فعالیت :

علی و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند،علی گفت:« من مطمئن هستم امروز تیمی که من طرفدار آن هستم ، خواهد باخت.» محسن از او پرسید چگونه با این اطمینان حرف می زنی؟ علی دلیل آورد که: « چون هر بار که من به ورزشگاه رفته ام، تیم مورد علاقه ام باخته است.»

در مورد دلیلی که علی برای حرفش آورده است، چه نظری دارید؟آیا این دلیل را قبول می کنید؟چرا؟

علی و محسن در همان ورزشگاه برای تغذیه خود دو نوع بیسکویت خریدند. علی بیسکویت اش مستطیل به طول و عرض ۸ و۴ سانتیمتر است.محسن هم بیسکویت اش مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است و ضخامت هر دو بیسکویت هم یکسان است.در اینجا محسن به علی گفت:« بیسکویت من بیشتر از بیسکویت تو است.» علی از محسن دلیل خواست و محسن هم گفت:«چون ضخامت بیسکویت ها یکسان است.پس هرکدام مساحت بیشتری داشته باشد ، بزرگتر است.»

در مورد دلیل محسن چه نظری دارید؟ آیا دلیل او را قبول می کنید؟با یک محاسبه ساده می توان آن را بررسی کرد.

$$۶\times۶=۳۶ \quad > \quad ۸\times۴=۳۲$$

« **استدلال**، یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی ، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.»

تمرین (۱):

نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند، وزنه برداری می خواست وزنه ای ۱۰۰کیلویی را بلند کند.آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی تواند وزنه را بلند کند، برای ادعای خود استدلال های متفاوتی می کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود ، با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است.من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام.او هیچ گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

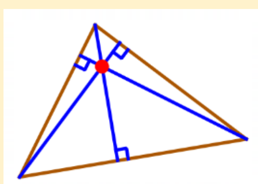
استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ درباره استدلال ها بحث کنید.

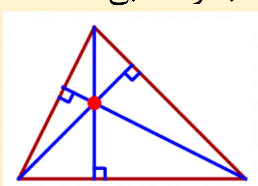
تمرین (۲):

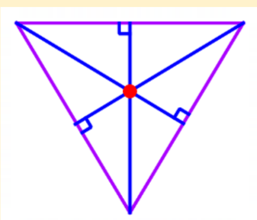
چون من تا به حال تصادف نکرده ام، در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.آیا این استدلال قابل اعتماد است؟مانند همین استدلال یکی مثال بزنید.

فعالیت :

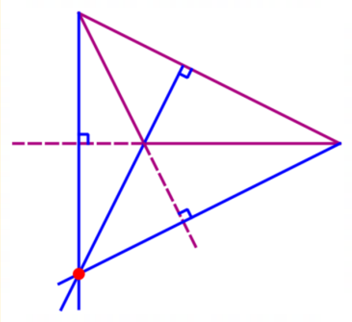
در مثلث های زیر ارتفاع ها رسم شده اند.(ارتفاع ها به رنگ آبی هستند)







آیا می توانیم بگوییم که در هر مثلث محل برخورد ارتفاع ها (نقطه قرمز رنگ)داخل مثلث قرار دارد؟



شاید با توجه به سه مثال بالا ، به این نتیجه برسیم. ولی به مثلث زیر دقت کنید.

همانطور که مشاهده می کنید. در این مثلث محل برخورد ارتفاع ها بیرون شکل قرار دارد. پس با همین یک مثال هم می توان نتیجه گیری بالا را نقض کرد.

« هرگاه با یک مثال نادرستی عبارتی مشخص شود، آن را **مثال نقض** می نامند.»

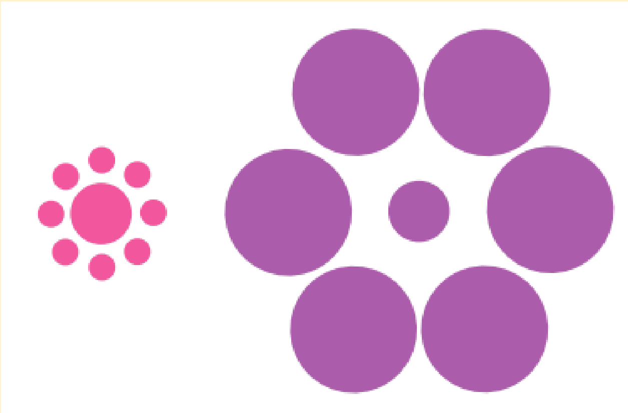
تمرین (۳):

آیا عبارت زیر درست است؟ چرا؟

« هرگاه همه ضلع های یک چهارضلعی با هم برابر باشد، همه زاویه های آن نیز با هم برابر است.»

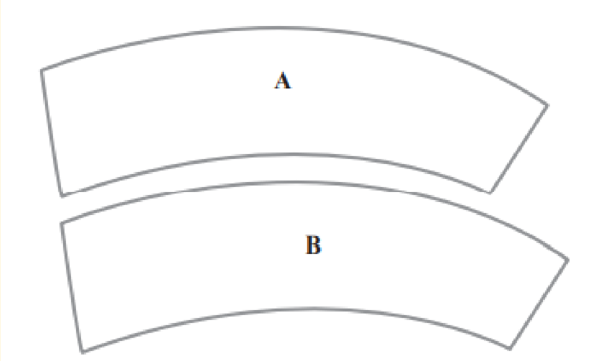
فعالیت :

در شکل زیر کدام یک از دایره هایی که در وسط قرار دارند، بزرگ تر است؟



برای اینکه مطمئن شوید، یک برگ کاغذ پوستی روی دایره مرکزی شکل سمت چپ قرار داده و از روی آن بکشید.سپس آن را روی دایره مرکزی شکل سمت راست قرار دهید.(می توانید این کار را در کتاب ،صفحه۳۴ انجام دهید)

در شکل زیر اگر قطعه های A و Bقطعه هایی از شیرینی مورد علاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می کنید؟چرا؟



باز هم با مراجعه به صفحه ۳۴ کتاب با یک کاغذ شفاف این دو شکل را مقایسه کنید.

«هرچند به طور معمول در ریاضیات و به ویژه در هندسه استفاده از شکل، ترسیم و شهود به تشخیص راه حل ها و ارائه حدس ها کمک زیادی می کند، اما به تشخیصی که بر اساس این روش ها حاصل گردد، نمی توانیم به طور کامل اطمینان کنیم.»

تمرین (٤):

یک مثال از درس علوم بزنید که حواس ما خطا می کند.

فعالیت :

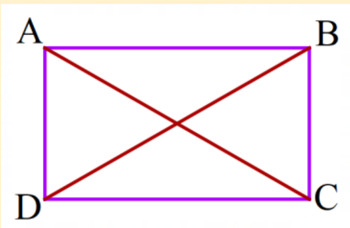
در فعالیت های قبل دیدید که استفاده از حواس یا ارائه مثال های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی کند.و باید از دلیل های منطقی و قانع کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد.

برای اثبات ابتدا باید اطلاعات مسئله را دانست. **فرض** همان اطلاعاتی است که از مسئله دریافت می شود.آن چیزی که به دنبال اثباتش هستیم ، یعنی می خواهیم درست بودنش را نشان دهیم را **حکم** می نامند.روندی را که با استفاده از فرض و همچنین حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم است ،درستی حکم را نشان می دهیم،**استدلال** است.

اولین اقدامی که برای اثبات باید انجام دهیم.تشخیص فرض و حکم است.به مثال زیر دقت کنید.

«ثابت کنید، در هر مستطیل ، قطر ها با هم برابر هستند.»

اولین چیزی که در مسئله بالا قابل توجه است ، شکل مستطیل است.مستطیل چه خواصی دارد؟ شما در پایه هشتم و در درس چهارضلعی ها به طور کامل با مستطیل آشنا شده اید. اضلاع روبرو دو به دو با هم برابرند،اضلاع روبرو دو به دو با هم موازی اند،تمام زاویه هاقائمه هستند.اینها فرض مسئله هستند.حال این مواردرا با توجه به شکل به صورت ریاضی می نویسیم.



فرض $\begin{cases} A = B = C = D = ۹۰^\circ \\ AB = DC \qquad AD = BC \\ AB \parallel DC \qquad AD \parallel BC \end{cases}$

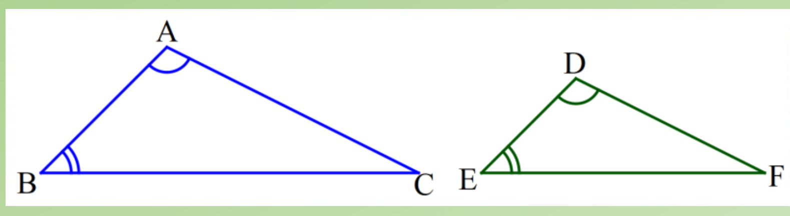
چون می خواهیم نشان دهیم ، قطرها در این مستطیل با هم برابرند، در نتیجه حکم نیز به صورت زیر است.

حکم $\{ AC = BD$

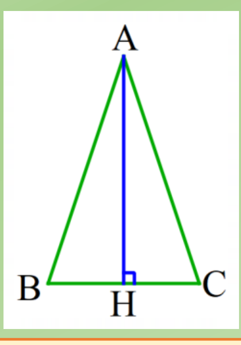
تمرین (٥):

فرض و حکم را برای مسئله های زیر مشخص کنید.

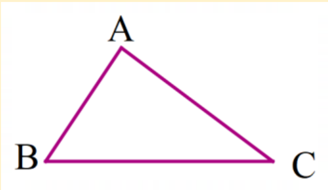
الف) در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است.ثابت کنید زاویه های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



ب) در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، قاعده را نصف می کند.



فعالیت :

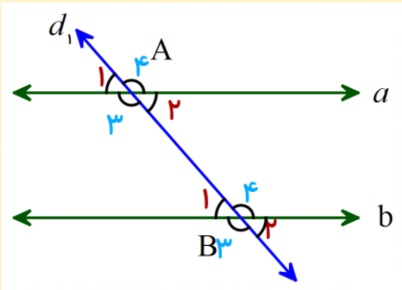


می خواهیم ثابت کنیم که در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰ درجه است.

فرض : ABC مثلث است   حکم: $A+B+C=180^\circ$

اگر یک مثلث دلخواه بکشیم و اندازه زاویه هایش را اندازه بگیریم و حاصل جمع را به دست آوریم ،مشاهده می کنیم که برابر ۱۸۰ درجه است.آیا این یک استدلال است؟ چند مثال می توان انجام داد؟

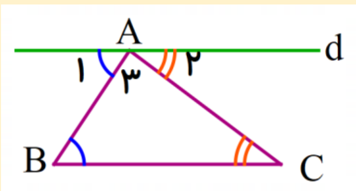
برای این کار باید از اصولی که قبلاً آموخته ایم کمک بگیریم. در سال گذشته یاد گرفتید که هر گاه دو خط موازی را خط موربی قطع کند ،با آنها هشت زاویه می سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی اند.



$$A_1 = A_2 = B_1 = B_2$$

$$A_3 = A_4 = B_3 = B_4$$

حال مثلث دلخواه مانند ABC را در نظر می گیریم، مانند شکل مقابل از راس A خط d را موازی BC رسم می کنیم.



روی خط d و نقطه A یک زاویه نیم صفحه تشکیل می شود. در نتیجه :

$$A_1 + A_2 + A_3 = 180^\circ$$

از موازی بودن خط d و ضلع BC با توجه به مطلبی که در بالا گفته شد. می توان موارد زیر را نوشت.

$$\left.\begin{matrix} d \parallel BC \\ \text{مورب}AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B} \qquad\qquad \left.\begin{matrix} d \parallel BC \\ \text{مورب}AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}$$

ضمناً در شکل مشاهده می کنید که $A_3 = A$ ، حال با جایگذاری موارد مساوی ،داریم:

$$A_1 + A_2 + A_3 = B + C + A = 180^\circ$$

و این همان حکم مسئله است.

تمرین (٦):

آیا استدلال های زیر درست است؟پاسخ خود را توضیح دهید.

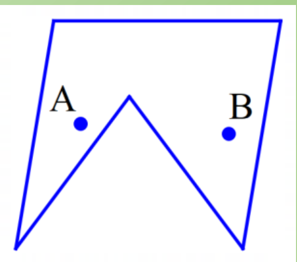
الف) $\left.\begin{matrix} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است .} \\ \text{چهارضلعی } ABCD \text{ متوازی الاضلاع است .} \end{matrix}\right\} \Leftarrow$ $ABCD$ مستطیل است .

ب) $\left.\begin{matrix} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند .} \\ \text{در چهارضلعی } ABCD \text{ ضلع ها برابر نیستند .} \end{matrix}\right\} \Leftarrow$ $ABCD$ مربع نیست .

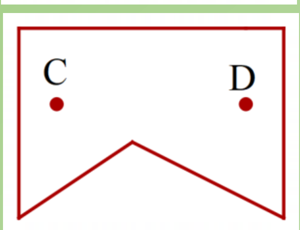
تمرین (۷):

در سال گذشته با تعریف چندضلعی محدب آشنا شدید.تعریف چندضلعی محدب را می توان بدین صورت هم آورد :« یک چند ضلعی محدب است، اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چندضلعی قرار بگیرد.»هر چندضلعی که محدب نباشد، مقعر است.آیا تشخیص سه دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های زیر و دلایلی که ارائه کرده اند، با توجه به تعریف بالا درست است؟پاسخ خود را توضیح دهید.

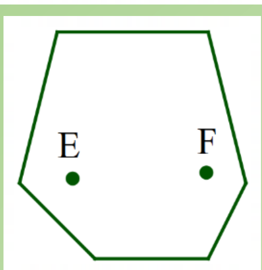
پویا: چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط A و B درون آن قرار دارد ، اما پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند.به طور کامل در آن قرار نمی گیرد.



مهرداد: چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط C و D درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند، نیز به طور کامل در ان قرار دارد.



نیما: چندضلعی مقابل محدب است. زیرا نقاط E و F درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند، نیز به طور کامل در آن قرار دارد.



تمرین (۱):

نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند، وزنه برداری می خواست وزنه ای ۱۰۰کیلویی را بلند کند.آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی تواند وزنه را بلند کند، برای ادعای خود استدلال های متفاوتی می کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود ، با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است.من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده ام.او هیچ گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ درباره استدلال ها بحث کنید.

استدلال نیما را می توان تا حدی قابل اعتماد دانست، زیرا بر اساس اطلاعاتی که دارد نظر می دهد ولی استدلال پژمان اصلاً قابل قبول نیست، زیرا زوج بودن روزهای مسابقات هیچ ارتباط منطقی ای با بردن یا نبردن مسابقه ندارد.

البته در اینجا پرسیده شده کدام استدلال قابل اعتماد تر است و اصلاً در مورد صحت کامل استدلال صحبت نشده است.در آینده روش هایی را خواهید آموخت که کاملاً درستی یک استدلال را مشخص می کند.

تمرین (۲):

چون من تا به حال تصادف نکرده ام، در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.آیا این استدلال قابل اعتماد است؟مانند همین استدلال یکی مثال بزنید.

این استدلال هم قابل اعتماد نیست، چون هیچ ارتباط منطقی ای بین تصادف نکردن و سفر اخیر وجود ندارد.

مثال: من هر وقت ماشین را می شویم ، باران می گیرد.

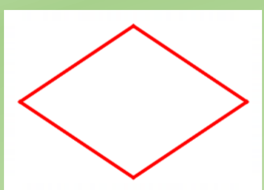
مثال: همه بچه های خاله من دختر هستند، پس بچه ای که تازه می خواهد متولد شود هم دختر است.

تمرین (۳):

آیا عبارت زیر درست است؟ چرا؟

« هرگاه همه ضلع های یک چهارضلعی با هم برابر باشد، همه زاویه های آن نیز با هم برابر است.»

خیر ، زیرا در لوزی همه ضلع ها با هم برابرند ولی زاویه ها برابر نیستند. مثال نقض



تمرین (٤):

یک مثال از درس علوم بزنید که حواس ما خطا می کند.

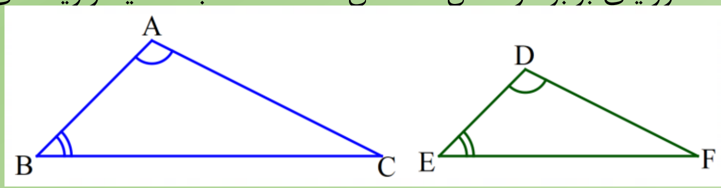
دو ظرف که درون یکی آب خیلی سرد و دیگری آب خیلی جوش دارد را آماده کنید.دست راست را در آب خیلی سرد و دست چپ را در آب گرم مدتی نگاه دارید.بعد هر دو را زیر شیر آب ببرید. دمای آب شیر را در دست ها مختلف احساس خواهید کرد.دستی که در آب سرد بود، آب شیر را گرم احساس می کند و دست دیگر که در آب داغ بوده آب شیر را سرد احساس می کند.

البته می توانید مثال های دیگری نیز پیدا کنید.

تمرین (٥):

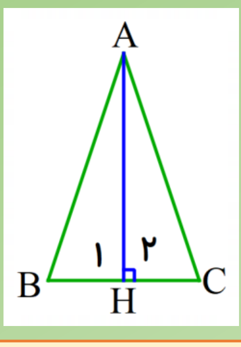
فرض و حکم را برای مسئله های زیر مشخص کنید.

الف) در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است.ثابت کنید زاویه های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



فرض $\begin{cases} A = D \\ B = E \end{cases}$ حکم $\{ C = F$

ب) در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، قاعده را نصف می کند.



فرض $\begin{cases} AB = AC \\ H_1 = H_2 = 90 \\ B = C \end{cases}$ حکم $\{ BH = CH$

تمرین (٦):

آیا استدلال های زیر درست است؟پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است .} \\ \text{چهارضلعی } ABCD \text{ متوازی الاضلاع است .} \end{array} \right. \Leftarrow$ $ABCD$ مستطیل است .

استدلال درست نیست، چهارضلعی $ABCD$ که متوازی الاضلاع است. می تواند هر شکل دیگری نیز باشد. و حتماً نباید مستطیل باشد.دقت کنید . هر مستطیل متوازی الاضلاع هست ، ولی هر متوازی الاضلاعی حتماً مستطیل نیست.

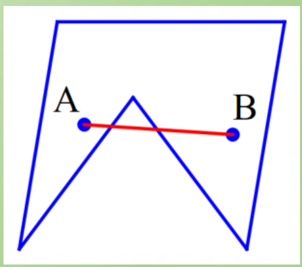
ب) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند .} \\ \text{در چهارضلعی } ABCD \text{ ضلع ها برابر نیستند .} \end{array} \right. \Leftarrow$ $ABCD$ مربع نیست .

استدلال درست است. وقتی در چهارضلعی $ABCD$ ضلع ها برابر نیستند ، حتما این چهارضلعی مربع نیست.

تمرین (۷):

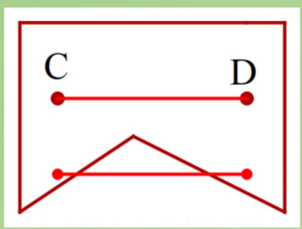
در سال گذشته با تعریف چندضلعی محدب آشنا شدید.تعریف چندضلعی محدب را می توان بدین صورت هم آورد :« یک چند ضلعی محدب است، اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می کند، به طور کامل درون آن چندضلعی قرار بگیرد.»هر چندضلعی که محدب نباشد، مقعر است.آیا تشخیص سه دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های زیر و دلایلی که ارائه کرده اند، با توجه به تعریف بالا درست است؟پاسخ خود را توضیح دهید.

پویا: چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط A و B درون آن قرار دارد ، اما پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند.به طور کامل در آن قرار نمی گیرد.



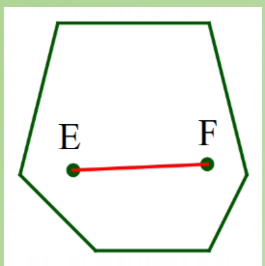
استدلال پویا درست است، زیرا اگر نقاط را به هم وصل کنیم ،پاره خط به وجود آمده کاملاً در داخل شکل نیست.پس شکل محدب نمی باشد.

مهرداد: چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط C و D درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند، نیز به طور کامل در ان قرار دارد.



استدلال مهرداد قابل قبول نیست، درست است که اگر دو نقطه را به هم وصل کنیم ،پاره خط به وجود آمده کاملاً داخل شکل قرار می گیرد ولی چون طبق تعریف این اتفاق برای هر دو نقطه باید درست باشد، اگر نقاط را پایین تر بگیرید مشاهده می کنید که پاره خط کاملاً در داخل شکل نخواهد بود.

نیما: چندضلعی مقابل محدب است. زیرا نقاط E و F درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می کند، نیز به طور کامل در آن قرار دارد.



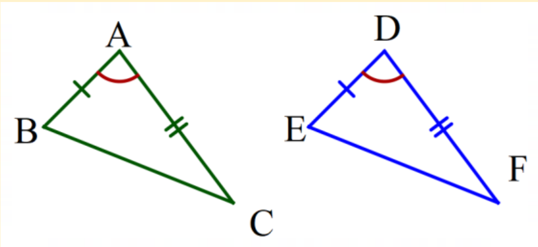
استدلال نیما درست است. هر دو نقطه را که در شکل در نظر بگیرید. پاره خط مربوط به آن، داخل شکل قرار می گیرد.

فعالیت :

یکی از مفاهیم پرکاربرد در استدلال هم نهشتی مثلث ها است. این مطلب را به طول کامل در پایه هشتم آموخته اید و در اینجا فقط به مرور آن می پردازیم. در ابتدا حالت های کلی هم نهشتی مثلث ها را بررسی می کنیم.

۱.**دوضلع و زاویه بین(ض ز ض)**

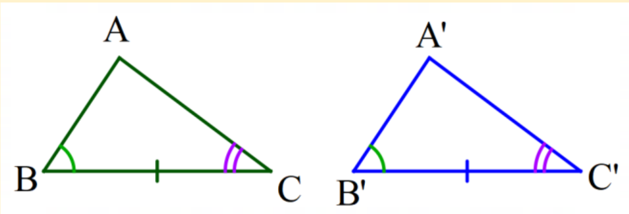
هر گاه دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آنها در مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث هم نهشت هم نهشت اند.



$$\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ A = D \\ AC = DF \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \cong D\overset{\Delta}{E}F$$

۲. **دو زاویه و ضلع بین(ز ض ز)**

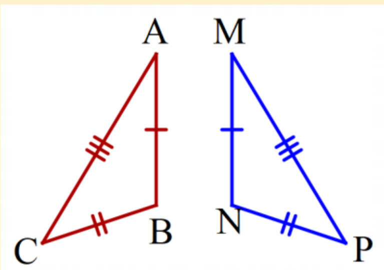
هر گاه دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها در مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث هم نهشت اند.



$$\left.\begin{array}{l} B = B' \\ BC = B'C' \\ C = C' \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

۳. **سه ضلع (ض ض ض)**

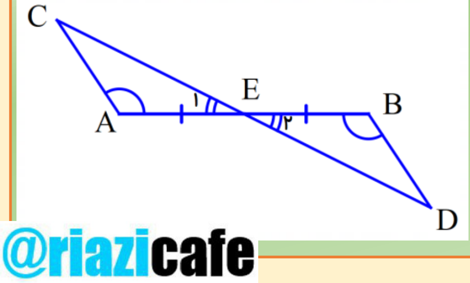
هر گاه سه ضلع مثلثی با سه ضلع مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث هم نشهت اند.



$$\left.\begin{array}{l} AB = MN \\ BC = NP \\ AC = MP \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \cong M\overset{\Delta}{N}P$$

تمرین (۱):

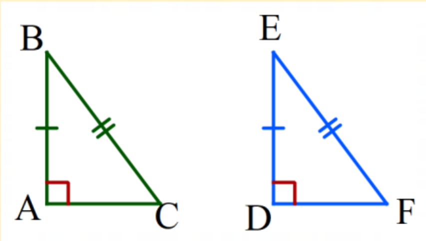
با نوشتن جزئیات ،دلیل هم نهشتی دو مثلث مقابل را بنویسید.



فعالیت :

در مورد مثلث های قائم الزاویه دو قانون دیگر نیز وجود دارد.

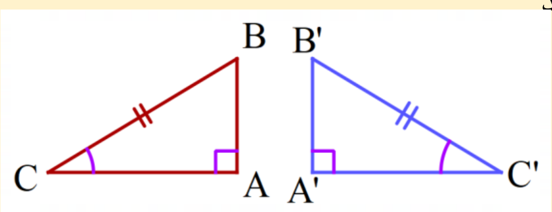
۱. وتر و یک ضلع (و ض)



هر گاه وتر و یک ضلع قائم از مثلثی با وتر و یک ضلع قائم در مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث قائم الزاویه همنهشت اند.

$$\left.\begin{array}{l}BC=EF\\ AB=ED\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C\cong D\overset{\triangle}{E}F$$

۲. وتر و یک زاویه (و ز)



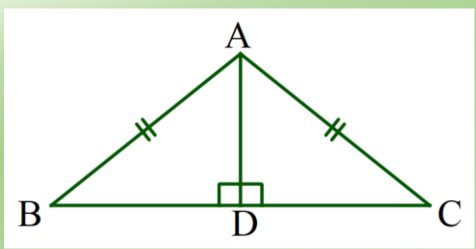
هرگاه وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ایی با وتر و یک زاویه تند در مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث قائم الزاویه همنهشت اند.

$$\left.\begin{array}{l}BC=B'C'\\ C=C'\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C\cong A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

تمرین (۲):

با نوشتن جزئیات دلیل هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه زیر را بیان کنید.

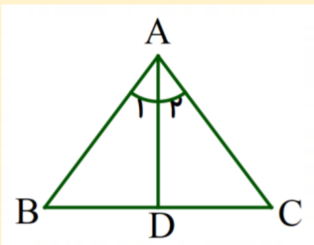
(از ضلع مشترک استفاده کنید)



فعالیت :

در هم نهشتی مثلث ها ، بیشتر اوقات باید از مطالب و مفاهیمی که قبلاً آنها را یاد گرفته ایم، استفاده کنیم.به مثال زیر دقت کنید.

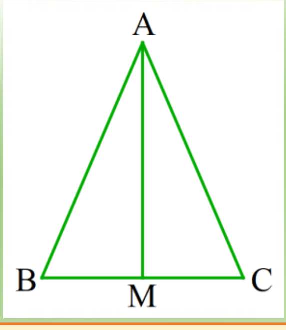
در مثلث متساوی الساقین ABC نیمساز زاویه راس A کشیده شده است. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD همنهشت اند.



در این مسئله دو نکته وجود دارد. ۱. مثلث متساوی الساقین ۲. نیمساز

$$\left.\begin{array}{ll}\text{مثلث متساوی الساقین} & AB=AC\\ \text{ضلع مشترک} & AD=AD\\ \text{نیمساز} & \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{array}\right\}\Rightarrow ABD\cong ACD \qquad (\text{ض ز ض})$$

تمرین (۳):



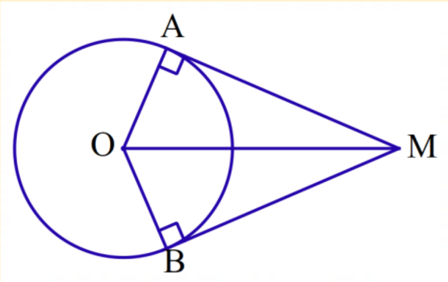
در مثلث متساوی الساقین ABC میانه AM را رسم کرده ایم.(نقطه M وسط BC است.)

مثلث های AMB و AMC به چه حالتی هم نهشت اند؟

فعالیت :

باز هم برای اینکه با استفاده از مواردی که قبلاً یاد گرفته اید بیشتر آشنا شوید. به مثال زیر دقت کنید.

از نقطه M خارج از دایره ، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کرده ایم.دو مثلث بنا به چه حالتی هم نهشت اند؟

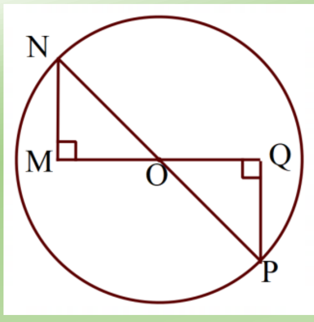


در این مسئله از دو نکته استفاده می کنیم.

۱. شعاع های دایره که همواره با هم برابرند.
۲. شعاع دایره بر خط مماس عمود است.(از حالت های هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه استفاده می کنیم.)

$$\left.\begin{array}{ll} OA = OB & \text{شعاع دایره} \\ OM = OM & \text{وتر مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow OAM \cong OBM \ (\text{و ض}) \ \text{وتر و ضلع}$$

تمرین (٤):



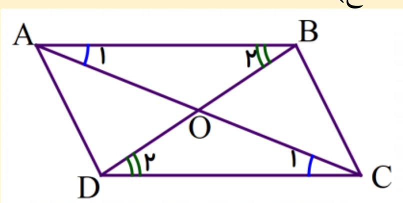
دلیل هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه مقابل را بیان کنید.

فعالیت :

یکی از راه های استدلال در مسائل اثباتی ، استفاده از هم نهشتی مثلث ها است. زیرا هرگاه دو مثلث هم نهشت باشند، تمام اجزای آنها نیز با هم برابرند. به مثال زیر دقت کنید.

ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ، قطرها یکدیگر را نصف می کنند.

فرض: $AD \parallel BC \quad , \quad AB \parallel DC \quad , \quad AD = BC \quad , \quad AB = DC$ (متوازی الاضلاع)



حکم : $OB = OD \quad , \quad OA = OC$

نکته ای که در این مسئله باید از آن استفاده کرد ،خطوط موازی در پایه هشتم است.

هر گاه دو خط موازی را خط موربی قطع کند هشت زاویه ایجاد می شود که چهارتای آنها(تند) با هم و چهارتای دیگر(باز) با هم برابرند.(در درس قبلی به آن اشاره شده است)

استدلال:

دو مثلث AOB و DOC را در نظر می گیریم.ثابت می کنیم این دو مثلث هم نهشت هستند.

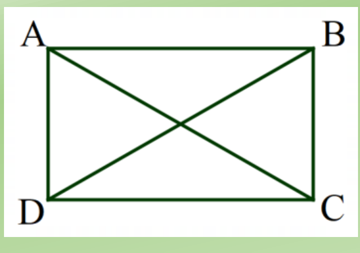
$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ & (AB \parallel DC \quad \text{مورب } AC) \\ AB = DC & \text{فرض} \quad (\text{متوازی اضلاع}) \\ \hat{B}_۲ = \hat{D}_۲ & (AB \parallel DC \quad \text{مورب } BD) \end{array}\right\} \Rightarrow AOB \cong DOC \quad (\text{ز ض ز})$$

و به دلیلی اینکه دو مثلث هم نهشت هستند ،در نتیجه کاملاً بر هم منطبق می شوند پس اجزای نظیر آنها نیز با هم برابرند.

در نتیجه :

$$OA = OC \quad , \quad OB = OD$$

تمرین (۵):

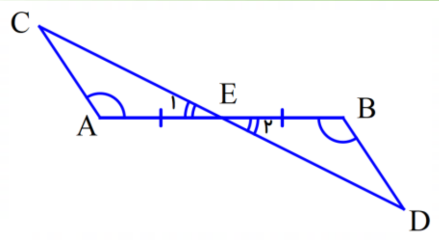


ثابت کنید در هر مستطیل ، قطرها با یکدیگر برابرند.

(راهنمایی: دو مثلث ADC و BDC را در نظر بگیرید.)

تمرین (۱):

با نوشتن جزئیات ،دلیل هم نهشتی دو مثلث مقابل را بنویسید.

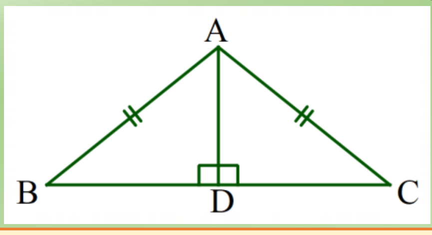


$$\left.\begin{array}{ll} E_۱ = E_۲ & \text{متقابل به راس} \\ AE = BE & \\ A = B & \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACE} \cong \overset{\Delta}{BED}$$

(ز ض ز)

تمرین (۲): با نوشتن جزئیات دلیل هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه زیر را بیان کنید.

(از ضلع مشترک استفاده کنید)

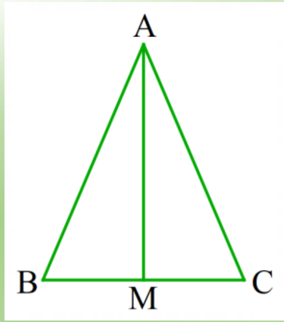


$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ AD = AD \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow ABD \cong ADC$$

(وض) وتر و یک ضلع

تمرین (۳): در مثلث متساوی الساقین ABC میانه AM را رسم کرده ایم.

(نقطه M وسط BC است.)مثلث های AMB و AMC به چه حالتی هم نهشت اند؟

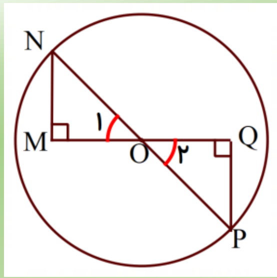


$$\left.\begin{array}{ll} AB = AC & \text{مثلث متساوی الساقین} \\ AM = AM & \text{ضلع مشترک} \\ BM = CM & M \ \text{وسط} \ BC \end{array}\right\} \Rightarrow ABM \cong ACM$$

(ض ض ض)

تمرین (٤):

دلیل هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه مقابل را بیان کنید.



$$\left.\begin{array}{ll} ON = OP & \text{شعاع دایره} \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ & \text{متقابل به راس} \end{array}\right\} \Rightarrow ONM \cong OPQ$$

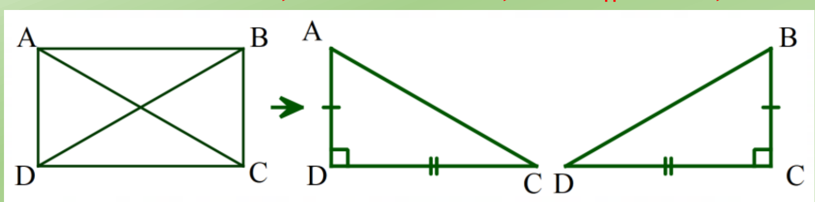
(و ز) وتر و زاویه

تمرین (۵): ثابت کنید در هر مستطیل ، قطرها با یکدیگر برابرند.

فرض: $A=B=C=D=۹۰^\circ$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$, $AD=BC$, $AB=DC$

حکم : $AC=BD$

استدلال:



$$\left.\begin{array}{ll} AD = BC & \text{فرض} \\ \hat{D} = \hat{C} = ۹۰ & \text{فرض} \\ DC = DC & \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow ADC \cong BDC \ (\text{ض ز ض}) \Rightarrow AC = BD$$

طراحی واجرا: فرامرز انتظاری ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

فعالیت :

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد،اما می توان مراحلی را مشخص کرد که برای حل مسئله هندسه ،توصیه می شود.

۱. صورت مسئله را خوب بخوانید و مفاهیمی که در آن وجود دارد را به دقت بررسی کنید.

۲.اگر مسئله شکل نداشته باشد،با توجه به اطلاعات مسئله ،یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

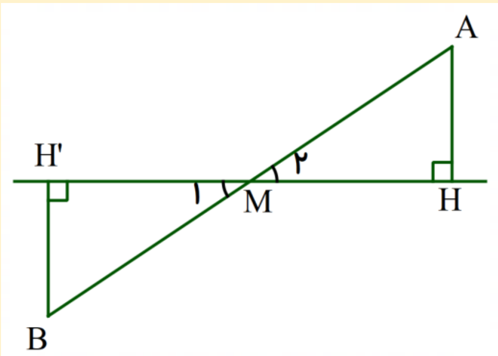
۳.داده های مسئله(فرض) و خواسته های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جدول منظم بنویسید.

۴.برای رسیدن از فرض به حکم، راه حلی پیدا کنید. یکی از پرکاربردترین روش ها استفاده از هم نهشتی مثلث ها است.

برای درک بهتر به مسئله زیر دقت کنید.

دو روستا با یک جاده مستقیم خاکی به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جاده آسفالته مستقیم ساخته شده که دو روستا در دوطرف آن قرار دارند،و جاده آسفالته درست از وسط جاده خاکی عبور می کند.اداره راه سازی می خواهد از هر روستا، یک جاده آسفالته با کوتاه ترین فاصله ممکن تا جاده اصلی بسازد،این اداره برای یکی از این روستا ها این جاده را ساخت، برای برآورد هزینه جاده روستای بعدی می بایست بدانند که کوتاه ترین فاصله آن روستا تا جاده اصلی چقدر است.مهندسان پیش بینی کرده اند که این جاده هم اندازه همان جاده ای است که ساخته اند،آیا این پیش بینی درست است؟

در مرحله اول که فهمیدن است باید دقت کنیم که کوتاه ترین فاصله چیست؟ همانطور که می دانید،کوتاه ترین فاصله از یک نقطه تا یک خط، خطی است عمود از نقطه بر خط. در مرحله دوم شکل مسئله را با جزئیات به دقت رسم می کنیم.



در این شکل نقاط A و B دو روستای مورد نظر هستند و نقطه M وسط جاده خاکی یا همان پاره خط AB است. AH و BH' نیز همان کوتاه ترین مسیرها که عمود هستند، می باشد.

در مرحله سوم فرض و حکم مسئله را می نویسیم.

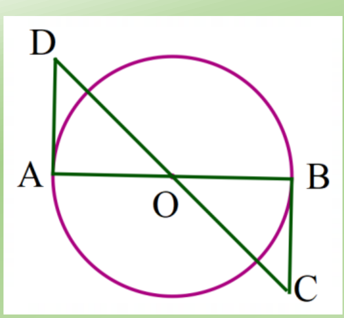
فرض	$MA = MB \qquad H = H' = ۹۰^\circ$
حکم	$AH = BH'$

در مرحله آخر که همان استدلال است، باید راهی برای رسیدن از فرض به حکم پیدا کنیم. در اینجا اگر بتوانیم نشان دهیم دو مثلث قائم الزاویه هم نهشت هستند، می توانیم نتیجه بگیریم که تمام اجزای متناظرآنها با هم برابرند ،در نتیجه می توانیم درستی حکم را نشان دهیم.

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \ (\text{طبق فرض}) \\ \widehat{H} = \widehat{H'} = ۹۰ \ (\text{طبق فرض}) \\ M_۱ = M_۲ \ (\text{متقابل به راس}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MAH \cong \Delta MBH' \ (\text{وتر و یک زاویه تند}) \Rightarrow AH = BH'$$

تمرین (۱):



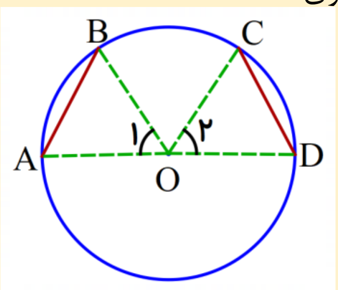
در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بردایره مماس اند،

نشان دهید که BC و AD برابرند.

(راهنمایی: در دایره خط مماس بر شعاع دایره در نقطه تماس عمود است.)

فعالیت :

در شکل زیر وتر های AB و CD با هم برابرند.نشان دهید کمان های AB و CD با هم مساوی اند.



ابتدا باید وتر و کمان را بشناسیم.وتر پاره خطی است که دو سر آن روی دایره است. کمان بخشی ازدایره است که بین دو نقطه قراردارد. برای اینکه بتوانیم برابر بودن کمان ها را نشان دهیم می توانیم از زاویه مرکزی که در پایه هشتم یادگرفته اید استفاده کنیم.

در پایه هشتم خواندید که زاویه مرکزی با کمان مقابلش برابر است.پس اگر نشان دهیم دو زاویه مرکزی با هم برابرند مسئله حل می گردد.

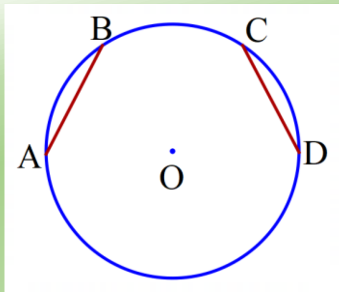
فرض	$AB=CD$
حکم	$AB=CD$

(به علامت کمان و تفاوت آن با پاره خط دقت کنید.)

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{array}{l} (\text{طبق فرض})\ AB = CD \\ (\text{شعاع دایره})\ OB = OC \\ (\text{شعاع دایره})\ OA = OD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD \ (\text{ض ض ض}) \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \underset{\text{برابری کمان و زاویه مرکزی}}{\Rightarrow} AB = CD$$

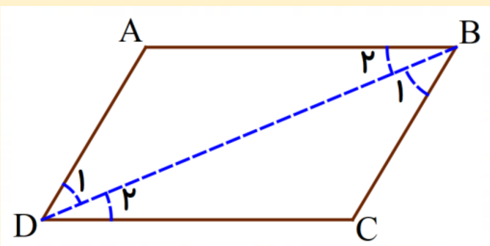
تمرین (۲):



در شکل مقابل کمان های AB و CD مساوی اند.

نشان دهید وتر های AB و CD با هم برابرند.

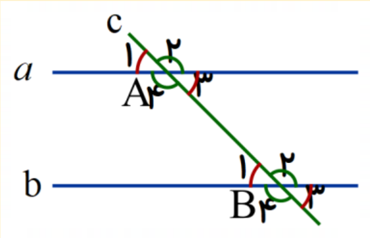
فعالیت :



ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، ضلع های روبرو با هم برابرند.

شاید این سوال برایتان پیش آید که این برابری در تعریف متوازی الاضلاع هست و نیازی به اثبات ندارد، ولی اگر به کتاب هشتم مراجعه کنید .تعریف متوازی الاضلاع فقط موازی بودن اضلاع مقابل را بیان می کند.

قبل از اینکه وارد مراحل اثبات شویم لازم است یک یادآوری از پایه هشتم در مورد خطوط موازی و مورب که در اینجا باید استفاده کنیم، داشته باشیم.



در شکل مقابل دو خط a و b موازی هستند و خط c این دو خط را در نقاط A و B قطع کرده است.در این صورت زاویه های تند باهم و زاویه های باز با هم برابرند.

$$\text{مورب } c \ , \ a \parallel b \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \hat{B}_1 = \hat{B}_3 \\ \hat{A}_2 = \hat{A}_4 = \hat{B}_2 = \hat{B}_4 \end{cases}$$

حالا شروع می کنیم به اثبات مسئله

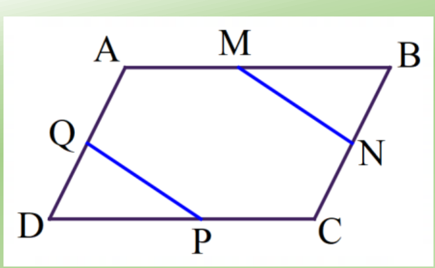
فرض	$AB \parallel CD \quad , \quad AD \parallel BC$
حکم	$AB = CD \quad , \quad AD = BC$

باز هم در این مسئله بهترین کار استفاده از هم نهشتی مثلث ها است.

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{array}{l} (\text{مورب } BD \ , AB \parallel DC)\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ (\text{ضلع مشترک})\ BD = BD \\ (\text{مورب } BD \ , AD \parallel BC)\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta BCD \ \ (\text{ز ض ز}) \Rightarrow AB = CD \ \text{و}\ AD = BC$$

تمرین (۳):

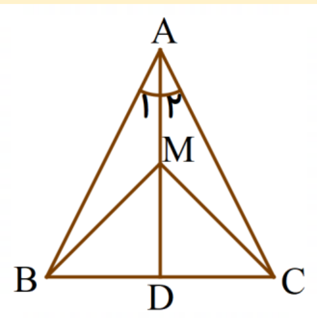


در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع است.و نقاط M و N و P و Q وسط های اضلاع متوازی الاضلاع اند.

ثابت کنید. $MN = PQ$

فعالیت :

نشان دهید، در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز از دو سر قاعده ، برابر است: $MB = MC$



همانطور که ملاحظه می کنید در صورت مسئله به نکته مثلث متساوی الساقین و نیمساز اشاره شده است.پس در فرض می آید.

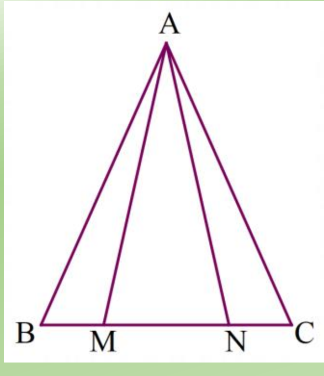
فرض	$AB = AC \quad , \quad A_1 = A_2$
حکم	$MB = MC$

برای استدلال دو مثلث AMB و AMC را در نظر می گریم.

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{array}{l} (\text{طبق فرض})\ AB = AC \\ (\text{طبق فرض})\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ (\text{ضلع مشترک})\ AM = AM \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta AMC \ \ (\text{ض ز ض}) \Rightarrow MB = MC$$

تمرین (٤):



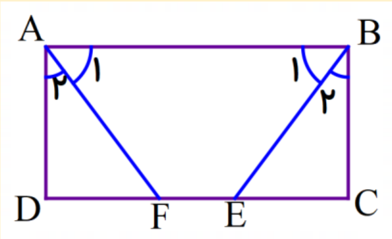
در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است.و نقاط M و N

روی قاعده BC طوری قرار دارند که $BM = NC$.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

(راهنمایی: در مثلث متساوی الساقین زاویه های مجاور قاعده با هم برابرند.)

فعالیت :



در مستطیل $ABCD$، پاره خط های BE و AF طوری رسم شده اند که

دو زاویه A_1 و B_1 برابرند. ثابت کنید. BE و AF مساوی اند.

از کلمه مستطیل اطلاعات زیادی را می توان گرفت که در فرض ذکر می کنیم.

فرض	$AB = CD \quad , \quad AD = BC \quad , \quad A = B = C = D = ۹۰^\circ \quad , A_1 = B_1$
حکم	$AF = BE$

دراستدلال باز هم کافی است نشان دهیم دو مثلث ADF و BCE هم نهشت هستند. نکته ای که در این جا مهم است ، علت برابری $A_2 = B_2$ است. زیرا ما زاویه هایی را نیاز داریم که داخل مثلث باشند.دلیل این است چون شکل مستطیل است و زاویه ها قائمه ،دو زاویه که برابر هستند ، متمم آنها نیز برابر می شوند.(متمم: دو زاویه که جمعشان ۹۰ درجه شود.)

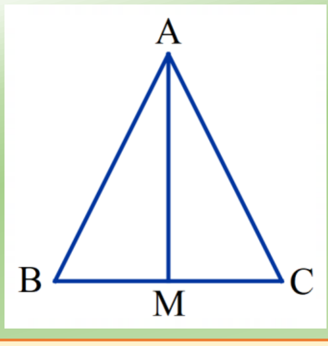
می توان این برابری را به صورت مقابل هم نشان داد.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = ۹۰\\ \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = ۹۰\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_1} + \hat{A}_2 = \cancel{\hat{B}_1} + \hat{B}_2 \Rightarrow A_2 = B_2$$

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{array}{r}(\text{طبق فرض})\ \hat{D} = \hat{C} = ۹۰\\ (\text{طبق فرض})\ AD = BC\\ (\text{متمم برابر})\ \hat{A}_2 = \hat{B}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADF \cong \Delta BCE \quad (\text{ز ض ز}) \Rightarrow AF = BE$$

تمرین (٥):

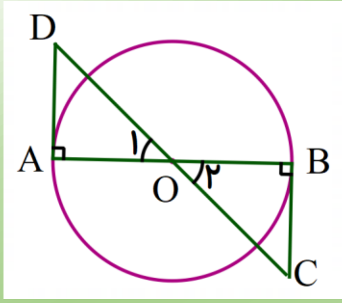


ثابت کنید در مثلث متساوی الساقین ABC میانه AM ، نیمساز زاویه A نیز هست.

(میانه پاره خطی که راس را به وسط ضلع مقابلش وصل می کند.)

طراحی واجرا: فرامرز انتظاری ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

تمرین (۱):



در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بردایره مماس اند،

نشان دهید که BC و AD برابرند.

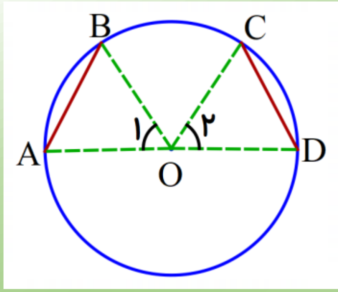
(راهنمایی: در دایره خط مماس بر شعاع دایره در نقطه تماس عمود است.)

فرض	$A = B = ۹۰^\circ$
حکم	$AD = BC$

$\boxed{\text{تساوی اجزای متناظر}}$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{متقابل به راس})\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ (\text{شعاع دایره})\ OA = OB \\ (\text{طبق فرض})\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\, OAD \cong \Delta\, OBC\ \ (\text{ز ض ز}) \Rightarrow AD = BC$$

تمرین (۲):



در شکل مقابل کمان های AB و CD مساوی اند.

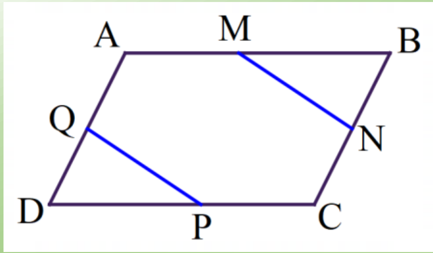
نشان دهید وتر های AB و CD با هم برابرند.

فرض	$AB = CD \quad \Rightarrow O_۱ = O_۲$
حکم	$AB = CD$

$\boxed{\text{تساوی اجزای متناظر}}$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{شعاع دایره})\ OB = OC \\ (\text{طبق فرض})\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ (\text{شعاع دایره})\ OA = OD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\, OAB \cong \Delta\, OCD\ \ (\text{ض ز ض}) \Rightarrow AB = CD$$

تمرین (۳):



در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع است.و نقاط

M و N و P و Q وسط های اضلاع متوازی الاضلاع اند.

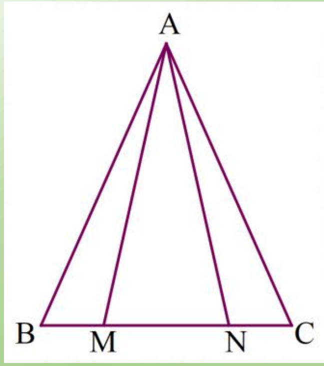
ثابت کنید. $MN = PQ$

فرض	$AB = CD \quad , \quad AD = BC \quad , \quad A = C \quad , \quad B = D$ $AM = MB = DP = PC \quad , \quad AQ = QD = BN = NC$
حکم	$MN = PQ$

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{aligned} \text{(طبق فرض)}\ & BM = DP \\ \text{(طبق فرض)}\ & \hat{B} = \hat{D} \\ \text{(طبق فرض)}\ & DQ = BN \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\, MBN \cong \Delta\, QDP \ \ \text{(ض ز ض)} \Rightarrow MN = QP$$

تمرین (٤):



در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است.و نقاط M و N

روی قاعده BC طوری قرار دارند که $BM = NC$.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

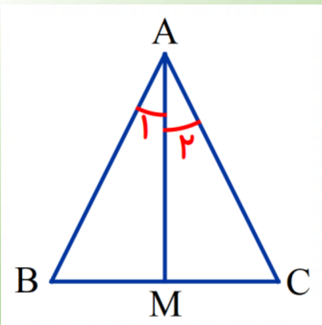
(راهنمایی: در مثلث متساوی الساقین زاویه های مجاور قاعده با هم برابرند.)

فرض	$AB = AC \quad , \quad B = C \quad , \quad BM = NC$
حکم	$AM = AN$ مثلث AMN متساوی الساقین است.

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{aligned} \text{(طبق فرض)}\ & AB = AC \\ \text{(طبق فرض)}\ & \hat{B} = \hat{C} \\ \text{(طبق فرض)}\ & BM = CN \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\, ABM \cong \Delta\, ACN \ \ \text{(ض ز ض)} \Rightarrow AM = AN \Rightarrow AMN \ \text{متساوی الساقین}$$

تمرین (٥):



ثابت کنید در مثلث متساوی الساقین ABC میانه AM ، نیمساز زاویه A نیز هست.

(برای این مسئله می توان با دو روش استدلال کرد)

فرض	$AB = AC \quad , \quad B = C \quad , \quad BM = MC$
حکم	$A_1 = A_2$

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{aligned} \text{(طبق فرض)}\ & AB = AC \\ \text{(طبق فرض)}\ & \hat{B} = \hat{C} \\ \text{(طبق فرض)}\ & BM = CM \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\, AMB \cong \Delta\, AMC \ \ \text{(ض ز ض)} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

تساوی اجزای متناظر

$$\left.\begin{aligned} \text{(طبق فرض)}\ & AB = AC \\ \text{(ضلع مشترک)}\ & AM = AM \\ \text{(طبق فرض)}\ & BM = CM \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\, AMB \cong \Delta\, AMC \ \ \text{(ض ض ض)} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

فعالیت :

در تصویرهای زیر، دو گل شبیه هم را می بینید. آیا هر دو گل به طور کامل مثل هم هستند؟

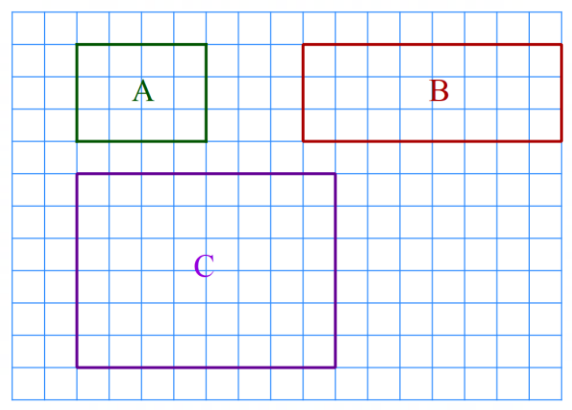
همانطور که مشاهده می کنید، دو گل مثل هم نیستند و تفاوتهایی دارند. هم از نظر ظاهری و هم از نظر اندازه.

تصویرهای زیر ،عکس هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه تر است؟

باز هم اگر دقت کنید.شکل سمت چپ بیشتر به برج آزادی شباهت دارد. در شکل سمت راست چه اشکالی می بینید؟

حال به دو تصویر از یک کودک نگاه کنید.

تفاوت این دو تصویر چیست؟ هر دو دقیقاً مثل هم هستند فقط اندازه هایشان تغییر کرده است. و این تغییر هم طوری است که تصویر حالت خود را حفظ کرده است. در بین این تصاویر که در فعالیت مشاهده کردید. همین تصویر کوک که در انتها آمده است مفهوم تشابه را در ریاضی می رساند.



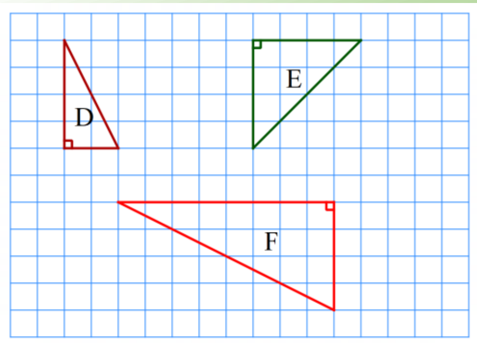
با توجه به تصاویری که در صفحه قبل مشاهده کردید، کدام دو شکل با هم متشابه هستند؟ به اندازه ها دقت کنید.

آیا دو شکل A و B متشابه هستند؟ در تصاویر بالا شما را به یاد کدام شکل می اندازد؟ بله دو تصویر از برج آزادی که شبیه به هم نبودند.

همانطور که خودتان متوجه شدید. دو شکل A و C با هم متشابه هستند. اگر کمی دقت کنید و به اندازه ضلع ها توجه کنید. رابطه ای بین آنها می توانید ببینید. و همچنین زاویه ها که در دو شکل نظیر به نظیر با هم برابرند

« هر گاه در دو چند ضلعی ، همه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشد(کوچک یا بزرگ شده، یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی با هم متشابه اند.»

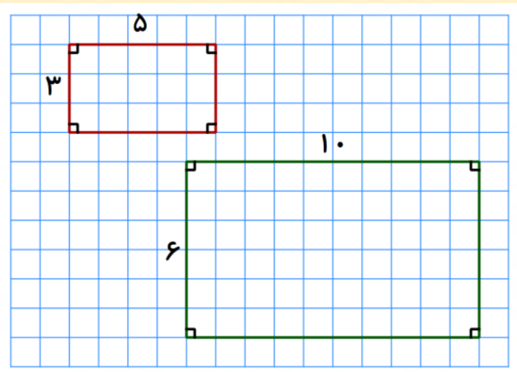
تمرین (۱):



کدام دو شکل با هم متشابه هستند؟

در مورد نسبت تغییر آنها (بزرگتر یا کوچکتر شدن)توضیح دهید.

فعالیت :



دو شکل زیر با هم متشابه هستند، به اندازه ضلع های متناظر آنها دقت کنید.

نسبت ضلع ها را از شکل کوچک به بزرگ می نویسیم و ساده می کنیم.

$\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۱۰}$(طول ها) $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$(عرض ها)

به خاطر اینکه دو شکل متشابه هستند مشاهده کردید که نسبت ها یکی است.

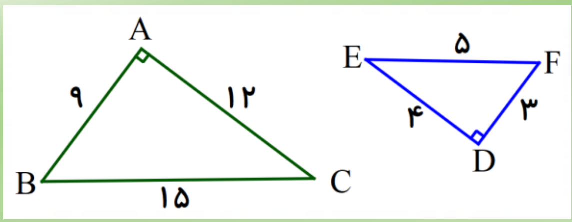
حال اگر از شکل بزرگ تر شروع کنیم نسبت به چه صورت می شود. $۲=\frac{۲}{۱}=\frac{۱۰}{۵}$ $۲=\frac{۲}{۱}=\frac{۶}{۳}$

« به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می گوییم.»

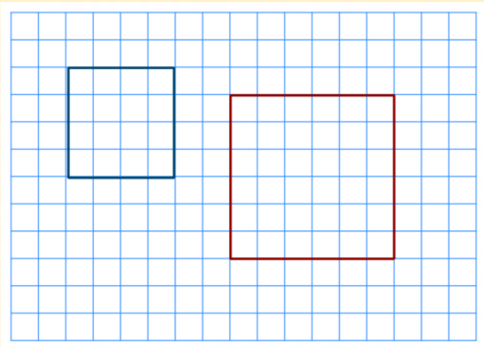
در این مثال هم $\frac{۱}{۲}$ و همچنین ۲ نسبت تشابه هستند.

تمرین (۲):

در شکل مقابل دو مثلث متشابه هستند،ابتدا زاویه های مساوی را علامت گذاری کرده، سپس نسبت تشابه را به دست آورید.



فعالیت :



آیا دو مربع مقابل متشابه اند؟

در مربع هر چهار زاویه برابر ۹۰ درجه است و هر چهار ضلع هم با هم برابرند

اگر نسبت هر چهار ضلع را حساب کنید همه یکسان هستند. پس نسبت تشابه

برابر است با $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ یا $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

چون در هر مربع اضلاع با هم برابرند و زاویه ها نیز با هم برابرند، می توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابه هستند.

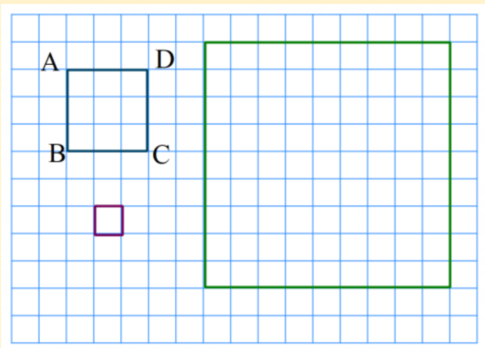
تمرین (۳):

الف) آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه هستند؟ چرا؟

ب) آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع با هم متشابه هستند؟ چرا؟

ج) آیا به طور کلی هر دو چند ضلعی منتظم با تعداد اضلاع برابر متشابه هستند؟ چرا؟

فعالیت :



می خواهیم مربعی رسم کنیم که با مربع ABCD متشابه باشد.

و نسبت تشابه هم $\frac{1}{3}$ باشد. به نظر شما این مسئله چند پاسخ دارد؟

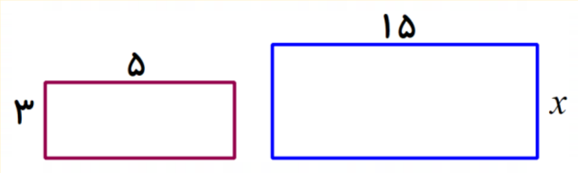
بله این مسئله دو پاسخ دارد، یکی **۳**برابر بزرگتر و یکی هم **۳**برابر کوچکتر.

تمرین (٤):

دو لوزی متشابه هستند. نسبت تشابه آنها $\frac{1}{5}$ است. اگر اندازه ضلع یکی از این لوزی ها **۱۰**سانتیمتر باشد.اندازه ضلع لوزی دیگر چند است؟(مسئله دو پاسخ دارد.)

@riazicafe

فعالیت :



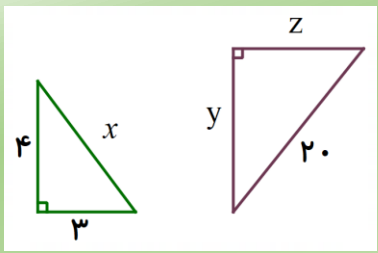
دو مستطیل مقابل متشابه هستند. می خواهیم مقدار x را به دست آوریم.

با توجه به اندازه های طول می توان نسبت تشابه را محاسبه کرد. $\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$

حال کافی است تناسبی برای عرض نوشت. $\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{x} \Rightarrow x=۹$

فقط دقت کنید که اندازه ها در نسبت درست نوشته شود. یعنی بزرگ و کوچک بودن شکل را حتماً رعایت کنید.

تمرین (۵):



دو مثلث مقابل متشابه هستند.

الف) مقادیر x و y و z را به دست آورید.

(راهنمایی: ابتداx را از طریق فیثاغورس به دست آورید.)

ب) نسبت تشابه آنها چند است؟

فعالیت :

یکی از کاربردهای مهم تشابه در نقشه است. همانطور که می دانید،نقشه تصویری افقی است ،از کره زمین که به اندازه مورد نظر کوچک شده باشد.

در نقشه بالا که مربوط به استان گلستان است. مقدار کوچک شدن را با عددی که مقیاس نقشه است نشان می دهند. در این نقشه مقیاس **۱:۲,۳۰۰,۰۰۰** است و این بدان معنی است که نسبت تشابه این نقشه با واقعیت برابر کسر زیر است.

$$\frac{۱}{۲,۳۰۰,۰۰۰}$$

روی نقشه فاصله مستقیم بین دو شهر گرگان و گنبد را با یک پاره خط به رنگ سبز نشان داده ایم. این فاصله روی نقشه برابر **۳/۴** سانتیمتر است. با استفاده از مقیاس نقشه می توانیم این فاصله را در واقعیت هم حساب کنیم.

$$\frac{۱}{۲۳۰۰۰۰۰} = \frac{۳/۴}{x} \Rightarrow x = ۲۳۰۰۰۰۰ \times ۳/۴ = ۷۸۲۰۰۰۰\ \text{سانتیمتر} \Rightarrow ۷۸۲۰۰\ \text{متر} \Rightarrow ۷۸/۲\ \text{کیلومتر}$$

(دقت کنید. هر متر ۱۰۰ سانتیمتر است و هر کیلومتر هم ۱۰۰۰ متر است.)

از طرفی ما می دانیم جاده ای که گرگان را به گنبد وصل می کند ۹۰ کیلومتر است. این جاده در نقشه چند سانتیمتر می شود.

$$۹۰\ \text{کیلومتر} = ۹۰۰۰۰\ \text{متر} \Rightarrow ۹۰۰۰۰۰۰\ \text{سانتیمتر} \Rightarrow \frac{۱}{۲۳۰۰۰۰۰} = \frac{x}{۹۰۰۰۰۰۰} \Rightarrow x = \frac{۹۰۰۰۰۰۰}{۲۳۰۰۰۰۰} \simeq ۳/۹$$

همچنین مشاهده می کنید که زاویه ای که ساحل در منطقه میانکاله ایجاد کرده روی نقشه حدود ۸۰ درجه است. به نظر شما این زاویه در واقعیت چند درجه است؟ بله همان ۸۰ درجه است زیرا در شکل های متشابه زاویه های متناظر با هم برابرند.

تمرین (٦):

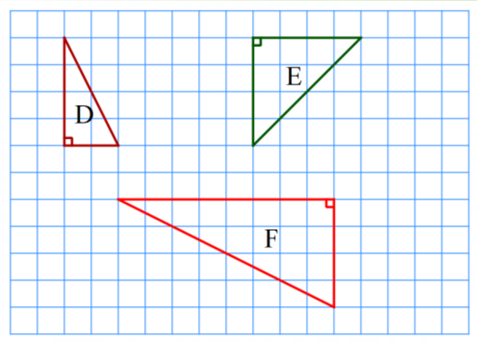
مقیاس نقشه ای **۱:۵۰۰,۰۰۰** است.

الف) فاصله دو شهر بر روی نقشه ۷ سانتی متر است. این دو شهر در واقعیت چقدر از هم فاصله دارند؟

ب) فاصله دو روستا در منطقه این نقشه ۱۰ کیلومتر است. این فاصله روی نقشه چند سانتی متر است؟

ج) در یک سه راهی زاویه ای که بین سه جاده است هر کدام برابر ۱۲۰ درجه است. این زاویه در نقشه چند درجه است؟

تمرین (۱):

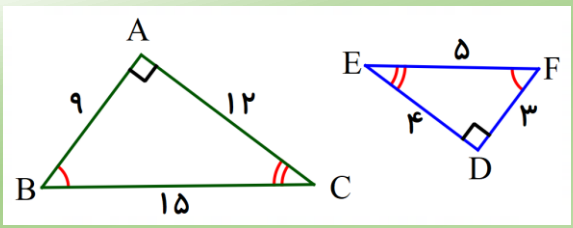


کدام دو شکل با هم متشابه هستند؟

در مورد نسبت تغییر آنها (بزرگتر یا کوچکتر شدن)توضیح دهید.

شکل D با شکل F متشابه است. زیرا اندازه ضلع های آنها ۲ برابر شده است.

تمرین (۲):



در شکل مقابل دو مثلث متشابه هستند،ابتدا زاویه های مساوی را علامت گذاری کرده، سپس نسبت تشابه را به دست آورید.

نسبت تشابه $\frac{۱}{۳}$ است. $\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$ $\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$ $\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$

تمرین (۳):

الف) آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه هستند؟چرا؟ خیر ، زیرا اندازه ضلع های آنها متفاوت است. در نتیجه نسبت بین اضلاع متناظر دو شکل دلخواه یکسان نمی شود.

ب) آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع با هم متشابه هستند؟ چرا؟ بله، زیرا سه ضلع با هم برابر و سه زاویه با هم برابرند. در نتیجه نسبت بین اضلاع متناظر دو مثلث متساوی الاضلاع همواره یکسان می شود.

ج) آیا به طور کلی هر دو چندضلعی منتظم با تعداد اضلاع مساوی متشابه هستند؟ چرا؟ بله ، زیرا همه ضلع ها باهم برابرند و همه زاویه ها نیز با هم برابرند. در نتیجه نسبت بین اضلاع متناظر دو چندضلعی منتظم با تعداد اضلاع برابر همواره یکسان می شود.

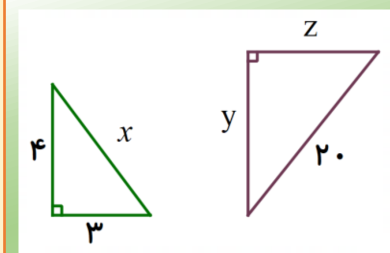
تمرین (٤):

دو لوزی متشابه هستند. نسبت تشابه آنها $\frac{۱}{۵}$ است. اگر اندازه ضلع یکی از این لوزی ها ۱۰سانتیمتر باشد.اندازه ضلع لوزی دیگر چند است؟(مسئله دو پاسخ دارد.)

$\frac{۱}{۵}=\frac{x}{۱۰} \Rightarrow x=۲$, $\frac{۱}{۵}=\frac{۱۰}{x} \Rightarrow x=۵۰$

تمرین (۵):

دو مثلث مقابل متشابه هستند.



الف) مقادیر x و y و z را به دست آورید.

(راهنمایی: ابتداxرا ازطریق فیثاغورس به دست آورید.)

ب) نسبت تشابه آنها چند است؟

$$۴^۲+۳^۲=x^۲ \Rightarrow ۱۶+۹=x^۲ \Rightarrow x^۲=۲۵ \Rightarrow x=\sqrt{۲۵}=۵$$

نسبت تشابه برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

$$\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۴}{y} \Rightarrow y=۱۶ \quad , \quad \frac{۱}{۴}=\frac{۳}{z} \Rightarrow z=۱۲$$

تمرین (٦):

مقیاس نقشه ای ۱:۵۰۰,۰۰۰ است.

الف) فاصله دو شهر بر روی نقشه ۷ سانتی متر است. این دو شهر در واقعیت چقدر از هم فاصله دارند؟

$\frac{۱}{۵۰۰۰۰۰}=\frac{۷}{x} \Rightarrow x=۵۰۰۰۰۰\times۷=۳۵۰۰۰۰۰$ سانتیمتر $\Rightarrow$ ۳۵۰۰۰ متر $\Rightarrow$ ۳۵ کیلومتر

ب) فاصله دو روستا در منطقه این نقشه ۱۰ کیلومتر است. این فاصله روی نقشه چند سانتی متر است؟

۱۰کیلومتر = ۱۰۰۰۰متر $\Rightarrow$ ۱۰۰۰۰۰۰سانتیمتر $\Rightarrow \frac{۱}{۵۰۰۰۰۰}=\frac{x}{۱۰۰۰۰۰۰} \Rightarrow x=\frac{۱۰۰۰۰۰۰}{۵۰۰۰۰۰}=۲$ سانتی متر

ج) در یک سه راهی زاویه ای که بین سه جاده است هر کدام برابر ۱۲۰ درجه است. این زاویه در نقشه چند درجه است؟

در تشابه و مقیاس زاویه ها تغییری نمی کنند. همان ۱۲۰ درجه است.