

احتمال

فصل ۲

خرم مهر

- ۱ ✓ مبانی احتمال
- ۲ احتمال غیر هم‌شانس
- ۳ احتمال شرطی
- ۴ پیشامدهای مستقل وابسته

درس ۱ مبانی احتمال

کار در کلاس

ص ۱۴ کتاب

کدامیک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدامیک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت‌وگو کنید.

احتمال	آمار	صورت مسئله
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱- می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲- درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳- ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴- در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸٪ درصد رگورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵- چه تعداد از دانش‌آموزان پایه یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟

ص ۱

فعالیت

ص ۴۱



برق کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی، به ترتیب، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند؛ در اولی سه لامپ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است: در جعبه اول ۶۰ درصد و در جعبه دوم ۷۵ درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبه دوم را انتخاب کند.

$$\frac{13}{20} = \frac{x}{100}$$

اکنون فرض کنید دو جعبه همان شرایط را دارند، ولی برق کار از آن جعبه، دو لامپ، بدون آزمایش، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟ در این حالت، تصمیم‌گیری به سادگی حالت اول نیست.

لامپ دوم لامپ اول
 $5 \times 4 = 20$

کار در کلاس

ص ۴۲

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبه اول مذکور انتخاب کرد؟ در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ مشابه همین سؤال‌ها را در مورد جعبه دوم بررسی کنید. با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه را برای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

چنین مسائلی هر چند ساختگی‌اند، ولی ماهیت آنها بسیار شبیه همان مسئله‌ای است که کارشناسان کارخانه با آن مواجه بودند: تصمیم‌گیری برای آینده‌ای که در مورد وقایع آن اطمینان نداریم.

انتخاب دوم
 $2 \times 1 = 2$ ← انتخاب اول

انتخاب اول
 $20 \times 19 = 380$ ← انتخاب دوم

تعداد حالت معیوب بودن
 $7 \times 2 = 14$

احتمال معیوب بودن در جعبه اول
 $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

احتمال معیوب بودن در جعبه دوم
 $\frac{14}{380}$

احتمال معیوب بودن در جعبه دوم بیشتر است
 $\frac{14}{380} > \frac{1}{10}$

ص ۲



زهرا و شبیم در مورد سؤالی که دربارهٔ برتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟

■ زهرا: فضای نمونه در این مسئله مجموعه $\{1, 2, \dots, 6\}$ است. **درست**

■ شبیم: بله، من هم موافق هستم. سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را برتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد $\{2, 4, 6\}$ رخ داده است؟

■ زهرا: به نظرم نه، چون ۴ و ۶ هم علاوه بر ۲ عضو این پیشامدند. **نا درست**

■ شبیم: ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد، شامل عدد ۲ است. **درست**

■ زهرا: پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟

■ شبیم: یعنی باید آنها هم در برتاب تاس آمده باشند نا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً این طور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد $\{2, 4, 6\}$ رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را برتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟! **درست**

با توجه به مفهوم «رخ دادن یک پیشامد» می‌فهمیم که اگر A_1 و A_2 دو پیشامد باشند، آن‌گاه:

الف) اگر A_1 زیرمجموعه A_2 باشد، رخ دادن A_1 رخ دادن A_2 را نتیجه می‌دهد.

ب) رخ دادن پیشامد $A_1 \cap A_2$ ، یعنی هر دو پیشامد A_1 و A_2 رخ دهد.

پ) رخ دادن پیشامد $A_1 \cup A_2$ ، یعنی دست‌کم یکی از دو پیشامد A_1 و A_2 رخ دهد.

مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دارای 2^6 زیرمجموعه است

یعنی $2^6 = 64$ پیشامد. اگر تاس را برتاب کنیم عدد ۲ باید

متوالی لغت از ۱ تا ۶۴ پیشامد ممکن، نام آنهایی که شامل ۲ هستند می‌توانند

مد نظر باشند

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱ دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کند،

A: متولد ماه مهر باشد،

B: متولد فصل تابستان باشد.

۲ سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید،

A: هر سه بار مشابه بیاید،

B: زوج بار رو بیاید.

۳ فردا

A: خورشید در آسمان دیده شود،

B: باران بیارد.

۴ تاسی را بی در بی پرتاب می‌کنید،

A: برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید،

B: تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.



تمرین

ص ۷۶



۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

فرض کنید: (عباس، احمد)

۹ عضو

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (\text{تیغی، سنگ})، (\text{کاغذ، سنگ})، (\text{سنگ، سنگ})، \\ (\text{تیغی، کاغذ})، (\text{کاغذ، کاغذ})، (\text{سنگ، کاغذ})، \\ (\text{تیغی، قیچی})، (\text{کاغذ، قیچی})، (\text{سنگ، قیچی}) \end{array} \right\}$$

$$\text{در ۳ حالت احمد برنده است.} \\ \text{حالت‌های برنده احمد} = \left\{ (\text{کاغذ، تیغی})، (\text{سنگ، کاغذ})، (\text{تیغی، سنگ}) \right\}$$

۲ یک تیم والیبالی ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می‌شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

$$\frac{13!}{14!} = \frac{1}{14}$$

اولین فرد وارد شونده به ۱۴ حالت

دومین فرد " " به ۱۳ حالت

آخری فرد " " به ۱ حالت

پس ۱۴ دارای ۱۴ حالت است



۲ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک

لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

$$S = \underbrace{(\text{سرد}, \text{گرم})} \times \underbrace{(\text{خشک}, \text{مرطوب})} \times \underbrace{(\text{بار نمی‌وزد}, \text{بار می‌وزد})} \times \underbrace{(\text{صاف}, \text{نیمه‌ابری}, \text{ابری})} \times \underbrace{(\text{بارش}, \text{عدم بارش})}$$

$$\text{تعداد اعضای } S = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$$

فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

ب) اگر $B \subseteq A$ ، آنگاه $P(B) \leq P(A)$.

$$B \subseteq A \rightarrow A \cap B = B \Rightarrow \underline{P(A \cap B) = P(B)} \text{ (الف)}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A - B) = P(A) - P(B)}$$

$$\underline{P(A - B) \geq 0} \text{ می دانیم}$$

طبق قسمت الف

$$\underline{P(A) - P(B) \geq 0}$$

$$P(A) \geq P(B)$$

۵ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.

$$n(S) = 100$$

$$A = \text{اعداد بخش پذیر بر ۲} \rightarrow n(A) = \left[\frac{100}{2} \right] = 50$$

$$B = \text{اعداد بخش پذیر بر ۳} \rightarrow n(B) = \left[\frac{100}{3} \right] = 33$$

$$A \cap B = \text{اعداد بخش پذیر بر ۶} \rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$$

$$\text{الف) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}$$

$$\text{ب) } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} - \frac{16}{100} = \frac{34}{100}$$

$$\text{پ) } P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{67}{100} = \frac{33}{100}$$

پایان درس اول

مهر محمد

۸