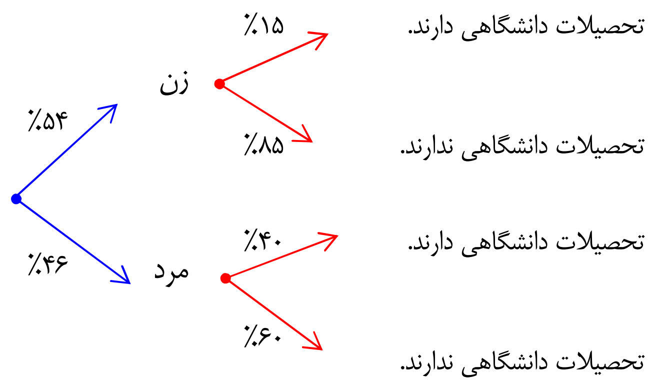
یادآوری: دو یا چند پیشامد را ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک دو به دوی آنها تهی باشد.

توجه : می توان متناظر فرمول فوق نمودار زیر را رسم نمود. این نمودار که به نمودار درختی موسوم است، حل مسائلی که به کمک فرمول فوق قابل حل هستند را آسانتر می کند.



تمرین۱۳: ۵۴٪ جمعیت کشوری را زنان و بقیه را مردان تشکیل می دهند. اگر ۱۵٪ زنان و۴۰٪ مردان این کشور تحصیلات دانشگاهی داشته باشند و یک نفر از این کشور را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال اینکه فرد انتخاب شده دارای تحصیلات دانشگاهی باشد،چقدر است؟

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه فرد انتخاب شده تحصیلات دانشگاهی داشته باشد. برابر است با:

$$P(A)=(۰/۵۴\times ۰/۱۵)+(۰/۴۶\times ۰/۴۰)=۰/۲۶۵$$

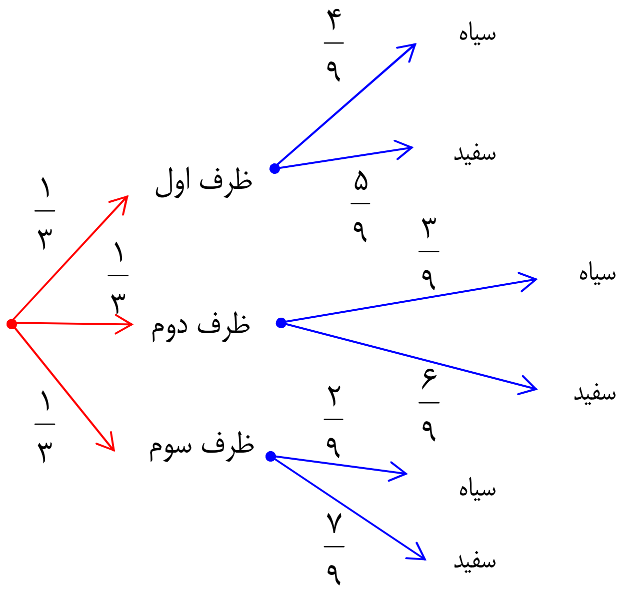
تمرین۱۴: با توجه به تمرین قبل احتمال اینکه فرد انتخاب شده تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد،چقدر است؟

حل:

$$P(B)=(۰/۵۴\times ۰/۸۵)+(۰/۴۶\times ۰/۶۰)=۰/۷۳۵$$

تمرین۱۵: سه ظرف داریم. ظرف اوّل شامل۴ مهره سیاه و۵ مهره سفید و ظرف دوّم شامل۳ مهره سیاه و ۶ مهره سفید و ظرف سوّم شامل ۲ مهره سیاه و ۷ مهره سفید است. یک ظرف به تصادف انتخاب نموده و به تصادف مهره ای از آن بیرون می آوریم.احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



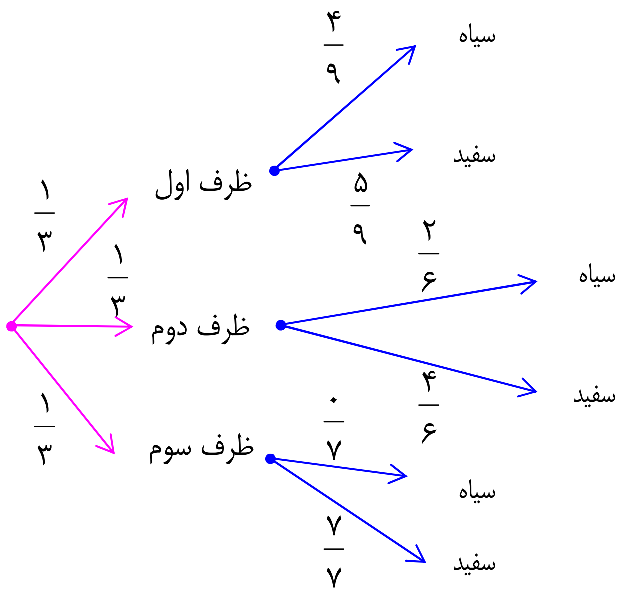
لذا احتمال اینکه مهره‌ی انتخاب شده سفید باشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۹})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۹})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۹})=\frac{۵}{۲۷}+\frac{۶}{۲۷}+\frac{۷}{۲۷}=\frac{۱۸}{۲۷}=\frac{۲}{۳}$$

***

تمرین۱۶: سه ظرف داریم. ظرف اوّل شامل۴ مهره سیاه و۵ مهره سفید و ظرف دوّم شامل۲ مهره سیاه و۴ مهره سفید و ظرف سوّم فقط شامل ۷ مهره سفید است. یک ظرف به تصادف انتخـاب نمـوده و بـه تـصادف مهره ای از آن بیرون می آوریم.احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



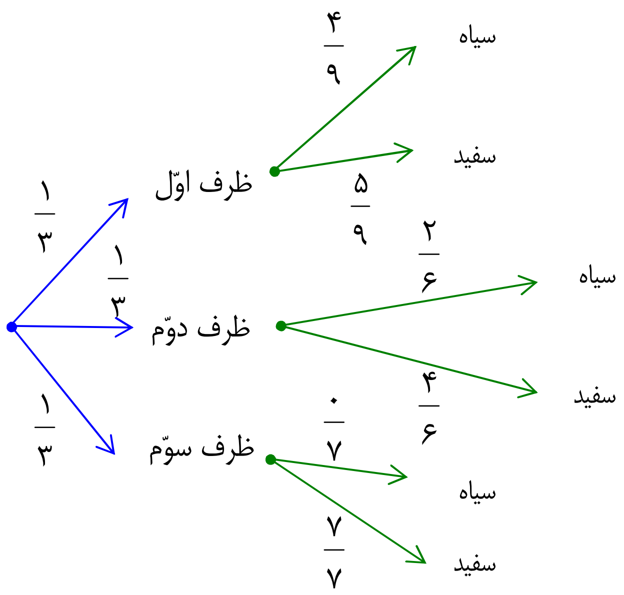
لذا احتمال اینکه مهره‌ی انتخاب شده سفید باشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۹})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۶})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۷})=\frac{۵}{۲۷}+\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۳}=\frac{۲۰}{۲۷}$$

***

تمرین۱۷: سه ظرف داریم. ظرف اوّل شامل۴ مهره سیاه و۵ مهره سفید و ظرف دوّم شامل۲ مهره سیاه و۴ مهره سفید و ظرف سوّم فقط شامل ۷ مهره سفید است. یک ظرف به تصادف انتخـاب نمـوده و بـه تـصادف مهره ای از آن بیرون می آوریم.احتمال سیاه بودن آن چقدر است؟

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.

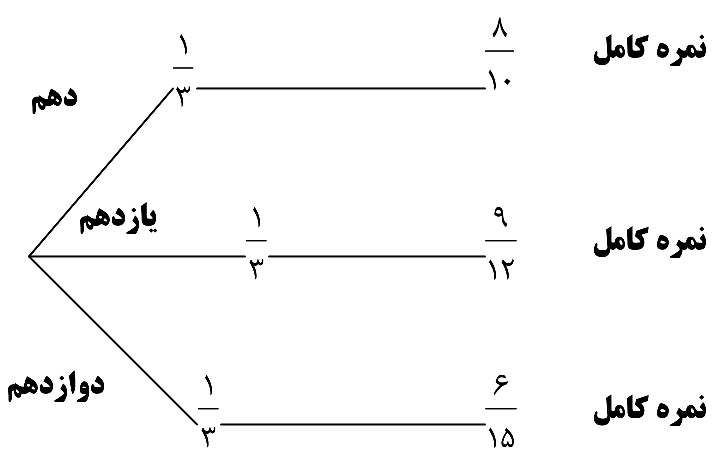


لذا احتمال اینکه مهره‌ی انتخاب شده سیاه باشد. برابر است با:

$$P(A) = (\frac{۱}{۳} \times \frac{۴}{۹}) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۶}) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۰}{۷}) = \frac{۴}{۲۷} + \frac{۱}{۹} = \frac{۷}{۲۷}$$

***

تمرین۱۸: در یک آموزشگاه سه پایه‌ی دهم و یازدهم و دوازدهم رشته‌ی ریاضی تدریس می شود. این سه پایه به ترتیب دارای ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ دانش آموز می باشند. پس از برگزاری آزمون اطلاعات عمومی در این آموزشگاه ، از پایه‌ی دهم ۸ نفر و از پایه‌ی یازدهم ۹ نفر و از پایه‌ی دوازدهم ۶ نفر، موفق به کسب امتیاز کامل شده اند. دانش آموزی به تصادف از این سه پایه انتخاب می کنیم. چقدر احتمال دارد که این دانش آموز امتیاز کامل کسب نکرده باشد؟

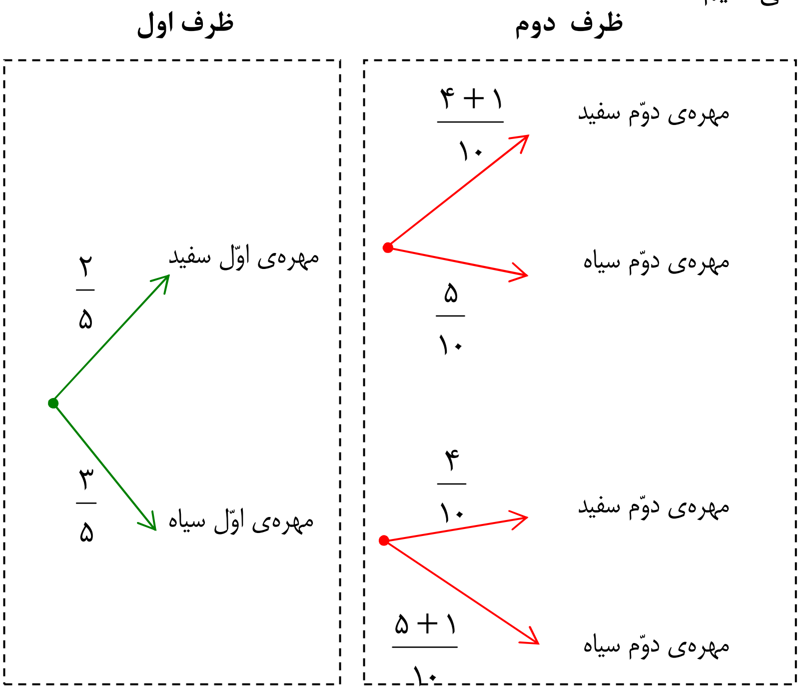


احتمال کسب نمره کامل $P(A)=\frac{۱}{۳}(\frac{۸}{۱۰})+\frac{۱}{۳}(\frac{۹}{۱۲})+\frac{۱}{۳}(\frac{۶}{۱۵})=\frac{۱}{۳}(\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۵})=\frac{۱۳}{۲۰}$

احتمال عدم کسب نمره کامل $P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱۳}{۲۰}=\frac{۷}{۲۰}$

تمرین۱۹: دو ظرف داریم، اوّلی شامل ۲ مهره سفید و۳ مهره سیاه و دوّمی شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است.از ظرف اوّل یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوّم قرار می دهیم. آنگاه از ظرف دوّم یک مهره بیرون می آوریم.احتمال آنرا حساب کنید که این مهره سفید است.

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه مهره‌ی انتخاب شده سفید باشد. برابر است با:

$$P(A)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۱}{۲۵}$$

توجه (فقط برای مطالعه) : در چنین موردی می توان به شکل زیر نیز عمل کرد.

دو ظرف داریم، اوّلی شامل m مهره سفید و n مهره سیاه و دوّمی شامل p مهره سفید و q مهره سیاه است. از ظرف اوّل یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوّم قرار می دهیم. آنگاه از ظرف دوّم یک مهره بیرون می آوریم. احتمال آنرا حساب کنید که این مهره سفید است.

	مهره سفید	مهره سیاه
ظرف اول	m	n
ظرف دوم	p	q

احتمال مهره سفید $P(A)=\frac{m}{m+n}\times\frac{p+1}{p+q+1}+\frac{n}{m+n}\times\frac{p}{p+q+1}$

$$=\frac{mp+m+np}{(m+n)(p+q+1)}=\frac{(m+n)p+m}{(m+n)(p+q+1)}=\frac{1}{p+q+1}(\frac{(m+n)p+m}{m+n})$$

$$=\frac{1}{p+q+1}(p+\frac{m}{m+n})$$

حالا به این مثال نیز توجه کنید.:

دو ظرف داریم، اوّلی شامل ۲ مهره سفید و۳ مهره سیاه و دوّمی شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است.از ظرف اوّل یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوّم قرار می دهیم. آنگاه از ظرف دوّم یک مهره بیرون می آوریم.

الف : احتمال آنرا حساب کنید که این مهره سفید است.

	مهره سفید	مهره سیاه
ظرف اول	$m=2$	$n=3$
ظرف دوم	$p=4$	$q=5$

$$P(A)=\frac{1}{p+q+1}(p+\frac{m}{m+n})=\frac{1}{4+5+1}(4+\frac{2}{2+3})=\frac{1}{10}(4+\frac{2}{5})=\frac{1}{10}(\frac{22}{5})=\frac{11}{25}$$

ب : احتمال آنرا حساب کنید که این مهره سیاه است.

$$P(B)=\frac{1}{p+q+1}(q+\frac{n}{m+n})=\frac{1}{4+5+1}(3+\frac{3}{2+3})=\frac{1}{10}(3+\frac{3}{5})=\frac{1}{10}(\frac{18}{5})=\frac{9}{25}$$

***

تمرین ۲۰ : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid(A_1\cap A_2))$$

حل :

$$P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid(A_1\cap A_2))$$
$$=P(A_1)\times\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}\times\frac{P(A_3\cap A_1\cap A_2)}{P(A_2\cap A_1)}=P(A_3\cap A_1\cap A_2)$$

تمرین برای حل :

۲۱: دو کیسه داریم که اوّلی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دوّمی ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می کنیم. می خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنید.

۲۲ : میوه فروشی ده صندوق از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی ، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه دار باشد، به ترتیب، ۱۰ درصد ، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب ها در صندوق های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از صندوق ها بر می داریم، لکه دار باشد، چقدر است؟

۲۳ : دسته ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک روز قرمز و یک رو سبز، کارتی به تصادف از این دسته انتخاب می کنیم و یک روی آن را می بینیم. احتمال اینکه آن رو قرمز باشد، چقدر است؟

(جواب: ۰/۶)

۲۴ : جمعیت بزرگسال در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهی نامه‌ی تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهی نامه‌ی تراکتور داشته باشد، چقدر است؟

۲۵ : دو ظرف داریم، در اوّلی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دوّمی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اوّل یک مهره به طور تصادفی بر می داریم و بدون مشاهده، آن را به ظرف دوّم منتقل می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوّم بیرون می آوریم، با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۲۶ : در شهری۶۰ درصد راننده ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال آنکه یک راننده‌ی مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام دهد. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند، چقدر است؟

۲۷ : در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه‌ی اوّل ۴ لامپ و در جعبه‌ی دوّم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه قرار می دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

قانون بیز

اگر B و A دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند. در این صورت:

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}\rightarrow P(A\bigcap B)=P(B).P(A|B)$$

با توجه به این تساوی می توان نوشت:

$$P(B|A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\times P(A|B)$$

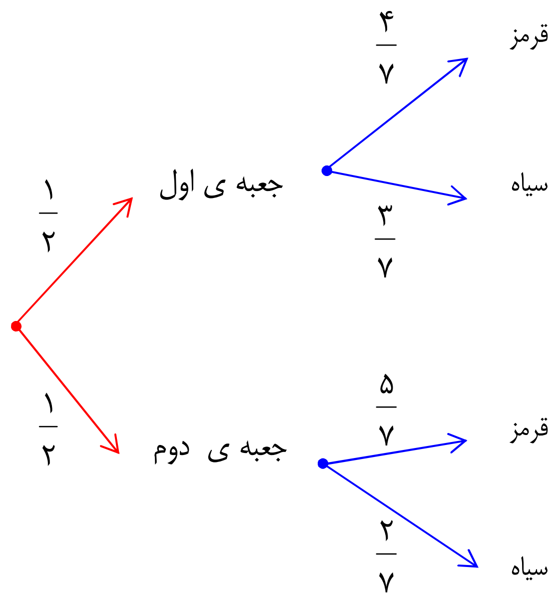
این رابطه را **قانون بیز** می نامند.

تمرین۲۸ : دو جعبه داریم. در جعبه‌ی اوّل ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه و در جعبه‌ی دوّم ۵ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه وجود دارد. یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می آوریم. اگر مهره‌ی انتخاب شده قرمز باشد، احتمال اینکه این مهره از جعبه‌ی اوّل انتخاب شده است، چقدر است؟

حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$B =$ جعبه‌ی اوّل $A =$ مهره قرمز

حال نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه مهره قرمز باشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۷})=\frac{۹}{۱۴}$$

احتمال اینکه مهره قرمز به شرط اینکه از جعبه‌ی اوّل باشد.برابراست با:

$$P(A|B)=\frac{۴}{۷}$$

همچنین احتمال اینکه مهره از جعبه‌ی اوّل ، به شرط اینکه قرمز باشد، برابر است با:

$$P(B|A)=\frac{P(B)}{P(A)}\times P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۱۴}}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۴}{۹}$$

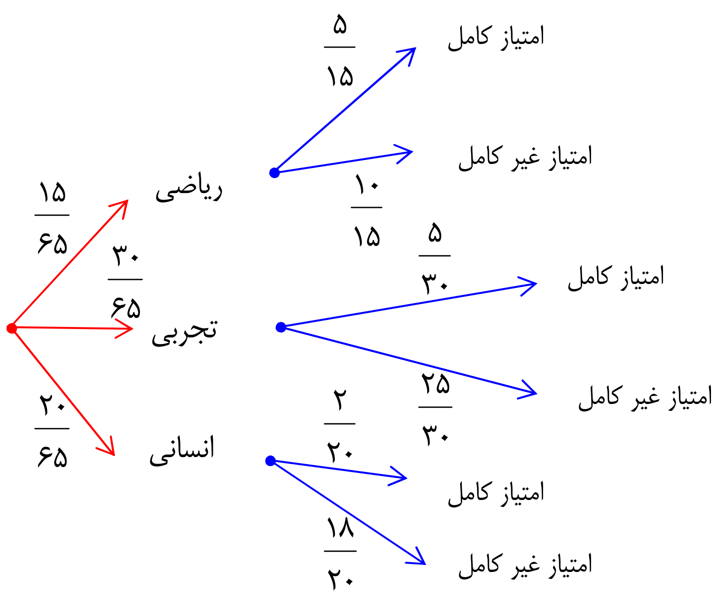
***

تمرین۲۹ : در یک مسابقه‌ی اطلاعات عمومی ۱۰۰ امتیازی، ۱۵ نفر دانش آموز رشته‌ی ریاضی ، ۳۰ نفر دانش آموز رشته‌ی تجربی، و ۲۰ نفر دانش آموز رشته‌ی انسانی شرکت می کنند. از بین دانش آموزان ریاضی و تجربی هر کدام ۵ نفر و از بین دانش آموزان رشته ی انسانی۲ نفر امتیاز کامل (۱۰۰) می گیرند. یک نفر را به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که امتیاز او کامل است. احتمال اینکه این دانش آموز رشته‌ی ریاضی باشد،چقدر است.

حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$B=$ رشته‌ی ریاضی $\qquad\qquad$ $A=$ امتیاز کامل

حال نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه این دانش آموز امتیاز کامل دریافت کرده باشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱۵}{۶۵}\times\frac{۵}{۱۵})+(\frac{۳۰}{۶۵}\times\frac{۵}{۳۰})+(\frac{۲۰}{۶۵}\times\frac{۲}{۲۰})=\frac{۱۲}{۶۵}$$

احتمال اینکه دانش آموز امتیاز کامل آورده به شرط اینکه رشته‌ی ریاضی باشد.برابراست با:

$$P(A|B)=\frac{۵}{۱۵}$$

همچنین احتمال اینکه دانش آموزی رشته‌ی ریاضی ، به شرط اینکه امتیاز کامل آورده باشد، برابر است با:

$$P(B|A)=\frac{P(B)}{P(A)}\times P(A|B)=\frac{\frac{۱۵}{۶۵}}{\frac{۱۲}{۶۵}}\times\frac{۵}{۱۵}=\frac{۵}{۱۲}$$

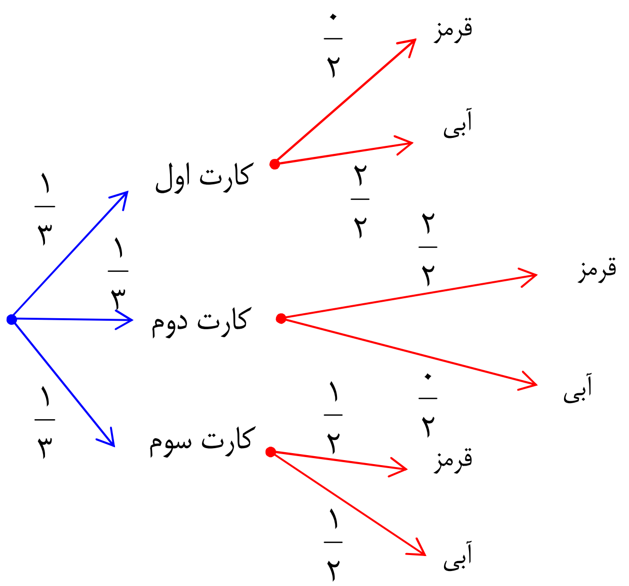
❋❋❋

تمرین ۳۰ : سه کارت هم شکل را در نظر می گیریم. هر دو طرف کارت اوّل آبی و هر دو طرف کارت دوم قرمز است ولی در کارت سوّم یک طرف قرمز و یک طرف آبی است. یکی از این کارت ها را به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که یک طرف آن قرمز است. احتمال اینکه طرف دیگر آن آبی باشد، چقدر است؟

حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$A=$ یک طرف قرمز $\qquad B=$ یک طرف آبی

حال نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه یک طرف کارت قرمزباشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۰}{۲})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۲})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

احتمال اینکه یک طرف کارت قرمز به شرط اینکه طرف دیگر آبی باشد.برابراست با:

$$P(A|B)=\frac{۱}{۲}$$

همچنین احتمال اینکه یک طرف کارت آبی ، به شرط اینکه طرف دیگر قرمز باشد، برابر است با:

$$P(B|A)=\frac{P(B)}{P(A)}\times P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}$$

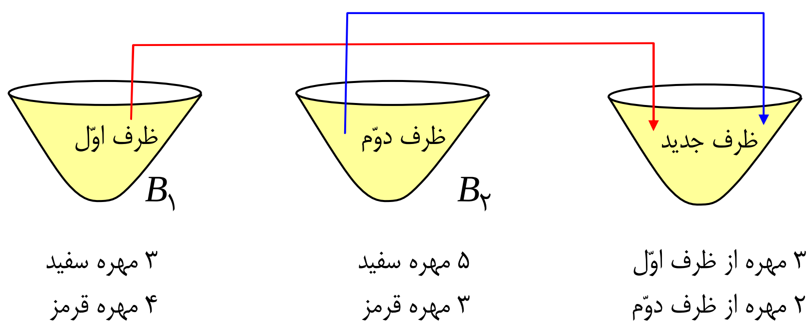
***

تمرین ۳۱ : دو ظرف همانند داریم.اوّلی شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. از ظرف اوّل ۳ مهره و از ظرف دوّم ۲ مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف جدیدی قرار می دهیم.اگر از ظرف جدید مهره ای به تصادف خارج کنیم.

الف) احتمال اینکه مهره سفید باشد، چقدر است؟

ب) اگر مهره‌ی خارج شده از ظرف جدید سفید باشد، احتمال اینکه از ظرف دوّم باشد،چقدر است؟

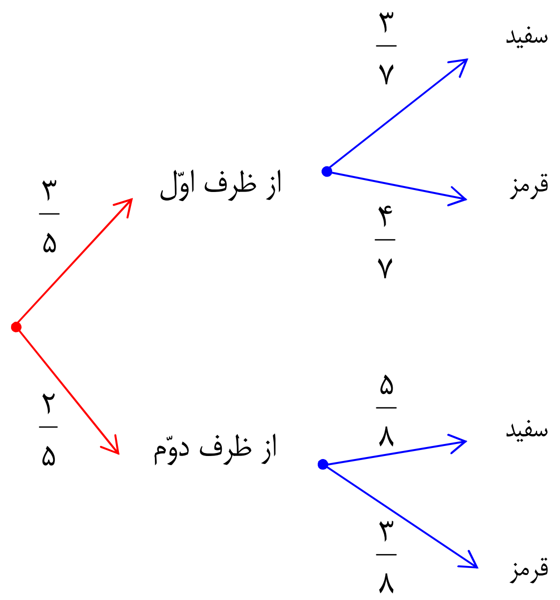
حل: **روش اوّل:**



حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$A=$ مهره سفید　　　　$B_۲=$ ظرف دوّم

حال نمودار درختی را رسم می کنیم.



$$P(A)=(\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۷})+(\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۸})=\frac{۷۱}{۱۴۰}$$

$$P(B_{۲}\mid A)=\frac{P(B_{۲})}{P(A)}\times P(A\mid B_{۲})=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۷۱}{۱۴۰}}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۳۵}{۷۱}$$

روش دوّم: ابتدا تعریف می کنیم:

$A =$ مهره‌ی خارج شده از ظرف جدید سفید باشد.

$B_{۱} =$ مهره‌ی خارج شده از ظرف جدید مربوط به ظرف اوّل باشد.

$B_{۲} =$ مهره‌ی خارج شده از ظرف جدید مربوط به ظرف دوّم باشد.

$$P(B_{۱})=\frac{۳}{۵} \quad , \quad P(A\mid B_{۱})=\frac{۳}{۷}$$

$$P(B_{۲})=\frac{۲}{۵} \quad , \quad P(A\mid B_{۲})=\frac{۵}{۸}$$

الف)

$$P(A)=P(B_{۱}).P(A\mid B_{۱})+P(B_{۲}).P(A\mid B_{۲})=\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۷۱}{۱۴۰}$$

ب)

$$P(B_{۲}\mid A)=\frac{P(B_{۲})}{P(A)}\times P(A\mid B_{۲})=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۷۱}{۱۴۰}}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۳۵}{۷۱}$$

تمرین۳۲ : امیر و بابک عضو تیم ده نفره والیبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است،

الف : احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد، چقدر است؟

ب : احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد، چقدر است؟

حل : دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می کنیم.

$A \to P(A)=\frac{۱}{۱۰}$: امیر بلندقدترین عضو تیم است.

$B \to P(B)=\frac{۱}{۲}$: امیر از بابک بلندقدتر است.

$A \subseteq B \to A \cap B = A \to P(A\cap B)=P(A)$

احتمال اینکه امیر بلندقدترین باشد، با فرض اینکه امیر از بابک بلندقدتر است به صورت زیر است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۵}$$

ب : اگر پیشامد اینکه امیر از نظر بلندی قد نفر نهم باشد را C در نظر بگیریم، در این صورت $P(C)=\frac{۱}{۱۰}$.

از طرفی واضح است که $P(B|C)=\frac{۱}{۹}$ و ما می خواهیم $P(C|B)$ را حساب کنیم. لذا :

$$P(C|B)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{P(C)}{P(B)}\times P(B|C)=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۴۵}$$

***

تمرین۳۳ : علی و مازیار هر کدام با احتمال ۰/۴ و ۰/۳ برای دیدن یک مسابقه ی ورزشی به ورزشگاه می روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۶ به ورزشگاه می رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

حل: پیشامد آنکه علی به ورزشگاه برود را A و پیشامد آنکه مازیار به ورزشگاه برود را M می نامیم. بنابراین:

$P(A)=۰/۴$ و $P(M)=۰/۳$ و $P(M|A)=۰/۶$ و $P(M'|A')=?$

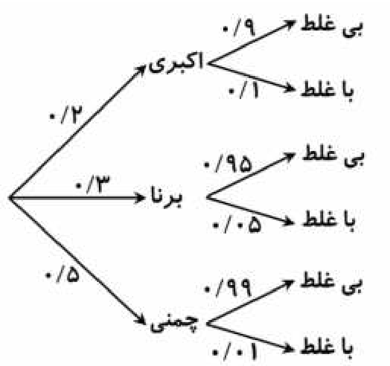
$$P(M \cap A) = P(A) \times P(M \mid A) = ۰/۴ \times ۰/۶ = ۰/۲۴$$

$$P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = ۰/۳ + ۰/۴ - ۰/۲۴ = ۰/۴۶$$

$$P(M' \mid A') = \frac{P(M' \cap A')}{P(A')} = \frac{۱ - P(M \cup A)}{۱ - P(A)} = \frac{۱ - ۰/۴۶}{۱ - ۰/۴} = \frac{۹}{۱۰}$$

تمرین۳۴ : خانم ها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوان های یک موسسه‌ی انتشاراتی اند که به ترتیب ۲۰ و ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه ای که بـه آنهـا سپرده شده را بی غلط تصحیح کنند به ترتیب ۰/۹ و ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه ای نسخه خوانی شده ولـی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد، چقدر است؟

حل : ابتدا نمودار روبرو را رسم می کنیم. سپس قانون بیز را می نویسیم.



$$P(A) = ۰/۲ \times ۰/۱ + ۰/۳ \times ۰/۰۵ + ۰/۵ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۴$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)}{P(A)} \times P(A \mid B) = \frac{۰/۲}{۰/۰۴} \times ۰/۱ = ۰/۵$$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @ameriameri

درس چهارم : پیشامد های مستقل و وابسته

گاهی نتایج یک آزمایش تصادفی وابسته به نتیجه‌ی یک آزمایش دیگر است و گاهی مستقل از آن می باشد. در این درس به معرفی پیشامد های مستقل و وابسته می پردازیم.

پیشامد های مستقل و وابسته

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، بطوری که $P(A),P(B)>0$، آنگاه این دو پیشامد را مستقل گوییم، هرگاه احتمال وقوع یکی از آنها بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر دو پیشامد A و B مستقل نباشند، آنها را وابسته می گوییم.

نتیجه :

۱) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت:

$$P(A|B)=P(A)$$
$$P(B|A)=P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

۲) اگر A و B دو پیشامد وابسته باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A).P(B|A)\\&=P(B).P(A|B)\end{aligned}$$

توجه : اگر حداقل یکی از دو پیشامد A و B تهی باشد. این دو پیشامد مستقل هستند.

تمرین ۱: یک سکه و یک تاس را به طور همزمان پرتاب می کنیم. فرض کنید A پیشامد۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه است. نشان دهید که این دو پیشامد مستقل هستند.

حل : طبق مسئله داریم:

$$S=\{(R,۱),(P,۱),(R,۲),(P,۲),(R,۳),(P,۳),(R,۴),(P,۴),(R,۵),(P,۵),(R,۶),(P,۶)\}$$

$$A=\{(R,۶),(P,۶)\} \quad و \quad B=\{(R,۱),(R,۲),(R,۳),(R,۴),(R,۵),(R,۶)\}$$

حل کافی است که نشان دهیم.

الف : $P(A|B)=P(A)$ ب : $P(B|A)=P(B)$ ج : $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

$$A\cap B=\{(R,۶)\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۶} \quad \text{و} \quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A|B)=P(A)$$

$$P(B|A)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(A)}=\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(B|A)=P(B)$$

$$P(A).P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۲}=P(A\bigcap B)$$

تمرین۲ : جعبه ای محتوی۱۲ لامپ است و می دانیم که ۳ تای آنها معیوب اند. از این جعبه به تصادف یک لامپ بر می داریم، سپس بدون جایگذاری لامپ اوّل، لامپ دیگری به تصادف بر می داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند، چقدر است؟

حل: تعریف می کنیم:

$B=$ پیشامد لامپ دوّم معیوب و $A=$ پیشامد لامپ اوّل معیوب

چون معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ اوّل هیچ تأثیری بر معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ دوّم ندارد، پس دو پیشامد B و A مستقل هستند. در این صورت:

$$P(A\bigcap B)=P(A).P(B)=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۲۲}$$

تمرین۳ : اگر $P(B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۶}$ و دو پیشامد B و A مستقل باشند. $P(A\bigcup B)$ را بدست آورید.

حل :

$$P(A|B)=P(A)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A\bigcap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

توجه : مستقل بودن دو پیشامد، در بسیاری از موارد، نیاز به بررسی ندارد. به عنوان مثال قبولی در درس فیزیک برای دو دانش آموز ، دو پیشامد مستقل می باشند. زیرا قبولی یا عدم قبولی یکی هیچ تأثیری روی دیگری ندارد و لذا نیازی به بررسی مستقل بودن این دو پیشامد نیست.

تمرین۴ : ۷۵ درصد افراد جامعه ای چشم میشی و ۴۰ درصد گروه خونی A دارند، یک فرد به تصادف انتخاب می کنیم.احتمال آنکه این فرد چشم میشی یا گروه خونی A داشته باشند، کدام است؟

۱)۰/۷۸ ۲) ۰/۸۲ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹۵

حل: دو پیشامد چشم میشی بودن و گروه خونی A داشتن مستقل هستند،پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۵}-(\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۵})=\frac{۱۷}{۲۰}=۰/۸۵$$

تمرین برای حل :

۵ : در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهده‌ی عدد ۳ در تاس اوّل و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد. مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۶ : در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهده‌ی عدد ۳ در تاس اوّل و B پیشامد مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس باشد. مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۷ : سکه‌ی سالمی را سه بار پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد رو در پرتاب دوّم و B پیشامد مشاهده ی فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۸ : احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه۷۰ درصد است، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود را به دست آورید.

۹ : در یک مسابقه‌ی تیر اندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیر اندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

***

انتخاب های با جایگذاری و بدون جایگذاری

دسته‌ای از مسائل مربوط به احتمال پیشامد های مستقل و وابسته، به انتخاب های با جایگذاری و بدون جایگذاری موسومند. در تمرین های بعدی بیشتر با این مسائل آشنا می شوید.

تمرین ۱۰: از جعبه ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگذاری ، بیرون می آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهره‌ی اوّل و B پیشامد قرمز بودن دوّمین مهره باشد.

الف: احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

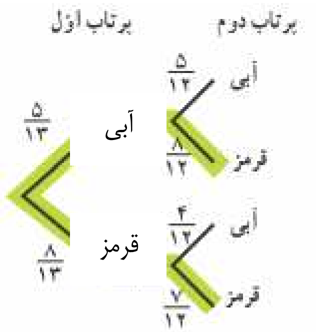
ب : مستقل یا وابسته بودن پیشامدهای A و B را بررسی کنید.

حل :

الف :

$$P(A\bigcap B)=P(A)\times P(A|B)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

ب : کافی است، $P(B)$ و $P(B|A)$ را محاسبه و مقایسه کنیم.



$$P(B)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۸}{۱۳}$$

لذا چون $P(B|A)\neq P(B)$، بنابراین دو پیشامد A و B وابسته اند.

تمرین ۱۱: در پرتاب دو تاس به طور پی در پی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اوّل باشد. مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

حل :

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}\rightarrow P(A)=\frac{۱۰}{۳۶}$$

$$B=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}\rightarrow P(B)=\frac{۶}{۳۶}$$

$$A\cap B=\{(۳,۲),(۳,۴)\}\rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۳۶}$$

$$\left.\begin{array}{l}P(A)\times P(B)=\frac{۱۰}{۳۶}\times\frac{۶}{۳۶}\\ P(A\cap B)=\frac{۲}{۳۶}\end{array}\right\}\rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

تمرین۱۲ : از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ یک عضو انتخاب می کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش پذیر بر ۳ باشد، مستقل A و B را بررسی کنید.

حل :

$$A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}\rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۰}$$

$$B=\{۳,۶,۹\}\rightarrow P(B)=\frac{۳}{۱۰}$$

$$A\cap B=\{۶\}\rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\left.\begin{array}{l}P(A)\times P(B)=\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰}\\ P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}\end{array}\right\}\rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

تمرین۱۳: کیسه‌ای شامل ۵ مهره سیاه و۳ مهره سفید است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از این کیسه بیرون می آوریم.

الف) احتمال آنکه اوّلی سیاه و دوّمی سفید باشد،چقدر است؟

ب) احتمال آنکه هر دو سیاه باشند،چقدر است؟

حل: واضح است که دو پیشامد استخراج مهره مستقل هستند. پس:

الف: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱۵}{۵۶}$ ب: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۲۰}{۵۶}$

تمرین۱۴: کیسه ای شامل ۵ مهره سیاه و ۳ مهره سفید است. دو مهره متوالیاً و با جایگذاری از این کیسه بیرون می آوریم.

الف) احتمال آنکه اوّلی سیاه و دوّمی سفید باشد،چقدر است؟

ب) احتمال آنکه هر دو سیاه باشند،چقدر است؟

حل: واضح است که دو پیشامد استخراج مهره مستقل[1] هستند. پس

الف: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۵}{۶۴}$ ب: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۲۵}{۶۴}$

تمرین۱۵: درکیسه‌ای۷ مهره سیاه و ۳ مهره سفید وجود دارد. سه مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی از این کیسه بیرون می آوریم.

الف) احتمال آنکه اوّلی سیاه و دوّمی سیاه و سوّمی سفید باشد،چقدر است؟

ب) احتمال آنکه هر سه سیاه باشند، چقدر است؟

حل: واضح است که سه پیشامد استخراج مهره مستقل هستند. پس

الف: $\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۲۶}{۷۲۰}$ ب: $\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۲۱۰}{۷۲۰}$

تمرین۱۶: درکیسه ای ۷ مهره سیاه و ۳ مهره سفید و ۵ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی از این کیسه بیرون می آوریم.احتمال آنکه اوّلی سیاه و دوّمی سفید و سوّمی قرمز باشد،چقدر است؟

حل: واضح است که سه پیشامد استخراج مهره مستقل هستند. پس $\frac{۷}{۱۵}\times\frac{۳}{۱۴}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۱۰۵}{۲۷۳۰}$

تمرین۱۷: درکیسه ای ۹ مهره با شماره های منحصر بفرد از ۱ تا ۹ وجود دارد. از این کیسه ۲ مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی به تصادف بیرون می آوریم. احتمال آن را حساب کنید که مجموع شماره های بیرون آمده زوج باشد.

حل : در این کیسه ۵ مهره فرد و ۴ مهره زوج قرار دارد. از طرفی وقتی مجموع شماره های بیرون آمده زوج است که هر دو مهره‌ی استخراج شده فرد یا هر دو زوج باشند. لذا

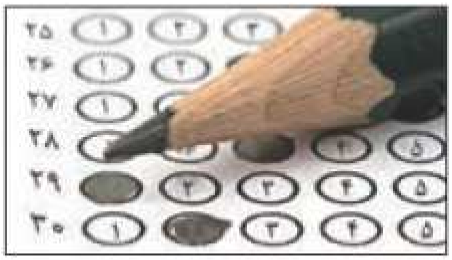
[1]. به طور کلی انتخاب هایی که با جایگذاری انجام می شوند، مستقل هستند.

$$P(A)=\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۲۰}{۷۲}+\frac{۱۲}{۷۲}=\frac{۳۲}{۷۲}=\frac{۴}{۹}$$

تمرین ۱۸ : یک سکه و دو تاس به طور همزمان پرتاب می شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

حل : پیشامد اینکه سکه رو باشد را A و پیشامد ۶ آمدن هر دو تاس را B می گیریم. واضح است که این دو پیشامد مستقل از یکدیگر هستند. بنابراین احتمال اینکه سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ باشد. به صورت زیر است.

$$P(A\bigcap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۷۲}$$



تمرین ۱۹: در یک امتحان پنج گزینه ای، ۱۰ سئوال مطرح شده است. اگر یک دانش آموز به تمام سئوالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که :

الف : به تمام سئوال ها پاسخ صحیح داده شود.

ب : تنها به پنج سئوال اوّل پاسخ صحیح داده باشد.

ج : به نیمی از سئوال ها پاسخ صحیح داده باشد.

حل :

الف: احتمال پاسخ صحیح به هر سئوال $\frac{۱}{۵}$ است و صحیح یا غلط بودن هر سئوال مستقل از دیگری است. لذا

$$\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times...\times\frac{۱}{۵}=(\frac{۱}{۵})^{۱۰}$$

ب : احتمال پاسخ صحیح به هر سئوال $\frac{۱}{۵}$ و احتمال غلط بودن آن $\frac{۴}{۵}$است. بنابراین:

$$\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times...\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times...\times\frac{۴}{۵}=(\frac{۱}{۵})^{۵}\times(\frac{۴}{۵})^{۵}=(\frac{۴}{۲۵})^{۵}=(\frac{۲}{۵})^{۱۰}$$

ج :

$$\binom{۱۰}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times...\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times...\times\frac{۴}{۵}=\binom{۱۰}{۵}\times(\frac{۲}{۵})^{۱۰}$$

تمرین برای حل :

۲۰: درکیسه ای ۱۰۰ مهره با شماره های منحصر بفرد از ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی به تصادف بیرون می آوریم. احتمال آن را حساب کنید که اوّلی زوج و دوّمی فرد و سوّمی زوج باشند.

۲۱: درکیسه ای ۱۰۰ مهره با شماره های منحصر بفرد از ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد. از این کیسه ۴ مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی به تصادف بیرون می آوریم.

الف : احتمال آن را حساب کنید که اوّلی و دوّمی فرد و سوّمی و چهارمی زوج باشند.

ب : احتمال آن را حساب کنید که اوّلی و دوّمی و سوّمی فرد و چهارمی زوج باشند.

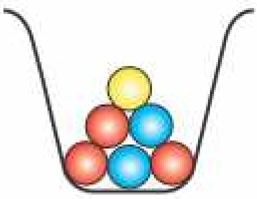
۲۲: خانواده ای ۴ فرزند دارد.

الف : احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟ (ج : $\frac{۱}{۱۶}$)

ب : احتمال اینکه فقط فرزند اوّل و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟ (ج : $\frac{۱}{۱۶}$)

ج : احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟ (ج : $\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۱۶}\times۶$)

۲۳ : در یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز ، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است، دو مهره به تصادف و با جایگذاری بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :



الف : هر دو مهره قرمز باشند. (ج : $\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$)

ب : حداقل یک مهره آبی باشد. (ج: $\frac{۵}{۹}=\frac{۴}{۳۶}+\frac{۸}{۳۶}+\frac{۸}{۳۶}$)

ج : هر دو مهره همرنگ باشند. (ج: $\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۴}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}$)

***

نکات تکمیلی پیشامد های مستقل و وابسته

در انتهای این درس، نکاتی مهم پیرامون پیشامد های مستقل و وابسته بیان می کنیم.

تمرین۲۴ : اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، نشان هید که:

الف) دو پیشامد B' و A' نیز مستقل هستند.

ب) دو پیشامد B و A' نیز مستقل هستند.

ج) دو پیشامد B' و A نیز مستقل هستند.

حل:

الف:

$$\begin{aligned}P(A'\cap B') &= P(A\cup B)' = ۱-P(A\cup B) = ۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))\\ &= ۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B) = ۱-P(A)-P(B)+P(A).P(B)\\ &= (۱-P(A))-P(B)(۱-P(A)) = P(A')-P(B).P(A')\\ &= P(A')(۱-P(B)) = P(A').P(B')\end{aligned}$$

$$P(A'|B') = \frac{P(A'\cap B')}{P(B')} = \frac{P(A')\times P(B')}{P(B')} = P(A')$$

$$P(B'|A') = \frac{P(A'\cap B')}{P(A')} = \frac{P(A')\times P(B')}{P(A')} = P(B')$$

ب:

$$\begin{aligned}P(A'\cap B) &= P(B-A) = P(B)-P(A\cap B)\\ &= P(B)-P(A).P(B) = P(B)(۱-P(A))\\ &= P(B).P(A')\end{aligned}$$

$$P(A'|B) = \frac{P(A'\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A')\times P(B)}{P(B)} = P(A')$$

$$P(B|A') = \frac{P(A'\cap B)}{P(A')} = \frac{P(A')\times P(B)}{P(A')} = P(B)$$

ج: مانند ب حل می شود و حل آن به فراگیران محترم واگذار می شود.

تمرین ۲۵ : اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، ثابت کنید که : $P(A\bigcup B)=1-P(A').P(B')$

حل :

$$P(A\bigcup B)=1-P(A\bigcup B)'=1-P(A'\bigcap B')=1-P(A').P(B')$$

تمرین ۲۶ : هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

۱) $P((A-B)|A)=1-P(B|A)$

۲) $P(A'|B)=1-P(A|B)$

۳) $P((A\bigcup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)-P((A\bigcap B)|C)$

۴) $P((A-B)|C)=P(A|C)-P((A\bigcap B)|C)$

اثبات :

۱ :

$$P((A-B)|A)=\frac{P((A-B)\bigcap A)}{P(A)}=\frac{P(A-B)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\bigcap B)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A)}-\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=1-P(B|A)$$

۲ :

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\bigcap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\bigcap B)}{P(B)}=1-P(A|B)$$

۳ :

$$P((A\bigcup B)|C)=\frac{P((A\bigcup B)\bigcap C)}{P(C)}=\frac{P((A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C))}{P(C)}$$

$$=\frac{P(A\bigcap C)+P(B\bigcap C)-P((A\bigcap C)\bigcap(B\bigcap C))}{P(C)}$$

$$=\frac{P(A\bigcap C)}{P(C)}+\frac{P(B\bigcap C)}{P(C)}-\frac{P((A\bigcap B)\bigcap C)}{P(C)}$$

$$=P(A|C)+P(B|C)-P((A\bigcap B)|C)$$

۴ :

$$P(A|C)-P((A\bigcap B)|C)=\frac{P(A\bigcap C)}{P(C)}-\frac{P(A\bigcap B\bigcap C)}{P(C)}$$

$$=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}-\frac{P((A\cap C)\cap B)}{P(C)}$$

$$=\frac{P((A\cap C)-B)}{P(C)}=\frac{P((A\cap C)\cap B')}{P(C)}=\frac{P((A\cap B')\cap C)}{P(C)}$$

$$=\frac{P((A-B)\cap C)}{P(C)}=P((A-B)|C)$$

تمرین ۲۷ : اگر A و B و C سه پیشامد دو به دو مستقل باشند. ثابت کنید که

$$P(A\cup B\cup C)=۱-P(A').P(B')P(C')$$

حل :

$$P(A\cup B\cup C)=۱-P(A\cup B\cup C)'$$

$$=۱-P(A'\cap B'\cap C')=۱-P(A').P(B')P(C')$$

تمرین ۲۸ : احتمال موفقیت مهدی و کاظم و امین در امتحانات پایان ترم به ترتیب ۰/۸ و ۰/۷ و ۰/۹ است.

احتمال آنکه حداقل یکی از این سه نفر در امتحان موفق شوند، را محاسبه کنید.

حل :

$$P(A\cup B\cup C)=۱-P(A').P(B')P(C')=۱-(۰/۲)(۰/۳)(۰/۱)=۱-۰/۰۰۶=۰/۹۹۴$$

تمرین ۲۹ : اگر دو پیشامد A و B ناتهی و مستقل باشند. ثابت کنید که سازگارند.

حل :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)\xrightarrow{A,B\neq\Phi\to P(A),P(B)\neq ۰}P(A\cap B)\neq ۰\to A\cap B\neq\Phi$$

تمرین ۳۰ : اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه ای S باشند، آیا A و B می توانند مستقل باشند؟ چرا؟

حل : خیر، دو پیشامد ناسازگار در صورتی مستقل از یکدیگرند که حداقل یکی از آنها تهی باشد. زیرا اگر $P(A\cap B)=۰$ در این صورت $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰$ که نتیجه می دهد $P(A)=۰$ یا $P(B)=۰$

تمرین ۳۱ : اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E\subseteq A$ و $F\subseteq B$ دو زیر مجموعه‌ی ناتهی باشند. آیا E و F نیز همیشه مستقل اند؟ چرا؟

حل : می توانند مستقل و می توانند وابسته باشند. به مثال های زیر توجه کنید.

برای دو پیشامد $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,c\}$ از فضای نمونه ای $S=\{a,b,c,d\}$ داریم.

$$A\bigcap B=\{a\}\to P(A)=\frac{۱}{۲},\ P(B)=\frac{۱}{۲}\ ,\ P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۴}$$

یعنی A و B مستقل هستند. $\Rightarrow P(A\bigcap B)=P(A)\times P(B)$

اکنون تعریف می کنیم.

$$E=\{a\}\to P(E)=\frac{۱}{۴} \text{ و } F=\{c\}\to P(F)=\frac{۱}{۴}$$

$$E\bigcap F=\{\}\to P(E\bigcap F)=۰$$

لذا $P(E)\times P(F)=\frac{۱}{۱۶}\neq P(E\bigcap F)$ یعنی E و F مستقل نیستند.

تمرین ۳۲ : جعبه ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جایگذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

الف : هر سه لامپ معیوب باشند.

ب : حداقل یک لامپ معیوب باشد.

حل : تعریف می کنیم.

A احتمال سالم بودن لامپ اوّل و B احتمال سالم بودن لامپ دوّم و C احتمال سالم بودن لامپ سوّم

در این صورت:

الف : سالم و معیوب بودن هر لامپ مستقل از دیگری است. پس :

$$P(A'\bigcap B'\bigcap C')=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۲۲۰}$$

ب : یعنی احتمال اینکه هر سه لامپ سالم نباشند. بنابراین:

$$۱-P(A\bigcap B\bigcap C)=۱-P(A)\times P(B)\times P(C)=۱-\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۳۴}{۵۵}$$

تمرین ۳۳: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، طوری که $P(A\bigcap B)=۰/۱$ و $P(A\bigcap B')=۰/۴$، حاصل $P(A\bigcup B')$ را به دست آورید.

حل :

$P(A\bigcap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$

$\rightarrow ۰/۴=P(A)-۰/۱\rightarrow P(A)=۰/۵$

$P(A\bigcap B)=P(A)\times P(B)\rightarrow ۰/۱=۰/۵\times P(B)\rightarrow P(B)=۰/۲$

$P(A\bigcup B')=P(A)+P(B')-P(A\bigcap B')=۰/۵+۰/۸-۰/۴=۰/۹$

***

تهیه کننده : جابر عامری، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir