دبیرستان
استعداد های ناب صالحین

ناحیه ۳ اهواز

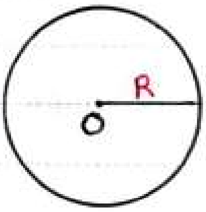
جزوه ی درس ریاضیات پایه نهم

فصل هشتم

حجم و مساحت

فصل نهم: حجم و مساحت

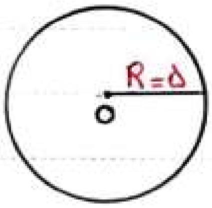
تعریف دایره: مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که همه‌ی آن نقاط، از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله‌ی ثابت و مشخص هستند.



نکته: به این اندازه‌ی ثابت، شعاع دایره می‌گوئیم. و آن را با حرف R نشان می‌دهیم

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{مساحت دایره} = \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{عدد پی} \\ \text{محیط دایره} = \text{قطر} \times \text{عدد پی}\end{array}}$$

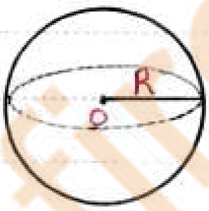
مثال: محیط و مساحت دایره‌ی مقابل را بدست آورید.



$$\text{مساحت دایره} = \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{عدد پی}$$
$$= ۵ \times ۵ \times \pi = ۲۵\pi$$
$$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times \text{عدد پی}$$
$$= (۲ \times ۵) \times \pi = ۱۰\pi$$

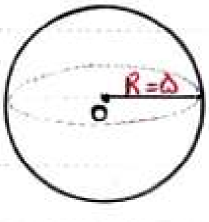
تعریف کره: مجموعه‌ی نقاطی از فضا است که همه‌ی آن نقطه‌ها، از یک نقطه در همان فضا به نام مرکز به یک فاصله‌ی ثابت و مشخص هستند.

نکته: به این اندازه‌ی ثابت شعاع کره گفته می‌شود و آن را با حرف R نشان می‌دهیم



$$\boxed{\begin{array}{c}\text{حجم کره} = \dfrac{۴ \times \pi \times R^۳}{۳} = \dfrac{۴}{۳}\pi R^۳ \\ \text{مساحت کره} = ۴ \times \pi \times R^۲ = ۴\pi R^۲\end{array}}$$

مثال: حجم و مساحت کره‌ی مقابل را بدست آورید. $(\pi = ۳)$

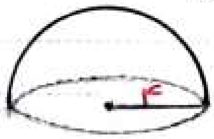


$$\text{حجم کره} = \dfrac{۴ \times \pi \times R^۳}{۳} = \dfrac{۴ \times \cancel{۳} \times ۵^۳}{\cancel{۳}} = ۴ \times ۱۲۵ = ۵۰۰$$

$$\text{مساحت کره} = ۴ \times \pi \times R^۲ = ۴ \times ۳ \times ۵^۲ = ۱۲ \times ۲۵ = ۳۰۰$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۴

مثال: حجم و مساحت یک کلاه (عرقچین) به شکل روبه‌رو نیم کره با شعاع ۴cm را بدست آورید.



جواب:

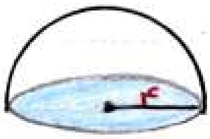
$$\text{حجم کره} = \frac{۴\times\pi\times R^{۳}}{۳} = \frac{۴\times\cancel{۳}\times ۴^{۳}}{\cancel{۳}} = ۴\times ۶۴ = ۲۵۶$$

$$\text{حجم نیم کره} = ۲۵۶ \div ۲ = ۱۲۸$$

$$\text{مساحت کره} = ۴\times\pi\times R^{۲} = ۴\times ۳\times ۴^{۲} = ۱۲\times ۱۶ = ۱۹۲$$

$$\text{مساحت نیم کره} = ۱۹۲ \div ۲ = ۹۶$$

مثال: حجم و مساحت نیم کره‌ی توپر فلزی مقابل را بدست آورید. $(\pi = ۳)$



$$\text{حجم کره} = \frac{۴\times\pi\times R^{۳}}{۳} = \frac{۴\times\cancel{۳}\times ۴^{۳}}{\cancel{۳}} = ۴\times ۶۴ = ۲۵۶$$

$$\text{حجم نیم کره} = ۲۵۶ \div ۲ = ۱۲۸$$

نکته: چون این نیم کره توپر است بنابراین دارای قاعده‌ای می‌باشد. و باید مساحت قاعده‌ی این نیم کره را نیز محاسبه کنیم.

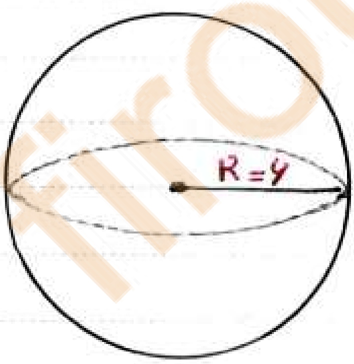
$$\text{مساحت کره} = ۴\times\pi\times R^{۲} = ۴\times ۳\times ۴^{۲} = ۱۲\times ۱۶ = ۱۹۲$$

$$\text{مساحت نیم کره} = ۱۹۲ \div ۲ = ۹۶$$

$$\text{مساحت قاعده (دایره‌ی پایینی)} = \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{عدد پی} = ۴\times ۴\times ۳ = ۴۸$$

$$\text{مساحت نیم کره‌ی توپر فلزی} = ۹۶ + ۴۸ = ۱۴۴$$

مثال: حجم و مساحت یک کره با شعاع ۶cm را بدست آورید.



$$\text{حجم کره} = \frac{۴\pi R^{۳}}{۳} = \frac{۴\times\pi\times ۶^{۳}}{۳} = \frac{۴\times\pi\times \cancel{۶}^{۲}\times ۶\times ۶}{\cancel{۳}_{۱}} = ۲۸۸\pi$$

$$\text{مساحت کره} = ۴\pi R^{۲} = ۴\times\pi\times ۶^{۲} = ۴\times\pi\times ۳۶ = ۱۴۴\pi$$

نکته‌ی مهم: حجم یک نیم کره را از فرمول $\left(V = \frac{۲}{۳}\pi R^{۳}\right)$ نیز می‌توانیم بدست آوریم. زیرا:

$$\text{حجم} = \frac{\text{حجم کره}}{۲} = \frac{\frac{۴\pi R^{۳}}{۳}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{\cancel{۴}^{۲}\pi R^{۳}}{\cancel{۶}_{۳}} = \frac{۲\pi R^{۳}}{۳} = \frac{۲}{۳}\pi R^{۳}$$

مثال: مساحت یک کره 144π است.

الف) شعاع این کره چقدر است؟

ب) حجم این کره را بدست آورید.

$$\text{مساحت کره} = 144\pi$$
$$4\pi R^2 = 144\pi$$
$$R^2 = \frac{144\pi}{4\pi} = 36$$
$$R = 6$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\times\pi\times 6^3}{3} = \frac{4\times\pi\times 216}{3} = 288\pi$$

مثال: حجم یک کره 972π می باشد

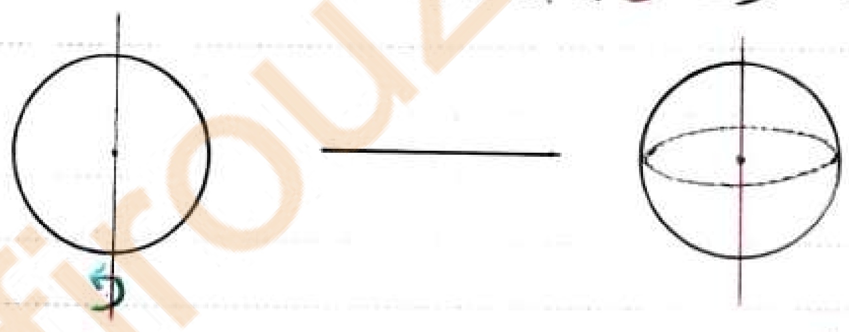
الف) شعاع این کره چقدر است؟

ب) مساحت این کره را بدست آورید.

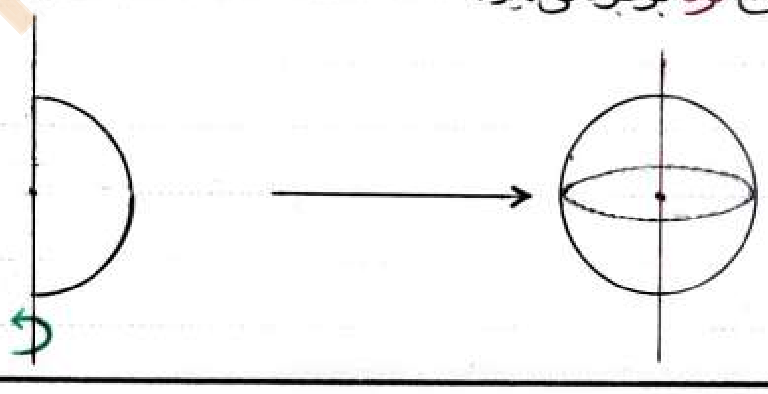
$$\text{حجم کره} = 972\pi$$
$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{972\pi}{1}$$
$$4\pi R^3 = 2916\pi$$
$$R^3 = \frac{2916\pi}{4\pi} = 729 \Rightarrow R = 9$$

$$\text{مساحت کره} = 4\pi R^2 = 4\times\pi\times 9^2 = 4\times\pi\times 81 = 324\pi$$

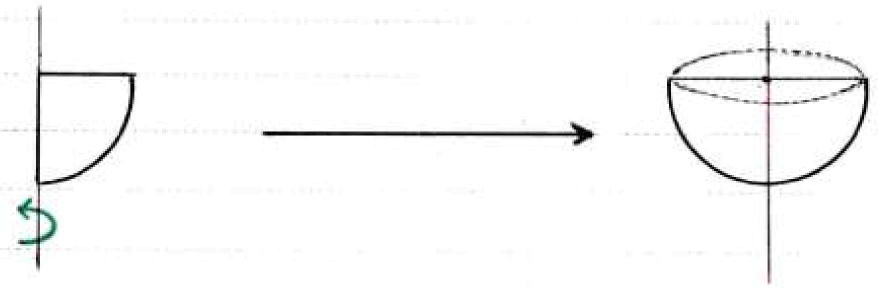
نکته ی مهم: از دوران یک دایره حول قطر آن کره بوجود می آید.



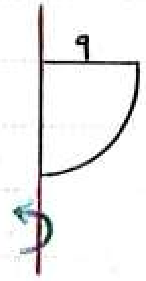
نکته: از دوران یک نیم دایره حول قطر آن کره بوجود می آید.



نکته : از دوران یک ربع دایره حول شعاع آن نیم کره بوجود می آید.



مثال: ربع دایره ی مقابل را حول شعاع آن دوران می دهیم.



الف) چه شکلی بوجود می آید؟

ب) حجم آن را بدست آورید. ($\pi = 3$)

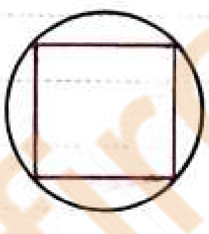
جواب الف) نیم کره بوجود می آید.

جواب ب) ابتدا حجم یک کره به شعاع ۹ را محاسبه می کنیم و سپس جواب بدست آمده را بر ۲ تقسیم می کنیم تا حجم نیم کره بدست آید.

$$\text{حجم کره} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\times\cancel{3}\times 9^3}{\cancel{3}} = 2916$$

$$\text{حجم نیم کره} = 2916 \div 2 = 1458$$

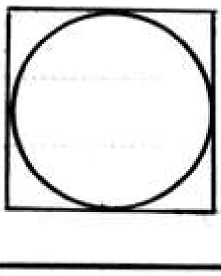
نکته ی مهم : در شکل مقابل یک دایره رسم شده است و داخل این دایره یک مربع به گونه ای رسم شده است که چهار گوشه ی آن روی محیط دایره قرار دارند. در چنین حالتی می گوییم:



الف) مربع در دایره محاط شده است

ب) دایره بر مربع محیط شده است.

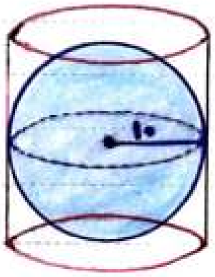
نکته ی مهم : در شکل مقابل یک مربع رسم شده است و داخل این مربع یک دایره به گونه ای رسم شده است که هر چهار ضلع مربع بر دایره مماس هستند. در چنین حالتی می گوییم:



الف) دایره در مربع محاط شده است

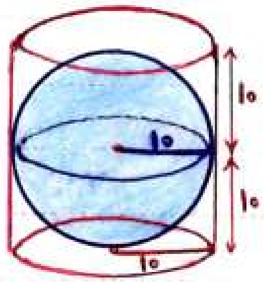
ب) مربع بر دایره محیط شده است.

مثال: کره‌ای به شعاع $10cm$ در یک استوانه محاط شده است.



الف) حجم کره چقدر است؟ ($\pi=3$)
ب) حجم استوانه چقدر است؟ ($\pi=3$)
ج) حجم فضای خالی بین کره و استوانه چقدر است؟ ($\pi=3$)
د) نسبت حجم کره به حجم استوانه چقدر است؟ ($\pi=3$)
هـ) نسبت حجم استوانه به حجم کره چقدر است؟ ($\pi=3$)

جواب:



جواب الف) $\text{حجم کره} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\times 3\times 10^3}{\cancel{3}} = 4\times 1000 = 4000$

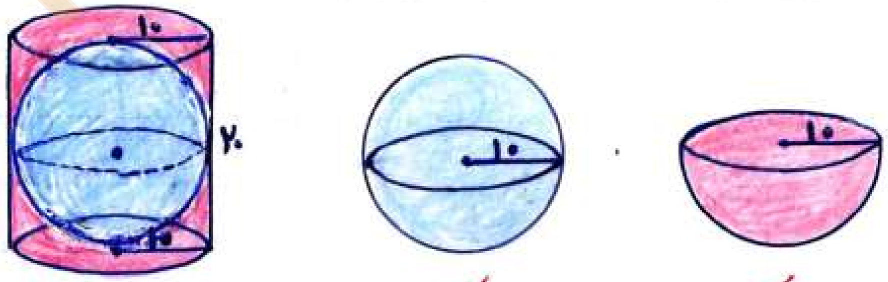
جواب ب) $\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = (10\times 10\times 3)\times 20 = 6000$

جواب ج) $\text{حجم فضای خالی بین کره و استوانه} = 6000 - 4000 = 2000$

جواب د) $\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{4000}{6000} = \frac{2}{3}$

جواب هـ) $\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{حجم کره}} = \frac{6000}{4000} = \frac{3}{2} = 1/5$

در واقع اگر یک کره در یک استوانه محاط شده باشد، حجم آن استوانه $\frac{3}{2}$ برابر (۱/۵ برابر) حجم کره است
بنابراین



حجم این استوانه = حجم کره + حجم نیم کره

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۵۲

مثال: حجم نیم کره به قطر $10cm$ را محاسبه کنید.

مثال: کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده‌ی ۳۰ و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر محاط شده است. با رسم شکل مناسب، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) حجم کره را بدست آورید.

ب) حجم استوانه را بدست آورید.

ج) حجم فضای خالی بین کره و استوانه را بدست آورید.

مثال: حجم کره‌ای که در استوانه محاط شده است ..... برابر حجم استوانه است.

الف) $\frac{3}{2}$ ✓ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{3}{4}$ د) $\frac{4}{3}$

مثال: اگر شعاع کره‌ای سه برابر شود، حجم آن چند برابر می‌شود؟

الف) ۳ برابر ب) ۹ برابر ✓ج) ۲۷ برابر د) ۸۱ برابر

مثال: اگر شعاع کره‌ای $3cm$ باشد. عدد مربوط به مساحت (S) و حجم (V) چه رابطه‌ای باهم دارند؟

✓الف) $V=S$ ب) $V>S$ ج) $V<S$ د) $V=\frac{2}{3}S$

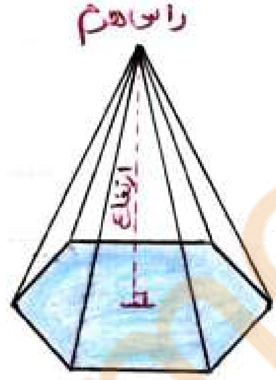
مثال: مساحت کره‌ای 100π است، حجم آن ..... می‌باشد. (نمونه دولتی ۹۷ زنجان)

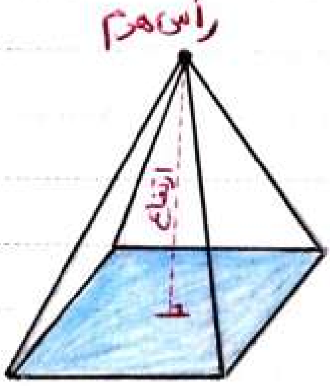
الف) $\frac{500}{2}\pi$ ب) 500π ج) $\frac{400}{3}\pi$ ✓د) $\frac{500}{3}\pi$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

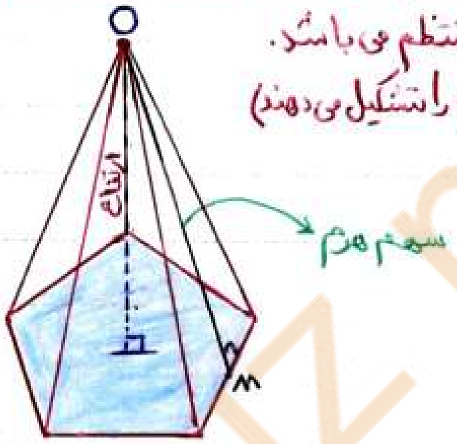
هرم : اگر یک چندضلعی انتخاب کرده و از یک نقطه خارج از صفحه‌ی آن به رأس‌های آن چندضلعی وصل کنیم، یک هرم بوجود می‌آید. در واقع هرم یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است که این قاعده می‌تواند یک چندضلعی محدب (کوژ) و یا یک چندضلعی مقعر (کاو) باشد.

مثال: در شکلهای مقابل نمونه‌هایی از هرم‌ها را مشاهده می‌کنید.





هرم منتظم : اگر قاعده‌ی هرم یک چندضلعی منتظم و وجه‌های جانبی آن همنهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوئیم. شکل مقابل یک هرم با قاعده‌ی پنج ضلعی منتظم می‌باشد.
و تمام وجه‌های جانبی آن (مثلثهایی که بدنه‌ی هرم را تشکیل می‌دهند) همنهشت هستند.

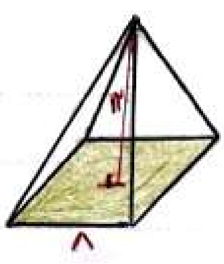


نکته‌ی مهم : در هرم بالا به پاره خط OM (که از رأس هرم بر ضلع قاعده‌ی آن عمود است) سهم هرم گفته می‌شود.

نکته : برای محاسبه‌ی حجم هرم از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم.

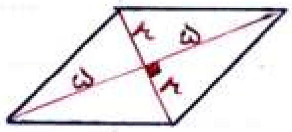
$$\text{حجم هرم} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3}$$

مثال: حجم هرم مقابل را محاسبه کنید. (ضلع مربع ۸ و ارتفاع ۱۲ متر است)



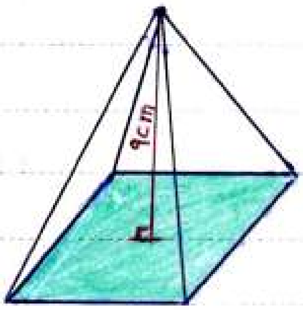
$$\text{حجم هرم} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} = \frac{(8\times8)\times12}{3} = 256$$

مثال: قاعده ی یک هرم به شکل لوزی با قطرهای $10cm$ و $6cm$ می باشد. اگر ارتفاع این هرم $9cm$ باشد، حجم هرم را بدست آورید.



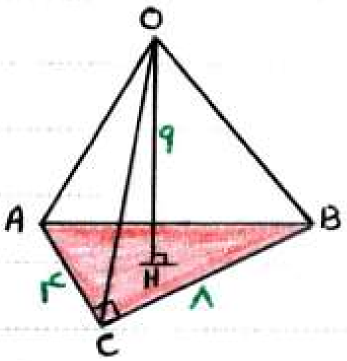
جواب: قاعده ی این هرم به شکل لوزی می باشد که در ابتدا باید مساحت این لوزی را بدست آوریم، می دانیم که فرمول محاسبه ی مساحت لوزی به صورت زیر است.

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{\text{حاصلضرب دو قطر}}{2} = \frac{6\times10}{2} = 30$$



$$\text{حجم هرم} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} = \frac{30\times9}{3} = 90\ cm^3$$

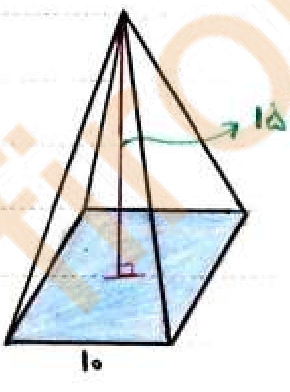
مثال: در هرم مقابل $\overline{AC}=4$ و $\overline{BC}=8$, $\hat{ACB}=90^\circ$ می باشد و همچنین $\overline{OH}$ که ارتفاع هرم می باشد ۹ سانتی متری باشد، حجم این هرم را بدست آورید.



$$\text{مساحت قاعده} \rightarrow 16 = \frac{4\times8}{2} = \text{مساحت مثلث قائم الزاویه ی } ABC$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} = \frac{16\times9}{3} = 48\ cm^3$$

مثال: حجم هرم منتظم شکل مقابل کدام است؟



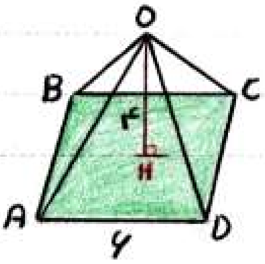
الف) ۷۵
ب) ۵۰۰
ج) ۱۵۰
د) ۱۵۰۰

باید به جواب ۵۰۰ برسید.

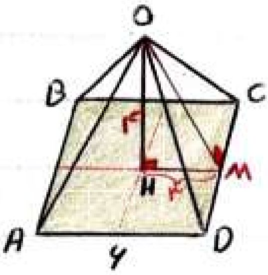
محاسبه‌ی مساحت هرم :

برای محاسبه‌ی مساحت یک هرم ، باید گسترده‌ی آن را رسم کنیم و سپس با توجه به شکل قاعده ، مساحت هر یک از وجه‌های جانبی و قاعده را محاسبه و با هم جمع کنیم.

مثال : مساحت هرم منتظم مقابل را محاسبه کنید.



جواب : چون این هرم منتظم است پس قاعده‌ی آن مربع شکل است (تنها چهارضلعی منتظم ، مربع می‌باشد) از طرفی با توجه به تعریف هرم منتظم ، مثلثهای جانبی این هرم همنهشت هستند ، بنابراین فقط کافی است که مساحت یکی از آنها را بدست آوریم و آن را ۴ برابر کنیم تا مساحت همه‌ی مثلثهای جانبی را بدست آوریم.



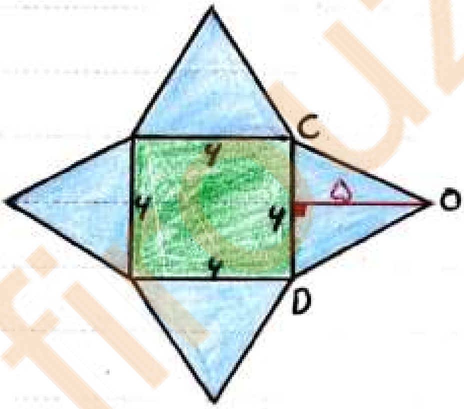
در مثلث قائم الزاویه‌ی OHM به کمک رابطه‌ی فیثاغورس می توانیم طول سهم هرم یعنی OM را بدست آوریم :

$(OM)^۲ = (OH)^۲ + (HM)^۲$

$(OM)^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵$

$OM = \sqrt{۲۵} = ۵$

بنابراین داریم :



مساحت مثلث OCD $= \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$

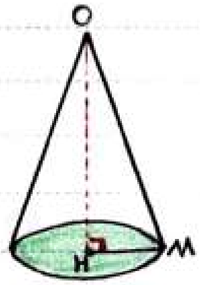
مساحت هر چهار مثلث $= ۴ \times ۱۵ = ۶۰$

مساحت مربع $= ۶ \times ۶ = ۳۶$

$\Rightarrow$ مساحت کل $= ۶۰ + ۳۶ = ۹۶$

بنابراین مساحت کل این هرم منتظم ۹۶ می باشد.

مخروط : به حجمی که قاعده‌ی آن دایره‌ای شکل باشد، مخروط گفته می‌شود.



رأس مخروط = نقطه‌ی O

ارتفاع = OH

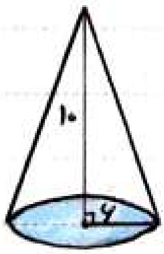
قاعده = دایره‌ی پائین

شعاع قاعده = HM

مولد = OM

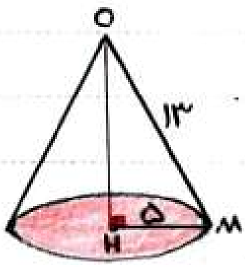
نکته : برای بدست آوردن حجم یک مخروط، از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۳}$$



مثال : حجم مخروط مقابل را بدست آورید. ($\pi = ۳$)

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۳} = \frac{(۶\times۶\times\cancel{۳}^{۱})\times۱۰}{\cancel{۳}_{۱}} = ۳۶۰$$



مثال : حجم مخروط مقابل را بدست آورید.

جواب : برای بدست آوردن حجم مخروط باید ارتفاع آن را داشته باشیم که در مثلث OHM می‌توانیم به کمک رابطه‌ی فیثاغورس، طول OH یا همان ارتفاع مخروط را بدست آوریم.

$$(OH)^۲ = (OM)^۲ - (HM)^۲$$

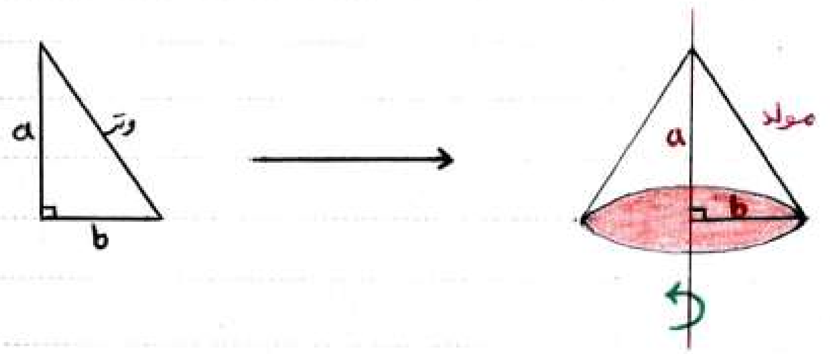
$$(OH)^۲ = ۱۳^۲ - ۵^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴$$

$$OH = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \rightarrow \text{ارتفاع مخروط}$$

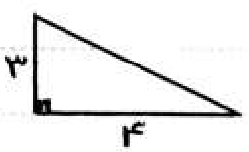
اکنون با داشتن ارتفاع مخروط و شعاع قاعده، به راحتی می‌توانیم حجم این مخروط را بدست آوریم

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۳} = \frac{(۵\times۵\times\pi)\times\cancel{۱۲}^{۴}}{\cancel{۳}_{۱}} = ۱۰۰\pi$$

نکته‌ی مهم: اگر مثلث قائم الزاویه‌ی مقابل را حول یکی از اضلاع قائم آن دوران دهیم، یک مخروط بوجود می‌آید که وتر این مثلث قائم الزاویه، مولد مخروط را بوجود می‌آورد.



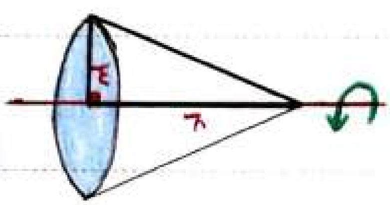
مثال: اگر مثلث قائم الزاویه‌ی مقابل را حول ضلع ۴cm دوران دهیم،



الف) چه شکلی بوجود می‌آید.

ب) حجم آن را بدست آورید.

جواب:



الف) یک مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۴ بوجود می‌آید.

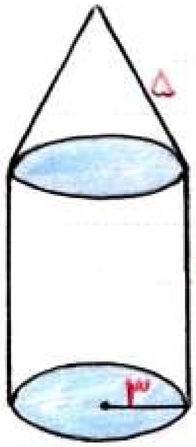
ب)

حجم مخروط = $\frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} = \frac{(\cancel{3}\times3\times\pi)\times4}{\cancel{3}} = 12\pi$

مثال: حجم شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه‌ی مقابل، حول ضلع ۸cm را بدست آورید.

باید به جواب 96π برسید

مثال: حجم شکل مقابل را بدست آورید. ($\pi = 3$)



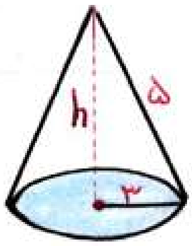
جواب: شکل مقابل از یک استوانه و یک مخروط تشکیل شده است. بنابراین؛ باید حجم استوانه و حجم مخروط را به صورت جداگانه محاسبه کنیم و سپس جوابهای بدست آمده را با هم جمع کنیم. در واقع

حجم مخروط + حجم استوانه = حجم این شکل

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه

$= \underbrace{(3 \times 3 \times 3)}_{\text{لم عددی}} \times 10 = 270$

همانطور که از روی شکل مشخص است، چون شعاع قاعده ی استوانه برابر ۳ می باشد، شعاع قاعده ی مخروط بالا هم ۳ می باشد. بنابراین داریم:



$h^2 = 5^2 - 3^2$

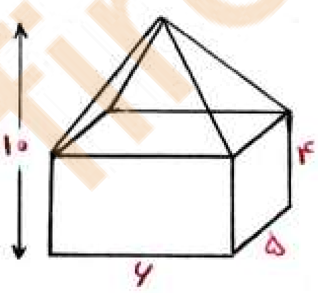
$h^2 = 25 - 9 = 16$

$h = \sqrt{16} = 4 \longrightarrow$ بنابراین ارتفاع مخروط ۴ می باشد

$\dfrac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3}$ = حجم مخروط $= \dfrac{(3 \times \cancel{3} \times 3) \times 4}{\cancel{3}} = 36$

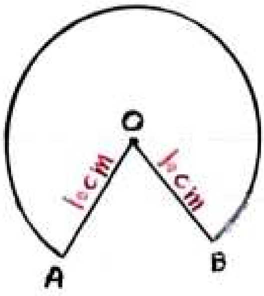
بنابراین: $\underbrace{270}_{\text{حجم استوانه}} + \underbrace{36}_{\text{حجم مخروط}} = 306$ = حجم کل شکل

مثال: حجم شکل مقابل را بدست آورید.

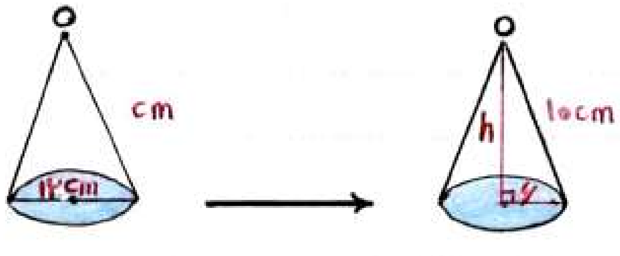


حجم مکعب و حجم هرم را به صورت جداگانه محاسبه کنید و سپس جوابها را با هم جمع کنید (باید به عدد ۱۸۰ برسید)

مثال: امیرعلی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع 10cm مخروطی به قطر قاعده‌ی 12 cm ساخته است. حجم این مخروط را بدست آورید.



جواب: شکل مقابل یک قطاع است، اگر بخواهیم با آن یک مخروط بسازیم، باید شعاع های OA و OB را با هم بچسبانیم تا یک مخروط با طول مولد 10 cm بدست آید (شعاع این قطاع به مولد مخروط تبدیل می‌شود).



$h^2 = 10^2 - 6^2$

$h^2 = 100 - 36 = 64$

$h = \sqrt{64} = 8$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} = \frac{(6\times6\times\pi)\times8}{3} = 96\pi$$

نکته‌ی مهم: اگر محیط یک دایره را داشته باشیم و بخواهیم شعاع آن را بدست آوریم، می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم.

$$\boxed{\text{شعاع دایره} = \frac{\text{محیط دایره}}{2 \times \text{عدد پی}}}$$

مثال: اگر محیط یک دایره 60 متر باشد، شعاع این دایره چقدر است؟ $(\pi = 3)$

$$\text{شعاع دایره} = \frac{\text{محیط دایره}}{2 \times \text{عدد پی}} = \frac{60}{2\times3} = \frac{60}{6} = 10$$

مثال: محیط یک دایره 12π می‌باشد، مساحت این دایره چقدر است؟

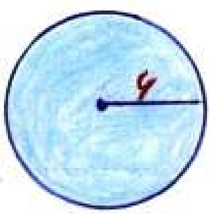
الف) 24π

ب) 144π

ج) 108π

د) 36π ✓

$$\text{شعاع دایره} = \frac{\text{محیط دایره}}{2 \times \text{عدد پی}} = \frac{12\pi}{2\times\pi} = 6$$

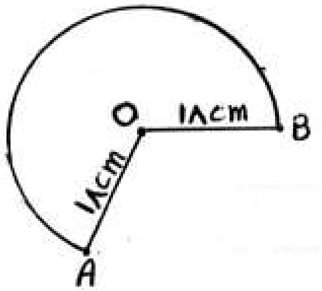


$\text{مساحت دایره} = \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{عدد پی}$

$= 6 \times 6 \times \pi$

$= 36\pi$

مثال: $\frac{2}{3}$ از سطح یک مقوای دایره‌ای شکل به شعاع ۱۸cm را مطابق شکل مقابل بریده‌ایم و با آن یک مخروط درست کرده‌ایم، حجم این مخروط را بدست آورید. ($\pi = 3$)



محیط دایره‌ی کامل = قطر × عدد پی

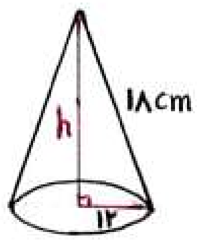
$= 36 \times 3 = 108\,cm$

بنابراین $\frac{2}{3}$ محیط این دایره برابر است با: $\frac{2}{3} \times 108 = 72$

حال اگر با این قطاع یک مخروط درست کنیم. محیط قاعده‌ی این مخروط ۷۲cm می‌باشد. که با داشتن محیط قاعده می‌توانیم شعاع قاعده را بدست آوریم.

شعاع قاعده‌ی مخروط $= \frac{\text{محیط قاعده}}{2 \times \text{عدد پی}} = \frac{72}{2 \times 3} = 12$

بنابراین مخروطی خواهیم داشت که شعاع قاعده‌ی آن ۱۲ و طول مولد آن ۱۸cm می‌باشد. که باید ارتفاع آن را به کمک رابطه‌ی فیثاغورس بدست آوریم.



$h^2 = 18^2 - 12^2$

$h^2 = 324 - 144 = 180$

$h = \sqrt{180}$ → ارتفاع مخروط

حجم مخروط $= \frac{\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}}{3} = \frac{(12 \times 12 \times \cancel{3}) \times \sqrt{180}}{\cancel{3}} = 144\sqrt{180}$

مثال: با $\frac{3}{5}$ از سطح یک مقوای دایره‌ای شکل با شعاع ۱۵cm یک مخروط ساخته‌ایم، حجم این مخروط چقدر است؟

الف) 72π

ب) 324π

ج) 108π

د) 324

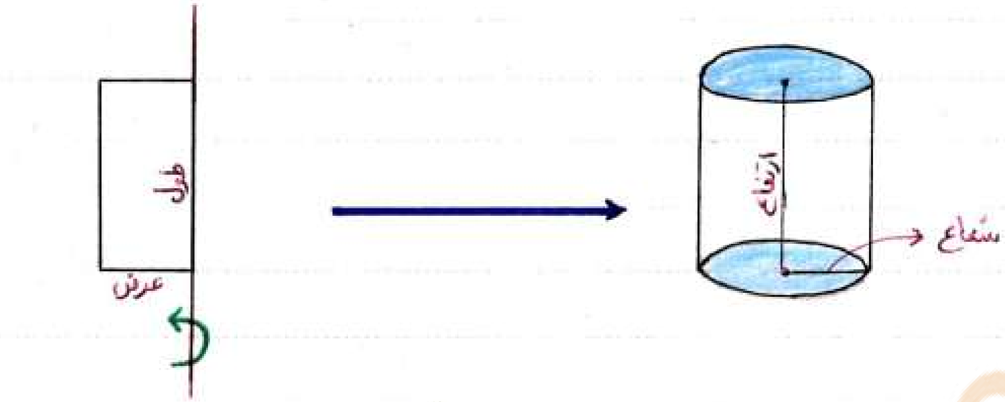
باید به جواب «324π» برسید.

نکته‌ی مهم: از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن یک استوانه بوجود می‌آید که:

الف) اگر مستطیل حول طول آن دوران داده شود، استوانه ای بوجود می‌آید که:

۱- ارتفاع استوانه همان طول مستطیل است.

۲- شعاع قاعده‌ی استوانه همان عرض مستطیل است.

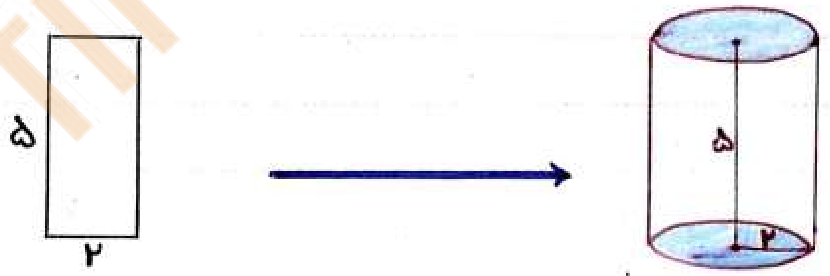


ب) اگر مستطیل حول عرض آن دوران داده شود، استوانه ای بوجود می‌آید که

۱- ارتفاع استوانه همان عرض مستطیل است.

۲- شعاع قاعده‌ی استوانه همان طول مستطیل است.

مثال: حجم حاصل از دوران مستطیل مقابل حول ضلع 5cm را بدست آورید.



ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه

$= (۲ \times ۲ \times \pi) \times ۵ = ۲۰\pi$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: جملات زیر را کامل کنید.

الف) از دوران ۳۶۰ درجه‌ی یک دایره حول قطر آن ...کره... بوجود می‌آید.

ب) از دوران ۳۶۰ درجه‌ی یک نیم دایره حول قطر آن ...کره... بوجود می‌آید.

ج) از دوران ۳۶۰ درجه‌ی یک ربع دایره حول شعاع آن ...نیم کره... بوجود می‌آید.

د) از دوران ۳۶۰ درجه‌ی یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائم آن ...مخروط... بوجود می‌آید.

هـ) از دوران ۳۶۰ درجه‌ی یک استوانه حول طول یا عرض آن ...استوانه... بوجود می‌آید.

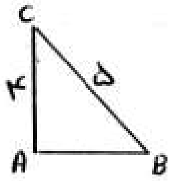
مثال: کره‌ای در استوانه‌ای به ارتفاع 6cm محاط شده است. حجم فضای خالی بین کره و استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟ (نمونه دولتی - ۹۷ همدان)

الف) 54π ب) 36π ج) 18π ✓ د) 27π

مثال: اگر مساحت کره‌ای 16π باشد حجم آن کره کدام است؟ (نمونه دولتی - ۹۶ سمنان)

الف) $\frac{16}{3}\pi$ ب) $\frac{8}{3}\pi$ ج) 32π د) $\frac{32}{3}\pi$ ✓

مثال: حجم حاصل از دوران مثلث مقابل حول ضلع AB کدام است؟ (نمونه دولتی - ۹۷ لرستان)



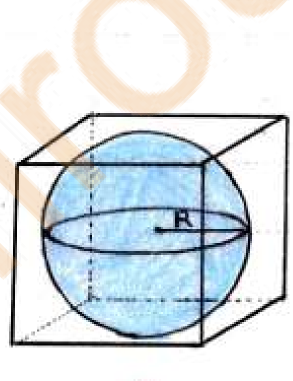
الف) 10π ب) 12π

ج) 16π ✓ د) 20π

سؤال مهم: اگر کره‌ای به شعاع R را درون یک مکعب محاط کنیم، حجم کره چند برابر حجم مکعب است؟

الف) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{\pi}{3}$

ج) $\frac{\pi}{6}$ د) $\frac{3}{\pi}$



جواب: طول ضلع مکعب برابر قطر کره می‌باشد یعنی: $2R =$ طول ضلع مکعب

$$\text{حجم کره} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\text{حجم مکعب} = 2R \times 2R \times 2R = 8R^3$$

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب}} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{8R^3}{1}} = \frac{4\pi R^3}{24R^3} = \frac{\cancel{4}\pi}{\cancel{24}_{6}} = \frac{\pi}{6}$$