



## گفتگوی با منطق ریاضی

**گزاره:** به جمله‌ی خبری که در حال حاضر یا آئینده، دارای ارزش درست (T-د) یا نادرست (F-ن) باشد، گزاره می‌نویسیم، که معمولاً آن را با  $p, q, r, s$  و... نمایش می‌دهیم.

**توجه:**

۱- گزاره فقط دارای یک ارزش است یعنی نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

۲- جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره نیستند.

مثال: از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کرده و ارزش آنها را در صورت امکان بنویسید.

الف) ایران کشور آسیایی است. **گزاره‌ی درست است.**

ب) هر عدد زوج بزرگتر از ۱ را می‌توان به صورت حاصلجمع دو عدد اول نوشت. (حوس بلد باخ) **گزاره ولی ارزش آن مشخص نیست.**

پ) آیا  $۲+۲$  برابر ۴ است؟ **گزاره نیست.**

ت) چه هوای خوبی! **گزاره نیست.**

ث) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر  $\frac{۱}{۳}$  است. **گزاره‌ی درست است.**

ج) هر معادله‌ی درجه دوم دارای دو جواب حقیقی متماثل است. **گزاره نادرست است.**

د)  $۹-۱ > ۳+۴$  **گزاره‌ی نادرست است.**

جدول ارزش گزاره‌ها:

جدول یک گزاره ای:

P
۰
۱

جدول دو گزاره ای:

P	q
۰	۰
۰	۱
۱	۰
۱	۱

جدول سه گزاره ای:

P	q	r
۰	۰	۰
۰	۰	۱
۰	۱	۰
۰	۱	۱
۱	۰	۰
۱	۰	۱
۱	۱	۰
۱	۱	۱

نتیجه: جدول ارزش گزاره‌ای دارای  $2^n$  حالت است.

گزاره‌ها: هر جمله‌ی خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود.

به عنوان نمونه " a عدد فرد است " یک گزاره نامرابطه .

اگر  $a=۱$  در نظر گرفته شود، گزاره‌ای درست است

و اگر  $a=۲$  در نظر گرفته شود، گزاره‌ای نادرست است.

دامنه‌ی متغیر: مجموعه‌ی مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیر در گزاره‌ها قرار داد، دامنه‌ی متغیر آن گزاره نام است، که با  $D$  نمایش می‌دهیم.

**مجموعه جواب:** زیر مجموعه‌ها را از دامنه‌ی متغیر است که به ازای تمام عضوهای آن گزاره نادره نما، تبدیل به گزاره‌ی درست شود و با S نمایش می‌دهیم.

**سوال:** دامنه‌ی متغیر گزاره‌هاها را زیر داده شده است. در هر مورد مجموعه جواب را تعیین کنید.

الف) عدد فرد است.  $(D = \{1, 2, 3, 4\})$   $S = \{1, 3\}$

ب)  $x$  مضرب ۷ است.  $(D = \mathbb{Z})$

$S = \{0, \pm 7, \pm 14, \dots\}$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و  $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$   $(D = \{1, 2, \dots, 6\})$

$S = \{1, 2, \dots, 6\} = D$

ت)  $(D = \mathbb{R})$   $2x^2 + 4x + 3 = 0$

حل معادله:  $2 + 3 = 5 \leftarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{3}{2}$   $S = \{-1, -\frac{3}{2}\}$

ث)  $(D = \mathbb{Z})$   $|x| < 2$   $S = \{-1, 0, 1\}$


**تقیض گزاره:** تقیض هر گزاره مانند P را با عبار P نمایش می‌دهیم.

**سوال:** تقیض گزاره‌ی « عدد فرد است » را بنویسید.

۳ عدد فرد نیست یا چنین نیست که ۳ عدد فرد باشد.

P	$\sim P$
>	ن
ن	>

جدول ارزش لیا گزاره به همراه تقیض آن

ملاسعدی @sinxcosx  
  
 09168324500

توجه: نقیض نقیض هر گزاره هم از خود آن گزاره است.  $\sim(\sim P) \equiv P$

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$
>	ن	>
ن	>	ن

این ادعا طبق جدول رو بر رو ثابت است:

$\sim(\sim P) \equiv P$

**ترکیب فصلی دو گزاره:** هرگاه P و Q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «P یا Q» را با نماد  $P \vee Q$  نمایش داده و آن را ترکیب فصلی دو گزاره نامیم. این ترکیب وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند و اگر حداقل یکی از دو گزاره درست باشد، ترکیب درست است.

توجه: به رابطی منطقی  $\vee$  فاصل گفته می شود.

سؤال: معادله  $2x^2 - 4x = 0$  را حل کنید.

$$x(2x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{2}$$

P	Q	$P \vee Q$
>	>	>
>	ن	>
ن	>	>
ن	ن	ن

جدول ارزش گزاره‌ی مرکب  $P \vee Q$ :

سؤال: ثابت کنید  $\sim P \vee P \equiv T$

P	$\sim P$	$\sim P \vee P$
>	ن	>
ن	>	>

$$\sim P \vee P \equiv T$$

سؤال: جدول ارزش هر مورد را رسم کنید

الف)  $P \vee (\sim P)$

P	Q	$\sim Q$	$\sim Q \vee P$	$P \vee (\sim Q \vee P)$
>	>	ن	>	>
>	ن	>	>	>
ن	>	ن	ن	ن
ن	ن	>	>	>

ب)  $(P \vee q) \vee (\sim P \vee r)$

P	q	r	$\sim P$	$P \vee q$	$\sim P \vee r$	$(P \vee q) \vee (\sim P \vee r)$
>	>	>	ن	>	>	>
>	>	ن	ن	>	ن	>
>	ن	>	ن	>	>	>
>	ن	ن	ن	>	ن	>
ن	>	>	>	>	>	>
ن	>	ن	>	>	>	>
ن	ن	>	>	ن	>	>
ن	ن	ن	>	ن	>	>

$\Rightarrow (P \vee q) \vee (\sim P \vee r) \equiv T$

پ)  $\sim (P \vee \sim q)$

P	q	$\sim q$	$P \vee \sim q$	$\sim (P \vee \sim q)$
>	>	ن	>	ن
>	ن	>	>	ن
ن	>	ن	ن	>
ن	ن	>	>	ن

تمرین: ثابت کنید  $\sim (\sim P \vee (P \vee q)) \equiv F$

P	q	$\sim P$	$P \vee q$	$\sim P \vee (P \vee q)$	$\sim (\sim P \vee (P \vee q))$
>	>	ن	>	>	ن
>	ن	ن	>	>	ن
ن	>	>	>	>	ن
ن	ن	>	ن	>	ن

$\Rightarrow \sim (\sim P \vee (P \vee q)) \equiv F$

توجه: ترکیب فعلی دارای خاصیت ها جا به جایی و شرکت پذیری است.  
به عبارت دیگر:

①  $P \vee q \equiv q \vee P$

②  $P \vee (q \vee r) \equiv (P \vee q) \vee r$

رابطه به کمک جدول صورت می گیرد.

@sinxcosx ملاسعیدی  
09168324500

ملک:  $P \vee T \equiv T$ ,  $P \vee F \equiv P$

**ترکیب عطفی دو گزاره:** هرگاه  $P$  و  $Q$  دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب « $P$  و  $Q$ » را با نماد  $P \wedge Q$  نمایش داده‌اند و آن را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم. این ترکیب وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند، و اگر حداقل یکی از گزاره‌ها نادرست باشند، ترکیب نادرست است.

**توجه:** به رابطه‌ی منطقی  $\wedge$  عطف گفته می‌شود.

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
$\wedge$	$\neg$	$\neg$
$\neg$	$\wedge$	$\neg$
$\neg$	$\neg$	$\neg$

جدول ارزش گزاره‌های مرکب  $P \wedge Q$ :

سؤال: سؤال دهید  $\neg P \wedge P \equiv F$

$P$	$\neg P$	$\neg P \wedge P$
$\wedge$	$\neg$	$\neg$
$\neg$	$\wedge$	$\neg$

$\Rightarrow \neg P \wedge P \equiv F$

سؤال ۱: جدول ارزش هر مورد را بنویسید.

الف)  $\neg P \wedge (P \wedge P)$

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \wedge P$	$\neg P \wedge (P \wedge P)$
$\wedge$	$\wedge$	$\neg$	$\wedge$	$\neg$
$\wedge$	$\neg$	$\neg$	$\neg$	$\neg$
$\neg$	$\wedge$	$\wedge$	$\neg$	$\neg$
$\neg$	$\neg$	$\wedge$	$\neg$	$\neg$

$\neg P \wedge (P \wedge P) \equiv F$

ب)  $\neg(P \wedge \neg Q)$

$P$	$Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
$\wedge$	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	$\wedge$
$\wedge$	$\neg$	$\wedge$	$\wedge$	$\neg$
$\neg$	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	$\wedge$
$\neg$	$\neg$	$\wedge$	$\neg$	$\wedge$

توجه: ترکیب عطفی دارای خاصیت‌های جابه‌جایی و شریک‌پذیری است. به عبارت دیگر:

①  $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

②  $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

رابطه‌ها به کمک جدول صورت می‌گیرد.

نکته:  $P \wedge T \equiv P, P \wedge F \equiv F$

\* قوانین توزیع پذیری (بخشی) \*

الف)  $P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r)$

P	q	r	$P \wedge q$	$P \wedge r$	$q \vee r$	$P \wedge (q \vee r)$	$(P \wedge q) \vee (P \wedge r)$
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	<	>	<	>	>	>
>	<	>	<	>	>	>	>
>	<	<	<	<	<	<	<
<	>	>	<	<	>	<	<
<	>	<	<	<	<	<	<
<	<	>	<	<	>	<	<
<	<	<	<	<	<	<	<

که هم ارزی برقرار است

ب)  $P \vee (q \wedge r) \equiv (P \vee q) \wedge (P \vee r)$


P	q	r	$P \vee q$	$P \vee r$	$q \wedge r$	$P \vee (q \wedge r)$	$(P \vee q) \wedge (P \vee r)$
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	<	>	>	<	>	>
>	<	>	>	>	<	>	>
>	<	<	>	>	<	>	>
<	>	>	>	>	>	>	>
<	>	<	>	>	<	>	>
<	<	>	<	>	<	<	<
<	<	<	<	<	<	<	<

که هم ارزی برقرار است

سؤال: عبارت  $\sim P \wedge (q \vee P)$  را ساده کنید.

عبارت  $\equiv (\sim P \wedge q) \vee (\sim P \wedge P) \equiv \sim P \wedge q$

F

ملا سعیدی @sinxcosx  
  
 09168324500

## \* قوانین دموورگان \*

الف)  $\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$
>	>	ن	ن	>	ن	ن
>	ن	ن	>	ن	>	>
ن	>	>	ن	ن	>	>
ن	ن	>	>	ن	>	>

که هم ارزند

ب)  $\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$\sim P \wedge \sim Q$
>	>	ن	ن	>	ن	ن
>	ن	ن	>	>	ن	ن
ن	>	>	ن	>	ن	ن
ن	ن	>	>	ن	>	>

که هم ارزند

سؤال: عبارت  $\sim(P \vee \sim Q) \vee (P \wedge Q)$  را ساده کنید.

عبارت  $\equiv (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \equiv Q \wedge (\underbrace{\sim P \vee P}_T) \equiv Q$

سؤال: در صورتی که  $\sim P \vee Q \equiv F$  باشد عبارات زیر را ساده کنید.

$\hookrightarrow P \equiv T, Q \equiv F$

الف)  $P \wedge Q \equiv F$

ب)  $P \vee \sim Q \equiv T \vee T \equiv T$

پ)  $(P \wedge r) \vee (Q \wedge r) \equiv r \wedge (P \vee Q) \equiv r \wedge T \equiv r$



تمرین: اگر ارزش  $P$  و  $(P \wedge \sim q) \sim$  درست باشد، ارزش  $q$  را تعیین کنید

$$\sim(P \wedge \sim q) \equiv \sim P \vee q \equiv F \vee q \equiv q \Rightarrow q \equiv T$$

تمرین: اگر  $P \wedge q \equiv F$  ثابت کنید  $(\sim P \vee q) \wedge P \equiv F$

$$(\sim P \vee q) \wedge P \equiv (\underbrace{\sim P \wedge P}_F) \vee (\underbrace{P \wedge q}_F) \equiv F$$

### \* قوانین جذب \*

الف)  $P \wedge (P \vee q) \equiv P$

P	q	$P \vee q$	$P \wedge (P \vee q)$
>	>	>	>
>	ن	>	>
ن	>	>	ن
ن	ن	ن	ن

که هم ارزند

ب)  $P \vee (P \wedge q) \equiv P$

P	q	$P \wedge q$	$P \vee (P \wedge q)$
>	>	>	>
>	ن	ن	>
ن	>	ن	ن
ن	ن	ن	ن

که هم ارزند

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

\* نمونه سوال \*

۱- اگر  $p \wedge q \equiv T$  باشد، درباره‌ی ارزش  $p \vee (q \wedge r)$  چه می‌توان گفت؟

$$p \vee (q \wedge r) \equiv T$$

$$\hookrightarrow p \equiv T, q \equiv T$$

↓  
T

۲- صحت هم‌ارزی‌های زیر را بدین جدول ثابت کنید.

الف)  $\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv F$

$$\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge p) \wedge q = F \wedge q \equiv F$$

ب)  $(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$

$$\text{چپ} \equiv [\underbrace{\sim p \vee (\sim q \wedge q)}_F] \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \sim p \wedge (p \vee q) \equiv \underbrace{(\sim p \wedge p)}_F \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p \wedge q$$

پ)  $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p$

$$\text{چپ} \equiv \sim p \wedge \underbrace{(q \vee \sim q)}_T \equiv \sim p$$

ت)  $(p \vee \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$

$$\text{چپ} \equiv \underbrace{[p \vee (p \wedge q)]}_{p} \vee \sim q \equiv p \vee \sim q$$

ث)  $p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

$$\text{چپ} \equiv p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\equiv \underbrace{(p \wedge \sim p)}_F \wedge \sim q \equiv F$$

$$\text{ج) } (P \vee \sim Q) \vee (\sim P \vee Q) \equiv T$$

$$\text{پہ } \equiv (P \vee \sim P) \vee (\sim Q \vee Q) \equiv T \vee T \equiv T$$

$$\text{ج) } P \wedge \sim [Q \vee (P \wedge \sim Q)] \equiv F$$

$$\text{پہ } \equiv P \wedge \sim [(Q \vee P) \wedge \overbrace{(Q \vee \sim Q)}^T]$$

$$\equiv P \wedge \sim (Q \vee P) \equiv P \wedge (\sim Q \wedge \sim P)$$

$$\equiv \underbrace{(P \wedge \sim P)}_F \wedge \sim Q \equiv F$$

@sinxcosx ملاسعدی



09168324500

۳- اگر  $q \wedge r \equiv F$  ثابت کنید  $(p \vee q) \wedge (r \vee p) \equiv p$

$$(p \vee q) \wedge (r \vee p) \equiv p \vee \underbrace{(q \wedge r)}_F \equiv p$$

۴- اگر ارزش  $P$  و  $\sim(P \wedge \sim q)$  درست باشند، ارزش  $q$  را تعیین کنید.

$$\sim(P \wedge \sim q) \equiv T \Rightarrow \underbrace{\sim P \vee q}_F \equiv T \Rightarrow q \equiv T$$

۵- اگر  $p \equiv q$  ثابت کنید  $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv F$

برهان خلف:  $p \equiv q$  سیم،  $p \equiv \sim q$  و  $\sim p \equiv q$ ،  
نابراین:

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim p) \\ \equiv p \vee (\sim p) \equiv T \rightarrow \text{تناقض است}$$

روش دوم: واضح است که  $p \wedge \sim q \equiv F$  و  $\sim p \wedge q \equiv F$  هستند.

$$p \equiv p \vee F \equiv p \vee \underbrace{(\sim p \wedge q)}_T \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$$

$$q \equiv q \vee F \equiv q \vee \underbrace{(p \wedge \sim q)}_T \equiv \underbrace{(q \vee p)}_T \wedge (q \vee \sim q) \equiv q \vee p \quad \left. \vphantom{q \equiv q \vee F} \right\} \rightarrow p \equiv q$$

۶- اگر گزاره‌های  $\sim q \vee \sim r$  و  $\sim p \vee r$  درست باشند، ارزش گزاره‌ی  $\sim p \vee \sim q$  چیست؟

$$(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \equiv T$$

$$\Rightarrow [(\sim p \vee r) \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p \vee r) \wedge r] \equiv T$$

$$\Rightarrow [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge r)] \vee [(\sim p \wedge r) \vee (r \wedge \sim r)] \equiv T$$

F

$$\Rightarrow [\sim p \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee (\sim q \wedge r) \equiv T$$

$$\Rightarrow \sim p \vee (\sim q \wedge r) \equiv T$$

$$\Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r) \equiv T$$

$$\Rightarrow \sim p \vee \sim q \equiv T$$

۷- اگر  $(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \equiv P$  ثابت کنید  $Q \equiv F$ .

نکته: خلف کنیم  $Q \equiv T$  یا نه پس در فرض سوال داریم =

$$(P \wedge F) \vee (\sim P \wedge T) \equiv P$$

$$\Rightarrow \underbrace{(P \wedge F)}_F \vee (\sim P \wedge T) \equiv P \Rightarrow \sim P \equiv P \rightarrow \text{تناقض}$$

۸- اگر  $P \wedge Q \equiv P \wedge R$ ،  $P \vee Q \equiv P \vee R$ ، ثابت کنید  $Q \equiv R$ .

صحت قانون جذب را توان نوشت:

$$Q \equiv Q \wedge (Q \vee P)$$

$$\equiv Q \wedge (P \vee R)$$

$$\equiv (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R)$$

$$\equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

$$\equiv R \wedge (P \vee Q)$$

$$\equiv R \wedge (P \vee R) \stackrel{\text{جذب}}{\equiv} R$$

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

۹- اگر  $P \wedge Q \equiv F$  باشد ثابت کنید  $\sim Q \wedge (P \vee Q) \equiv P$ .

$$\sim Q \wedge (P \vee Q) \equiv (\sim Q \wedge P) \vee (\underbrace{\sim Q \wedge Q}_F)$$

$$\equiv (\sim Q \wedge P) \vee (P \wedge Q)$$

$$\equiv P \wedge (\underbrace{\sim Q \vee Q}_T) \equiv P$$

۱۰- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) عدد  $a$  فرد یا اول است.  
 $a$  اول نیست  $\wedge a$  فرد نیست  $\equiv (a$  اول است  $\vee a$  فرد است)  $\sim$

**$a$  نه اول است و نه فرد**

ب) عدد صفر زوج و نامنتهاست.

صفر منفی است  $\vee$  صفر زوج نیست  $\equiv$  (صفر نامنتهاست  $\wedge$  صفر زوج است)  $\sim$

صفر عددی منفی است یا زوج نیست

ب)  $(P \vee \sim Q) \wedge (Q \vee P)$

$$\sim [(P \vee \sim Q) \wedge (Q \vee P)]$$

$$\equiv \sim [P \vee (\underbrace{\sim Q \wedge Q}_F)] \equiv \sim P$$

۱۱ - ثابت کنید  $(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv F$

$$\equiv \sim p \wedge [q \wedge (p \vee \sim q)]$$

$$\equiv \sim p \wedge [(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim q)]$$

$$\equiv \sim p \wedge (p \wedge q) \equiv (\underbrace{\sim p \wedge p}_F) \wedge q \equiv F$$

۱۲ - با استفاده از جدول درستی هم ارزی زیر را بررسی کنید:

$$[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)] \equiv q$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$	$q \wedge (\sim p \vee \sim q)$	$[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)]$
>	>	ن	ن	>	>	ن	ن	>
>	ن	ن	>	ن	ن	>	ن	ن
ن	>	>	ن	>	ن	>	>	>
ن	ن	>	>	>	ن	>	ن	ن

هم ارزی برقرار است



\* آزمون تست \*

۱- به جملای خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد، ... گوئیم.

(۱) گزاره‌ها (۲) گزاره‌ها (۳) قضیه (۴) هم‌ارزی منطقی

۲- عبارت "x یک مثلث قائم‌الزاویه است." چگونه عبارتی است؟

(۱) گزاره (۲) گزاره‌ها (۳) اتحاد (۴) هم‌ارزی

۳- کدام یک از عبارات های زیر درست است؟

(۱)  $(P \vee \sim Q) \sim (P \vee Q)$  وقتی درست است که P و Q هر دو درست باشند

(۲)  $(P \vee \sim Q) \sim (P \vee Q)$  " " " " " " نادرست باشد

(۳) " " " " " " که P درست و Q نادرست باشد

(۴) " " " " " " که P نادرست و Q درست باشد

۴- فرض کنیم  $(P_1 \vee P_2) \vee (P_1 \vee P_3)$  و  $(P_1 \vee P_2) \vee (P_1 \vee P_3)$  درست باشند کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱)  $\sim P_1$  (۲)  $P_1$  (۳)  $P_1 \wedge P_2$  (۴)  $\sim P_1 \wedge P_2$

فرضی:  $\sim (P_1 \vee P_2) \equiv T \Rightarrow P_1 \vee P_2 \equiv F \Rightarrow P_1 \equiv F, P_2 \equiv F$

فرضی:  $P_1 \vee (P_2 \vee P_3) \equiv T \Rightarrow F \vee (F \vee P_3) \equiv T \Rightarrow P_3 \equiv T$

۵- گزاره‌ی  $(P \wedge Q) \vee (\sim P \vee Q)$  هم‌ارز کدام گزاره است؟

(۱)  $\sim P \vee Q$  (۲)  $\sim Q \vee P$  (۳)  $P \wedge \sim Q$  (۴)  $\sim P \wedge Q$

$(P \wedge Q) \vee (\sim P \vee Q) \equiv P \vee Q$

م جذب

۶- هواگاه برای هر گزاره‌ی دلخواه مانند  $P$ ، اگر  $P$  ارزش درست داشته باشد داریم  $f(P) = 1$  و اگر ارزش  $P$  نادرست باشد داریم  $f(P) = 0$

در این صورت کدام یک از گزاره‌ها نادرست است؟

$$F(P \vee Q) = F(P) + F(Q) - F(P)F(Q) \quad (1)$$

$$F(P \wedge Q) = F(P) \cdot F(Q) \quad (2)$$

$$F(P \wedge Q) = F(P) + F(Q) \quad (3) \checkmark$$

$$F(P) + F(\neg P) = 1 \quad (4)$$

گزینه (۳) نادرست است زیرا اگر  $P$  و  $Q$  درست باشند آنگاه:

$$F(P \wedge Q) = 1, \quad F(P) + F(Q) = 1 + 1 = 2 \rightarrow \text{تعارضی نیست}$$

گزینه (۱) درست است زیرا:

$f(P)$	$f(Q)$	$f(P \vee Q)$	$f(P) + f(Q) - f(P)f(Q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

که برابرند

گزینه (۲) درست است زیرا:

$f(P)$	$f(Q)$	$f(P \wedge Q)$	$f(P) \cdot f(Q)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

که برابرند

گزینه (۴) درست است زیرا:

$f(P)$	$f(\neg P)$	$f(P) + f(\neg P)$
1	0	1
0	1	1

$$\rightarrow f(P) + f(\neg P) = 1$$

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

## تولید شرطی دو گزاره :

اگر دو گزاره  $P$  و  $Q$  را با لفظ « اگر  $P$  آنگاه  $Q$  » با هم ترکیب کنیم، گزاره مرکبی ساخته می‌شود که آنرا ترکیب شرطی دو گزاره گویند. در صورت  $P \Rightarrow Q$  نمایش می‌دهند که در آن  $P$  را مقدم و  $Q$  را نتیجه می‌گویند.

سوال: اگر مثلث متساوی الساقین باشد، آنگاه زوایای پای دو ساق با هم برابرند.

سوال: اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آنگاه دو قطرش برابرند.

سوال: اگر  $x \neq 0$  آنگاه  $x^2 > 0$  است.

صورت‌های مختلف بیان گزاره شرطی  $P \Rightarrow Q$  :

① اگر  $P$  آنگاه  $Q$

②  $P$  نتیجه می‌دهد  $Q$  را

③  $Q$  اگر  $P$

④  $P$  شرط کافی است برای  $Q$

⑤  $Q$  شرط لازم است برای  $P$

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
>	>	>
>	ن	ن
ن	>	>
ن	ن	>

جدول ارزش ترکیب شرطی :

سوال: جدول ارزش گزاره مرکب  $\neg P \Rightarrow (P \wedge Q)$  را رسم کنید.

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$\neg P \Rightarrow (P \wedge Q)$
>	>	ن	>	>
>	ن	ن	ن	>
ن	>	>	ن	ن
ن	ن	>	ن	ن

سؤال: کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر عددی بر ۵ بخش پذیر باشد آنگاه بر ۲ بخش پذیر است.

ب) اگر مقدم درست باشد و افعی این که تا آن نیز درست است پس در کل گزاره صحیح است.

پ)  $2 < 3 \Rightarrow -2 < -3$  گزاره نادرست است.

ت)  $42$  عدد اول است  $\Rightarrow 574962 = 3^{11}$  گزاره نادرست است.

نکته: اگر مقدم نادرست باشد آنگاه گزاره شرطی درست است. در این حالت نویسیم: به انتهای مقدم، گزاره درست است.

سؤال: ارزش گزاره‌ی « اگر ۲ فرد است آنگاه  $7^{18} = 4421964715$  » چیست؟  
به انتهای مقدم درست است.

قضیه:  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  (تبدیل شرطی به فصلی)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
>	>	ن	>	>
>	ن	ن	ن	ن
ن	>	>	>	>
ن	ن	>	>	>

که هم ارزند

توجه: گزاره  $p \Rightarrow q$  را در نظر بگیرید، عکس ترکیب شرطی  $q \Rightarrow p$  است و عکس نقیض ترکیب شرطی  $\sim p \Rightarrow \sim q$  خواهد بود.

که می‌توان اثبات کرد:  $\sim p \Rightarrow \sim q \equiv p \Rightarrow q$  (برسای حلقه)

P	q	$\sim P$	$\sim q$	$P \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim P$
>	>	ن	ن	>	>
>	ن	ن	>	ن	ن
ن	>	>	ن	>	>
ن	ن	>	>	>	>

که هم ارزند

ثبوت (روش اول) :

ثبوت (روش دوم) :

$$P \Rightarrow q \equiv \sim P \vee q \equiv q \vee \sim P \equiv \sim q \Rightarrow \sim P$$

مثال: ثابت کنید اگر  $a \in \mathbb{Z}$ ، عددی فرد باشد، آنگاه  $a$  عدد فرد است.  
برهان خلف: بريم  $a$  عدد فرد باشد پس  $a$  زوج است.

$$a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k' \Rightarrow a^2 \text{ زوج است}$$

تمرین ۱- ثابت کنید (بهی جدول) :

الف)  $\sim(P \Rightarrow q) \equiv P \wedge \sim q$

راستی  $\equiv \sim(\sim P \vee q) \equiv P \wedge \sim q \equiv$  چپ

ب)  $(P \wedge q) \Rightarrow (P \vee q) \equiv T$

$$\text{چپ} \equiv \sim(P \wedge q) \vee (P \vee q)$$

$$\equiv (\sim P \vee \sim q) \vee (P \vee q)$$

$$\equiv (\sim P \vee P) \vee (\sim q \vee q)$$

$$\equiv T \vee T \equiv T$$

ملا سعیدی @sinxcosx  
09168324500

$$(ب) P \Rightarrow (\sim P \Rightarrow Q) \equiv T$$

$$\text{هپ} \equiv P \Rightarrow (P \vee Q)$$

$$\equiv \sim P \vee (P \vee Q)$$

$$\equiv (\sim P \vee P) \vee Q$$

$$\equiv T \vee Q \equiv T$$

$$(ت) (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \vee P) \equiv Q$$

$$\text{هپ} \equiv (\sim P \vee Q) \wedge (Q \vee P)$$

$$\equiv Q \vee (\sim P \wedge P)$$

$$\equiv Q \vee F \equiv Q$$

$$۲- ارزش گزاره‌ی  $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$  را تعیین کنید$$

این گزاره همیشه درست است. اگر به بعد جدول جدول قابل اثبات می‌باشد.

## ترکیب دو شرط دوزاره =

هرگاه  $P$  و  $Q$  دوزاره باشند، گزاره مرکب  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$  را به صورت  $P \Leftrightarrow Q$  می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرط  $P$  و  $Q$  نامیم که با لفظ « $P$  اگر و تنها اگر  $Q$  خوانده می‌شود».

مثال: مثلث متساوی الساقین است اگر و تنها اگر زوایای پای دو ساق برابر باشند.

مثال:  $9 > 6 \Leftrightarrow 2 \times 2 = 4$

صورت‌ها مختلف بیان گزاره‌ی دو شرطی  $P \Leftrightarrow Q$ :

- ①  $P$  اگر و تنها اگر  $Q$
- ② اگر  $P$  آنگاه  $Q$  و برعکس
- ③  $P$  شرط لازم و کافی برای  $Q$  است.

جدول ارزش ترکیب دو شرط:

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\checkmark$	$\times$	$\times$
$\times$	$\checkmark$	$\times$
$\times$	$\times$	$\checkmark$

مثال: جدول ارزش  $P \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee Q)]$  را تشکیل دهید.

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee Q)$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee Q)] \Leftrightarrow P$
$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$

بنابراین گزاره همیشه درست است.

مسئله: ثابت کنید  $P \Leftrightarrow Q \equiv \sim P \Leftrightarrow \sim Q$

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

$$\equiv (\sim Q \Rightarrow \sim P) \wedge (\sim P \Rightarrow \sim Q)$$

$$\equiv \sim P \Leftrightarrow \sim Q$$

نکته: نقیض گزاره‌ی دو شرطی  $P \Leftrightarrow Q$  به صورت  $\sim P \Leftrightarrow Q$  یا  $P \Leftrightarrow \sim Q$  می‌باشد. به عبارت دیگر:  $\sim(P \Leftrightarrow Q) \equiv \sim P \Leftrightarrow Q \equiv P \Leftrightarrow \sim Q$   
حجت این نکته به کمک جدول قابل اثبات است.

مسئله: نقیض گزاره «شرط لازم و کافی برای آن به انسان پیروز شود آن است که تلاش کند» را بنویسید.

شرط لازم و کافی برای آن به انسان پیروز نشود آن است که تلاش نکند.

یا  
شرط لازم و کافی برای آن به انسان پیروز نشود آن است که تلاش نکند.

مسئله: نتایج دهید:

الف)  $P \Leftrightarrow T \equiv P$

$$P \Leftrightarrow T \equiv (P \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow P)$$

$$\equiv (\underbrace{\sim P \vee T}_T) \wedge (\underbrace{F \vee P}_P)$$

$$\equiv T \wedge P$$

$$\equiv P$$

روش دوم (سبب جدول):

P	T	$P \Leftrightarrow T$
ح	ح	ح
ح	ن	ن
ن	ح	ن
ن	ن	ح

که هم ارزند و آ



ب)  $P \Leftrightarrow F \equiv \sim P$

$P \Leftrightarrow F \equiv \sim P \Leftrightarrow T \stackrel{\text{الف}}{\equiv} \sim P$

تمرین:

۱- نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید.

الف) اگر عددی منفی باشد آنگاه مربع آن مثبت است.  
می دانیم  $P \wedge \sim Q \equiv (P \Rightarrow Q) \sim$  بنابراین:

عدم منفی است و مربع آن مثبت نیست.

ب) شرط لازم و کافی برای آنکه عددی فرد باشد آن است که مجذور آن عدد فرد باشد.

شرط لازم و کافی برای آنکه عدد فرد باشد آن است که مجذور آن عدد فرد باشد.

۲- به کمک جدول ارزش گزاره ها ثابت کنید:

الف)  $(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	ن	>	ن	ن	ن	ن
>	ن	>	>	>	>	>	>
>	ن	ن	>	ن	ن	>	ن
ن	>	>	>	>	>	>	>
ن	>	ن	>	ن	>	ن	ن
ن	ن	>	ن	>	>	>	>
ن	ن	ن	ن	>	>	>	>

که هم ارزی برقرار است

ملا سعیدی @sinxcosx  
  
 09168324500

$$PV(q \Leftrightarrow r) \equiv (PVq) \Leftrightarrow (Pvr) \quad \text{ب)}$$

P	q	r	$q \Leftrightarrow r$	$PV(q \Leftrightarrow r)$	$PVq$	$Pvr$	$(PVq) \Leftrightarrow (Pvr)$
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	<	<	>	>	<	>
>	<	>	<	>	<	>	>
>	<	<	>	>	<	<	>
<	>	>	>	<	>	>	<
<	>	<	<	<	>	<	<
<	<	>	>	<	<	>	<
<	<	<	<	<	<	<	<

هم ارزی برقرار است

۳- فرض کنید  $P_1$  و  $P_2$  و  $P_3$  و ... و  $P_{10}$  گزاره‌های دکانه باشند ثابت کنید گزاره‌ی زیر یک گزاره‌ی نادرست است:

$$P_1 \wedge (P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_3) \wedge \dots \wedge (P_9 \Rightarrow P_{10}) \wedge \sim P_{10}$$

برهان خلفت: بیایم گزاره درست باشیم:

$$P_1 \equiv T$$

$$P_1 \Rightarrow P_2 \equiv T \rightarrow P_2 \equiv T$$

$$\vdots$$

$$P_9 \Rightarrow P_{10} \equiv T \rightarrow P_{10} \equiv T$$

$$\sim P_{10} \equiv T \rightarrow P_{10} \equiv F$$

تناقض

۴- اگر ارزش گزاره‌ی  $[r \wedge (PVq)] \Rightarrow q$  نادرست باشد ارزش هر یک از گزاره‌های  $P$  و  $q$  و  $r$  را تعیین کنید.

$$r \wedge (PVq) \equiv T \rightarrow r \equiv T, PVq \equiv T$$

$$q \equiv F \rightarrow P \equiv T$$

د- هرگاه ارزش گزاره ی  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow Q$  درست باشد ثابت کنید

$$P \wedge Q \equiv T$$

حالت اول:  $\begin{cases} Q \equiv T \\ Q \Rightarrow P \equiv T \end{cases} \rightarrow P \equiv T \rightarrow P \wedge Q \equiv T$

حالت دوم:  $\begin{cases} Q \equiv F \\ Q \Rightarrow P \equiv F \end{cases} \rightarrow$  غیرواقع است

آزمون تست:

۱- از درستی  $P \wedge Q$  و  $P \Rightarrow \sim Q$ ، درستی کدام گزینه نتیجه می شود؟

- ① Q      ②  $\sim Q$       ③  $\sim P$       ④ هیچ کدام

$P \wedge Q \equiv T \rightarrow P \equiv T, Q \equiv T$   
 $P \Rightarrow \sim Q \equiv T \rightarrow \sim Q \equiv T \rightarrow Q \equiv F \rightarrow$  ②

۲-  $\sim(P \Rightarrow \sim Q)$  معادل کدام است؟

- ①  $P \wedge \sim Q$       ②  $\sim P \wedge Q$       ③  $P \wedge Q$       ④  $\sim(P \wedge Q)$

$\sim(\sim P \vee \sim Q) \equiv P \wedge Q \rightarrow$  ③

۳- تقیض گزاره « اگر شبها هم قدر بودی، شب قدری قدر بودی » کدام است؟

① اگر شبی قدر باشد، آن شب قدر نیست.  $Q$

② شبی هست که قدر است ولی بی قدر نیست.

③ شبی هست که قدر نیست و بی قدر هم نیست.

④ هر شب قدر است ولی بی قدر نیست. ✓

$\sim(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$

۴- اگر  $P$  و  $Q$  دو گزاره باشند کدام گزاره یک گزاره می همیشه درست است؟

$$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q) \quad (1)$$

$$(P \vee \sim P) \Rightarrow Q \quad (2)$$

$$P \Rightarrow (P \wedge Q) \quad (3)$$

$$\neg T \equiv F \Rightarrow Q \quad \leftarrow (P \wedge \sim P) \Rightarrow Q \quad (4) \checkmark$$

۵- عکس نقیض گزاره  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$  کدام است؟

$$(R \Rightarrow Q) \Rightarrow \sim P \quad (1)$$

$$\sim(\sim Q \vee R) \Rightarrow \sim P \quad (2) \checkmark$$

$$(\sim R \Rightarrow \sim Q) \Rightarrow \sim P \quad (3)$$

$$(\sim R \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \sim P \quad (4)$$

$$\sim(Q \Rightarrow R) \Rightarrow \sim P \equiv \sim(\sim Q \vee R) \Rightarrow \sim P$$

**سورها:** برای بیان عبارت‌ها یا استفاده از نمادها ریاضی به جای  
 «به ازای هر» یا «برای همه» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد  $\forall$   
 و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد  $\exists$   
 استفاده می‌کنیم. نماد  $\forall$  سور عمومی و نماد  $\exists$  سور وجودی نام دارند.

مثال: گزاره‌های زیر را با نماد ریاضی بیان کرده و ارزش آنها را تعیین کنید.  
 الف) مربع هر عدد حقیقی، نامتقر است.

درست  $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

ب) مربع هر عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی خود آن عدد است.

نادرست زیرا  $1 > 1^2$  است  $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$

پ) مجذور هر عدد منفر، منفر است.

نادرست  $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^- : x^2 < 0$

ت) نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچکتر است.

نادرست زیرا  $1 > (-1) \cdot \frac{1}{2}$  است  $\rightarrow \forall x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{2}x < x$

ث) معکوس برخی از اعداد صحیح، صحیح است.

درست (به عنوان نمونه  $1 \in \mathbb{Z}$  و  $\frac{1}{1} \in \mathbb{Z}$ )  $\rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

ج) بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.

درست  $\rightarrow \exists x \in \mathbb{O} : x \in \mathbb{P}$

$\mathbb{P} =$  مجموعه اعداد اول       $\mathbb{O} =$  مجموعه اعداد فرد طبیعی       $\mathbb{E} =$  مجموعه اعداد زوج طبیعی

سؤال: کدامیک از گزاره‌ها <sup>ی</sup>سور زیر درست است؟

الف)  $\forall x \in \mathbb{R} : \tan x \cdot \sin x = 1$  نادرست زیرا برای  $x = \frac{\pi}{4}$  ،  $\tan x \cdot \sin x$  تعریف نشده است

و سؤال‌ها را می‌توان بیان کرد.

ب)  $\forall n \in \mathbb{Z} : n(n+1) = 2k$  درست است زیرا ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.

پ)  $\exists x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}$  درست است زیرا  $x$  می‌تواند نسبت به اعداد صحیح عضو  $\mathbb{Q}$  نباشد.

ت)  $\exists x \in \mathbb{P} : 2x^2 - 4x + 2 = 0$  درست است زیرا  $x = 1$  مابقی برآورد است.

ث)  $\exists A \subseteq S : P(A) > 1$  نادرست است زیرا همواره  $P(A) \leq 1$  است.

ج)  $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| - 1 < 0$  درست است زیرا برای  $x = 0$  برقرار است.

\* نقیض گزاره‌ها <sup>ی</sup>سوری: تعریف می‌کنیم:

$$\sim (\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \sim P(x)$$

سؤال: نقیض هر یک از گزاره‌ها <sup>ی</sup> زیر را بنویسید:

الف)  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$  یا  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$

ب)  $\exists x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}$

$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q}$

$$\exists y \in \mathbb{R} : y < 0 \wedge y^2 < 1 \quad (\text{ب})$$

$$\forall y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \vee y^2 > 1$$

یاد آوری:  $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$$\forall x \in \mathbb{N} : (x = 2k) \Rightarrow (x \in P) \quad (\text{ت})$$

$$\exists x \in \mathbb{N} : (x = 2k) \wedge (x \notin P)$$

یاد آوری:  $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x > y \quad (\text{ث})$$

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x < y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N} : x > \sqrt{y} \quad (\text{ج})$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N} : x < \sqrt{y}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2 \quad (\text{ج})$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : \sim (x > 1 \wedge x < 2) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : (x \leq 1 \vee x \geq 2)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : (x^2 = 2) \Leftrightarrow (x > \sqrt{x}) \quad (\text{ح})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 \neq 2) \Leftrightarrow (x > \sqrt{x})$$

یاد آوری:  $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

$$(\exists x \in \mathbb{R} : x > 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0) \quad (\text{ز})$$

$$(\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0)$$

@sinxcosx ملاسعدی



09168324500