بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

ریاضی (۲)

پایه یازدهم علوم تجربی

فصل ۶

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۶

درس ۱

فرایندهای حدی

اهداف

- آشنایی با فرایندهای حدی و اصطلاحاتی مانند میل کردن و نزدیک شدن
- آشنایی با مفهوم حد چپ و حد راست تابع در یک نقطه
- تعریف حد تابع در یک نقطه
- درک شهودی و تشخیص حد تابع در یک نقطه، به کمک جدول مقادیر و از روی نمودار
- درک مفهوم همسایگی و تضاد بین مقدار و حد تابع در یک نقطه

به منظور تحلیل یک پدیده، می توان رفتار تابع متناظر با آن پدیده را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار داد.

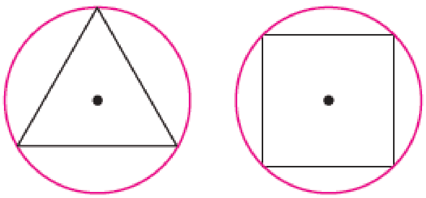
مثال: محاسبهٔ سرعت یک جسم متحرک در یک لحظه،
یافتن شیب خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه از آن،
تعیین مساحت اشکال هندسی و ....

یکی از ابزارهایی که در تحلیل رفتار تابع می توان موثر باشد، حد تابع است.

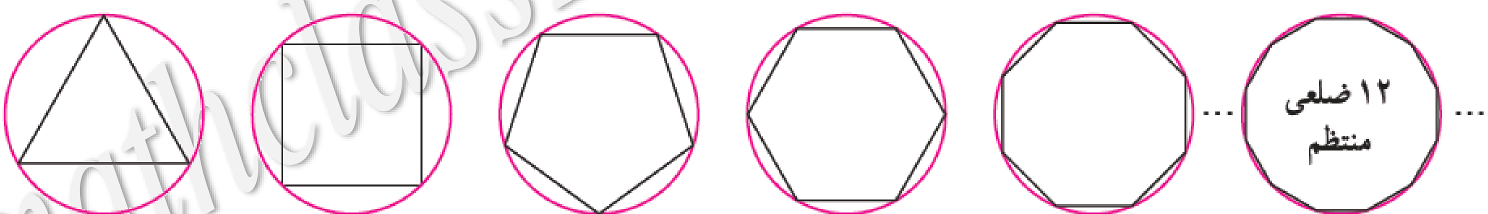
نتیجه: کاربرد مفهوم حد در ریاضیات: بیان رفتار یک تابع یا دنباله ای از اعداد

فعالیت ۱ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

در دایره های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مربع به گونه ای رسم شده اند که رأس های آنها روی دایره واقع اند. چنین چند ضلعی هایی را چند ضلعی های محاط شده در دایره (محاطی) می نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.



- حدس می زنید مساحت کدام یک به مساحت دایره نزدیک تر است؟ مربع
- هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه اتفاقی می افتد؟
  مساحت آن به مساحت دایره نزدیک تر می شود.
- برای نزدیک تر شدن مساحت چند ضلعی های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می توان کرد؟
  می توان تعداد اضلاع چندضلعی را بیشتر کرد.
- آیا به هرمیزان که بخواهیم می توانیم مساحت چند ضلعی های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟ بله

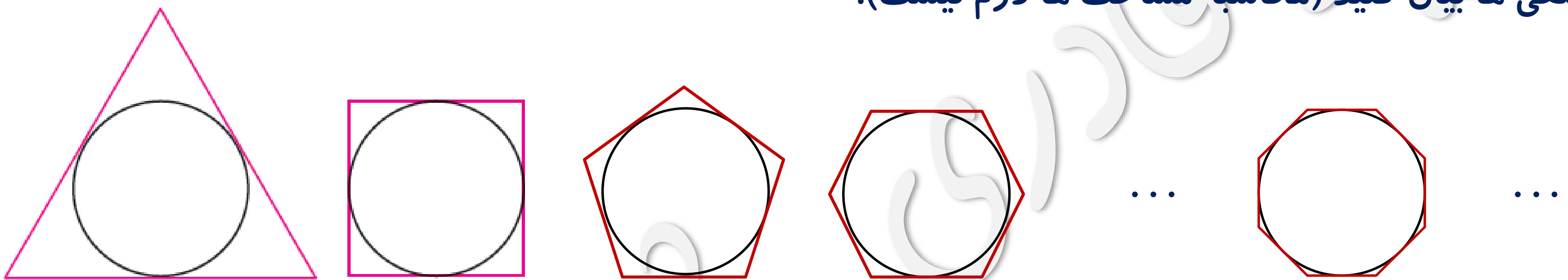


نتیجه: با نگاه کردن به شکل ها به این نتیجه می رسیم که وقتی تعداد اضلاع چند ضلعی های محاطی زیاد و زیادتر می شود، مساحت آنها نیز به مساحت دایره نزدیک و نزدیک تر می شود.

به این نحوهٔ نزدیک شدن؛ نزدیک شدن از چپ می گوییم.

کار در کلاس صفحه ۱۲۱ کتاب درسی

فرض کنید در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی های منتظم محیطی (چند ضلعی که همهٔ اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به دست آمد، دربارهٔ این چند ضلعی ها بیان کنید (محاسبه مساحت ها لازم نیست).



با نگاه کردن به شکل ها به این نتیجه می رسیم که وقتی تعداد اضلاع چند ضلعی های محیطی زیاد و زیادتر می شود، مساحت آنها نیز به مساحت دایره نزدیک و نزدیک تر می شود.

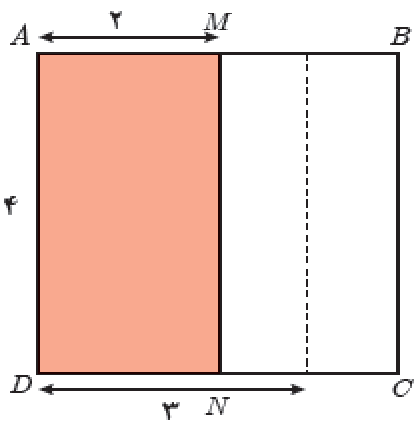
به عبارت دیگر مساحت چندضلعی های منتظم محیط بر دایره را هر چه قدر که بخواهیم می توانیم به مساحت دایره نزدیک تر کنیم به شرط آنکه تعداد اضلاع چندضلعی را به مقدار کافی زیاد کنیم.

به این نحوهٔ نزدیک شدن؛ نزدیک شدن از راست می گوییم.

فعالیت صفحه ۱۲۱ کتاب درسی

مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد رادر نظر می گیریم. پاره خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می کند.

مساحت مستطیل $AMND$ (مساحت قسمت رنگی) چقدر است؟ $۲ \times ۴ = ۸$



به موازات MN پاره خط هایی رسم می کنیم که مانند شکل، نقاط انتهایی آنها روی AB و CD است. (طول مستطیل ها برابر ۴ واحد است).

با این کار، عرض مستطیل رنگی را افزایش می دهیم تا به نقطه چین نزدیک شود. این عمل منجر به تغییر در مساحت قسمت رنگ شده می شود.

تغییرات صورت گرفته در جدول زیر داده شده است. جاهای خالی را پر کنید.

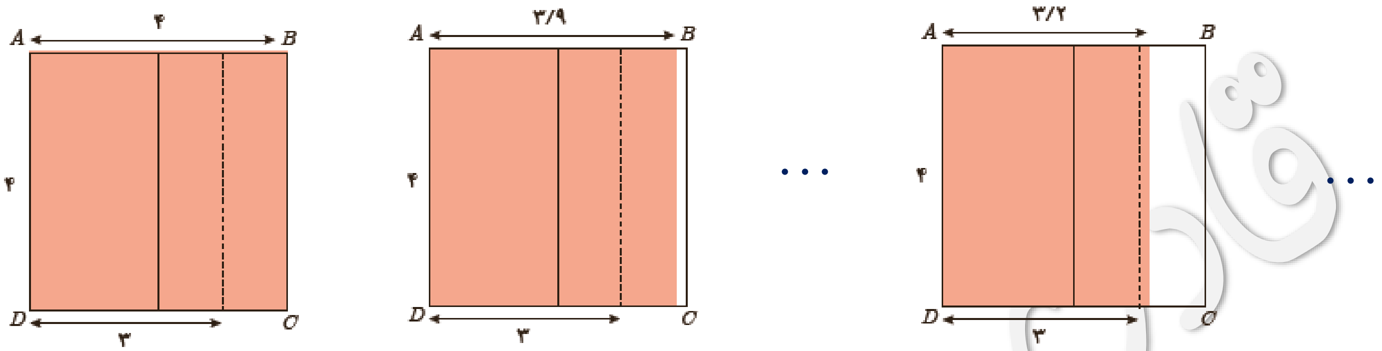
عرض مستطیل ها با مقادیر کمتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۲/۹۹	۲/۹	۲/۸	۲/۷	۲/۵	۲/۱	۲	عرض مستطیل ها
مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.	۱۱/۹۶	۱۱/۶	۱۱/۲	۱۰/۸	۱۰	۸/۴	۸	مساحت مستطیل رنگی

به این نتیجه می رسیم که وقتی عرض مستطیل رنگی زیاد شده و به نقطه چین نزدیک می شود، مساحت مستطیل به عدد ۱۲ نزدیک و نزدیک تر می شود.

به این نحوهٔ نزدیک شدن؛ نزدیک شدن از چپ می گوییم.

فعالیت صفحه ۱۲۲ کتاب درسی

مشابه همین کار را با شروع از پاره خط BC انجام می دهیم. پاره خط هایی که به موازات BC رسم می شوند، همانند شکل زیر، مستطیل های جدیدی را می سازند.



با این کار عرض مستطیل رنگی را کاهش می دهیم تا به نقطه چین نزدیک شود. نتیجهٔ آن؛ تغییر در مساحت قسمت رنگ شده است.

تغییرات صورت گرفته در جدول زیر داده شده است. جاهای خالی را پر کنید.

عرض مستطیل‌ها با مقادیر بیشتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ..۱۲.. نزدیک می‌شود.	۱۲/۰۴	۱۲/۴	۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶	مساحت مستطیل رنگی

با نگاه کردن به شکل ها به این نتیجه می رسیم که وقتی عرض مستطیل رنگی کم شده و به نقطه چین نزدیک می شود، مساحت مستطیل به عدد ۱۲ نزدیک و نزدیک تر می شود.

به این نزدیک شدن؛ نزدیک شدن از راست می گوییم.

صفحه ۱۲۲ کتاب درسی

نتیجه فعالیت های قبل

اگر طول مستطیل ها را ۴ و عرض آنها را x در نظر بگیریم، مساحت مستطیل ها را می توان به صورت تابع $f(x) = ۴x$ نمایش داد.

- ✓ در فعالیت اول، x با مقادیر کمتر از عدد۳، به سمت عدد۳ نزدیک می شود. این وضعیت را با نماد $x \to ۳^-$ نمایش می دهیم. (می خوانیم x از سمت چپ به عدد ۳ میل می کند.)
- ✓ در فعالیت دوم، x با مقادیر بیشتر از عدد۳ به سمت عدد۳ نزدیک می شود. این وضعیت را با نماد $x \to ۳^+$ نمایش می دهیم. (می خوانیم x از سمت راست به عدد ۳ میل می کند.)

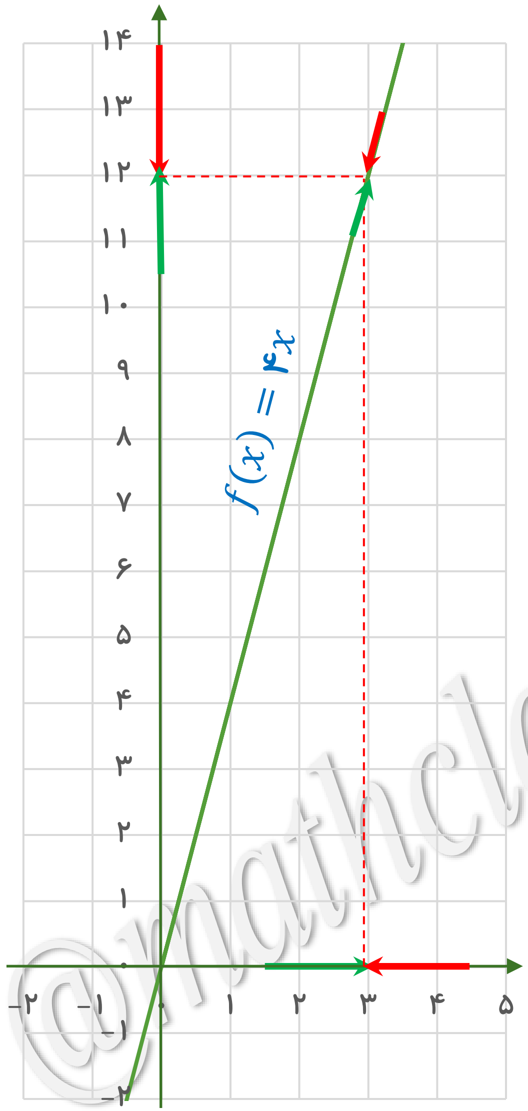
خلاصهٔ دو جدول قبل در جدول زیر ارائه شده است:

x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود → ← x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود

x	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	→۳←	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴
$f(x)$	۸	۸/۴	۱۰	۱۱/۲	۱۱/۶	۱۱/۹۶	→۱۲←	۱۲/۰۴	۱۲/۴	۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶

$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود → ← $f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود

صفحه ۱۲۳ کتاب درسی



در فعالیت قبل دیدیم وقتی $x \to ۳^-$ مقدار $f(x)$ به مقادیر دلخواه به ۱۲ نزدیک می شود. در این حالت می گوییم:

حد تابع $f(x)$ وقتی x از چپ به ۳ میل می کند برابر ۱۲ است.

به عبارتی دیگر $\lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۱۲$

در فعالیت قبل دیدیم وقتی $x \to ۳^+$ مقدار $f(x)$ به مقادیر دلخواه به ۱۲ نزدیک می شود. در این حالت می گوییم:

حد تابع $f(x)$ وقتی x از راست به ۳ میل می کند برابر ۱۲ است.

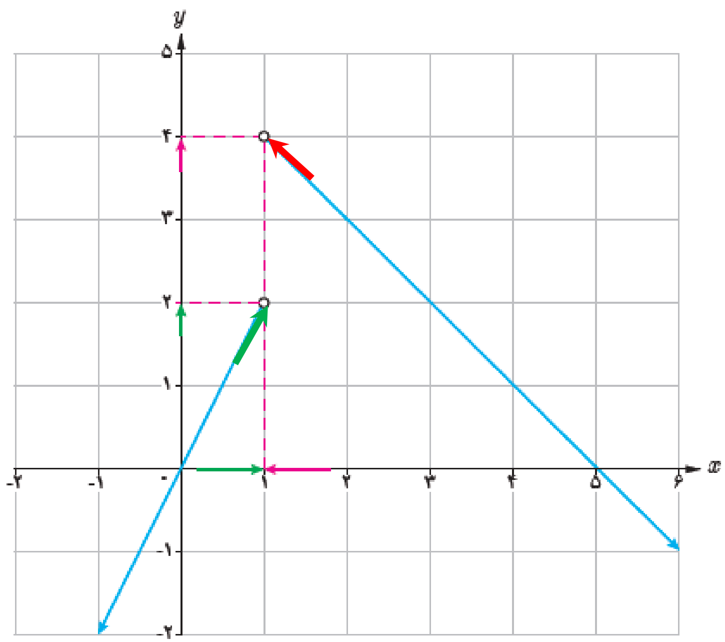
به عبارتی دیگر $\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۱۲$

اگر حد راست و حد چپ یک تابع در یک نقطه، موجود و برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد. $\lim_{x\to ۳} f(x) = ۱۲$

مثال صفحه ۱۲۳ کتاب درسی

نمودار تابع با ضابطهٔ زیر رسم شده است. جدول را کامل کنید و با استفاده از آن و به کمک نمودار $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x<۱ \\ -x+۵ & x>۱ \end{cases}$$



x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود ← → x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود

x	۰	۰/۲	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	→۱←		۱/۰۱	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۲
$f(x)$	۰	۰/۴	۱	۱/۶	۱/۸	۱/۹۸	→۲	۴←	۳/۹۹	۳/۹	۳/۸	۳/۵	۳/۲	۳

$f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود ← → $f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شود

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲ \qquad \lim_{x\to ۱^+} f(x)=۴$$

تمرین تکمیلی

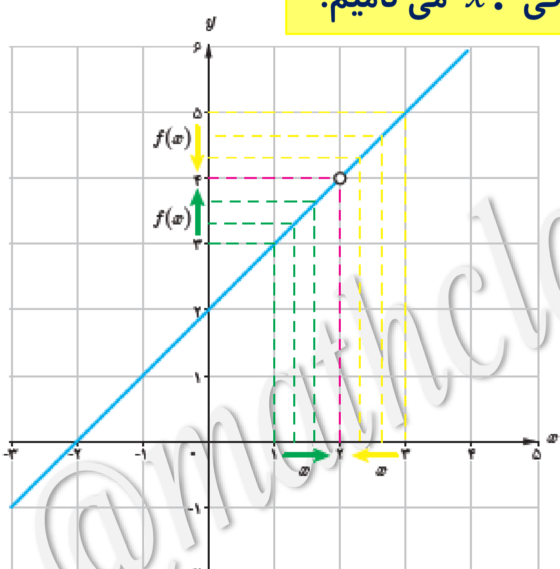
سوال ۱ : رفتار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ را در اطراف $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲} \quad \rightarrow \quad f(x)=x+۲ \;\; , \; x\neq ۲$$

تابع f به ازای $x=۲$ مقدار ندارد. به عبارت دیگر $f(۲)$ وجود ندارد.

اینک مقدار تابع f را به ازای مقادیری کمتر یا بیشتر از ۲ (در همسایگی ۲) محاسبه کرده و جدول زیر را تنظیم می کنیم.

اگر x. یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x. را یک همسایگی x. می نامیم.



x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود ← | → x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	?	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود | $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۴ \qquad\qquad \lim_{x\to ۲^+} f(x)=۴$$

صفحه ۱۲۴ کتاب درسی

حد چپ تابع

فرض کنیم تابع f در بازه ای مانند $(a\,,x_\circ)$ در سمت چپ $x_\circ$ تعریف شده باشد، می گوییم حد چپ تابع f در $x_\circ$ برابر عدد l است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = l$$

حد راست تابع

فرض کنیم تابع f در بازه ای مانند $(x_\circ\,, b)$ در سمت راست $x_\circ$ تعریف شده باشد، می گوییم حد راست تابع f در $x_\circ$ برابر عدد l است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = l$$

صفحه ۱۲۴ کتاب درسی

حد تابع (شرط وجود حد در یک نقطه)

فرض کنیم تابع f در بازه ای مانند (a,b) شامل نقطهٔ x_0 تعریف شده باشد (ممکن است در خود x_0 تعریف نشده باشد)، می گوییم حد تابع f در x_0 برابر عدد l است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x با مقادیر مخالف x_0 از هر دو سمت راست و چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ و $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$.

فعالیت صفحه ۱۲۵ کتاب درسی

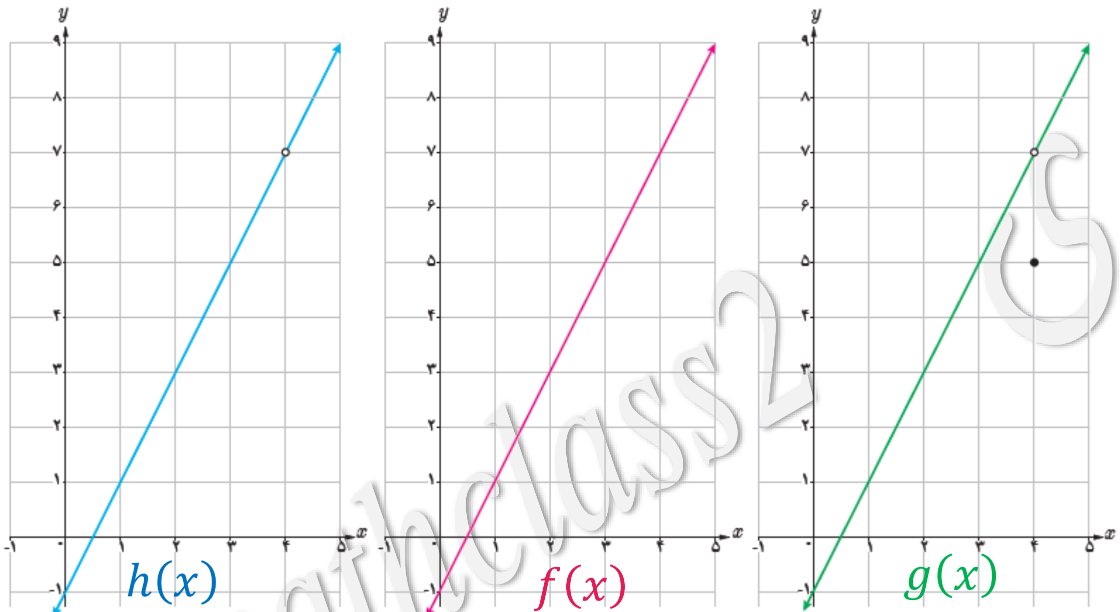
توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ با ضابطه های زیر داده شده اند:

$$h(x) = ۲x - ۱ \quad , x \neq ۴$$

$$g(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & , x \neq ۴ \\ ۵ & , x = ۴ \end{cases}$$

$$f(x) = ۲x - ۱$$

۱) هر کدام از نمودارهای زیر به کدام تابع تعلق دارد؟



۲) آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟

خیر زیرا دامنه و ضابطه و در نتیجه نمودار یکسان ندارند.

۳) دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.

$D_h = \mathbb{R} - \{۴\}$

$R_h = \mathbb{R} - \{۷\}$

$D_f = R_f = \mathbb{R}$

$D_g = \mathbb{R}$

$R_g = \mathbb{R} - \{۷\}$

فعالیت صفحه ۱۲۵ کتاب درسی

۴) با تکمیل جدول زیر؛ رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنید.

$f(x) = ۲x - ۱$

$g(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & , x \neq ۴ \\ ۵ & , x = ۴ \end{cases}$

$h(x) = ۲x - ۱ \quad , x \neq ۴$

x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود

x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	$\to ۴ \leftarrow$	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	$\to ۷ \leftarrow$	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$g(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	$\to ۷ \leftarrow$	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$h(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	$\to ۷ \leftarrow$	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹

توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ در نزدیکی نقطهٔ $x = ۴$ رفتار یکسانی دارند.

به عبارت دیگر حد آنها وقتی x به ۴ نزدیک می شود، برابر ۷ است.

$\lim_{x \to ۴} f(x) = ۷$ $\qquad$ $\lim_{x \to ۴} g(x) = ۷$ $\qquad$ $\lim_{x \to ۴} h(x) = ۷$

صفحه ۱۲۶ کتاب درسی

توابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ با ضابطه های زیر داده شده اند. دربارهٔ مقادیر این سه تابع در $x=۴$ چه می توان گفت؟

$$f(x)=۲x-۱$$

❖ مقدار $f(۴)$ موجود و برابر ۷ است. یعنی $f(۴)=۷$،
همچنین داریم $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۷$،
پس $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=f(۴)$.

$$g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & ,x\neq ۴ \\ ۵ & ,x=۴ \end{cases}$$

❖ مقدار $g(۴)$ موجود و برابر ۵ است. یعنی $g(۴)=۵$،
ولی $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)=۷$.
پس $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)\neq g(۴)$.

$$h(x)=۲x-۱ \quad ,x\neq ۴$$

❖ تابع $h(x)$ در $x=۴$ مقدار ندارد، یعنی $h(۴)$ وجود ندارد.
ولی $\lim\limits_{x\to ۴} h(x)=۷$.

جمع بندی:

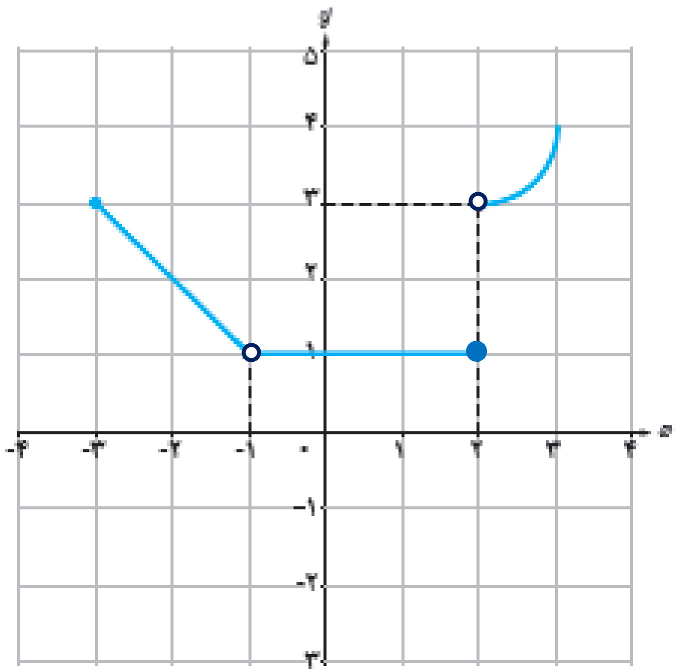
وجود حد در یک نقطه، به وجود مقدار تابع در همان نقطه ربطی ندارد.

به عبارت دیگر ممکن است:

- در یک نقطه مقدار تابع موجود نباشد ولی حد وجود داشته باشد.
- در یک نقطه مقدار تابع موجود باشد ولی حد وجود نداشته باشد.
- در یک نقطه حد و مقدار تابع موجود باشد و با هم برابر باشد.
- در یک نقطه حد و مقدار تابع موجود باشد ولی با هم برابر نباشد.

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.



$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ ۳

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ ۱

$\lim_{x\to 2} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to (-1)^-} f(x) =$ ۱

$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) =$ ۱

$\lim_{x\to -1} f(x) =$ ۱

$\lim_{x\to (-3)^+} f(x) =$ ۳

$\lim_{x\to (-3)^-} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to -3} f(x) =$ وجود ندارد

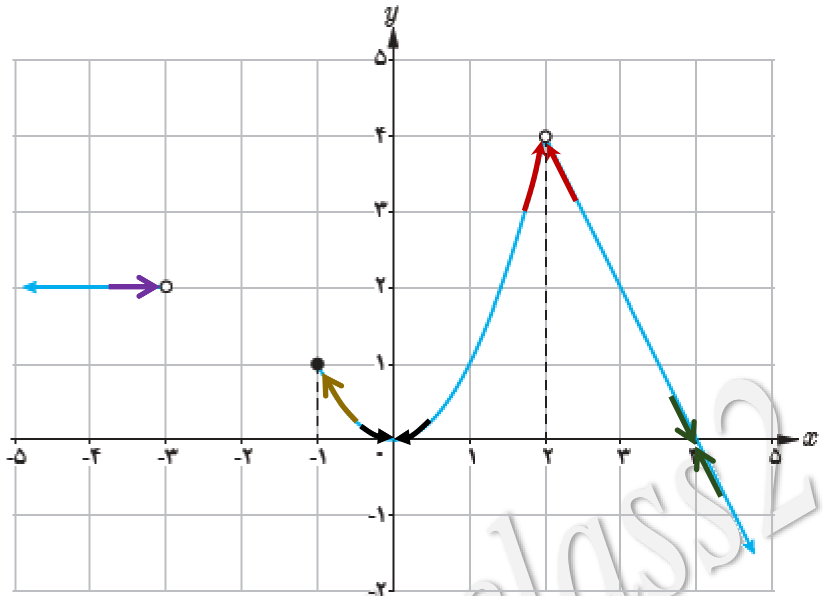
$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ ۱

$\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ ۱

$\lim_{x\to 1} f(x) =$ ۱

مثال صفحه ۱۲۶ کتاب درسی

در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۸, & x>۲\\ x^۲, & -۱\le x<۲\\ ۲, & x<-۳\end{cases}$ رسم شده است. رفتار تابع را در $x=۲$، $x=-۱$، $x=۰$، $x=۴$ و $x=-۳$ بررسی کنید.



الف) مقدار $f(۲)$ وجود ندارد ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$.

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=۱$ ولی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

زیرا حد چپ موجود نیست. (همسایگی چپ ندارد)

پ) $f(-۱)=۱$.

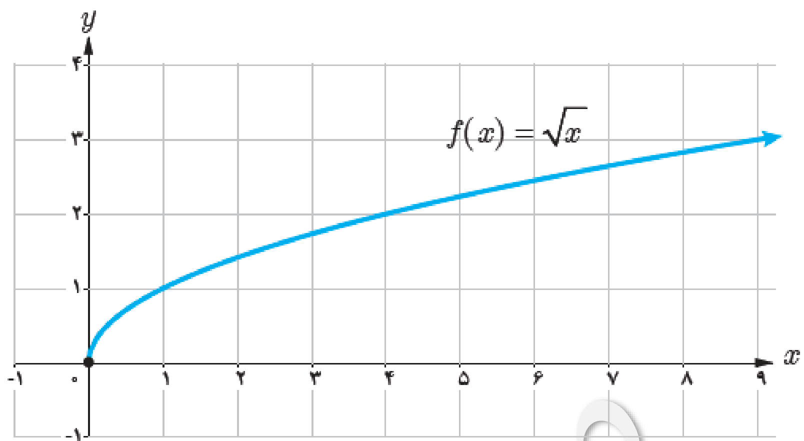
ت) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ و $f(۰)=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ و $f(۴)=۰$

ج) $f(-۳)$ و $\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$ وجود ندارند؛ ولی $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)=۲$.

مثال صفحه ۱۲۶ کتاب درسی

برای تابع $g(x) = \sqrt{x}$ داریم:



الف) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

ب) $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x} = 0$ وجود ندارد؛ زیرا تابع برای $x < 0$ تعریف نشده است.

پ) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ وجود ندارد؛ زیرا حد چپ وجود ندارد.

نکته تکمیلی

اگر دوتابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی :

اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$.

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (درصورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به‌جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازهٔ $(1,2)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=1$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to 1^+}[x]=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=1$.

به همین ترتیب، در $(0,1)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=0$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to 1^-}[x]=\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=0$.

تمرین تکمیلی

سوال ۳ : مقدار حد راست تابع $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ را در نقطهٔ $x=0$ به دست آورید.

روی بازهٔ $(0,1)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس می توان گفت روی بازهٔ $(0,1)$ تابع f با تابع ثابت $g(x)=0$ برابر است.
بنابراین

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}g(x)=0$$

در درس دوم می خوانیم:

صفر مطلق ، صفر حدی

صفر مطلق

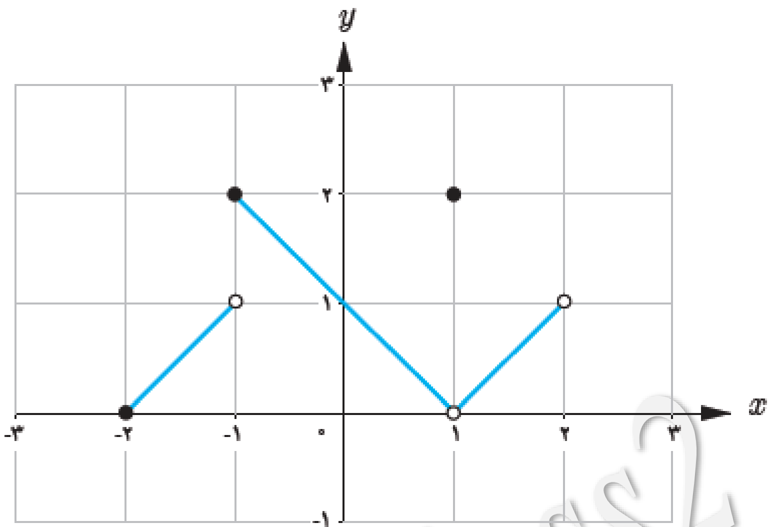
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{[0^+]}{0^+}=0$$

صفر تقسیم بر هر عدد غیرصفر، برابر صفر است.

صفر حدی: مقداری خیلی نزدیک به صفر

تمرین ۱ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۲$ **نادرست**

ب) $f(۱) = ۲$ **درست**

پ) $f(۲) = ۱$ **نادرست**

ت) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x) = ۰$ **درست**

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = ۲$ **نادرست**

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۱$ **درست**

چ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد. **درست**

ح) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد. **درست**

اصلاح شدهٔ الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۰$

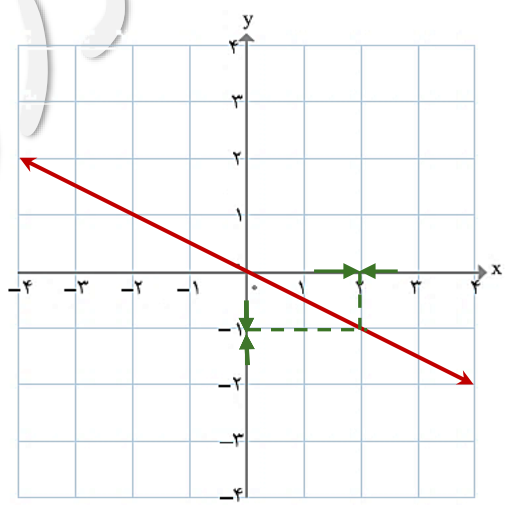
اصلاح شدهٔ پ) $f(۲)$ وجود ندارد

اصلاح شدهٔ ث) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) \neq ۲$

تمرین ۲ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱- باشد.

$$f(x) = -\frac{۱}{۲}x$$

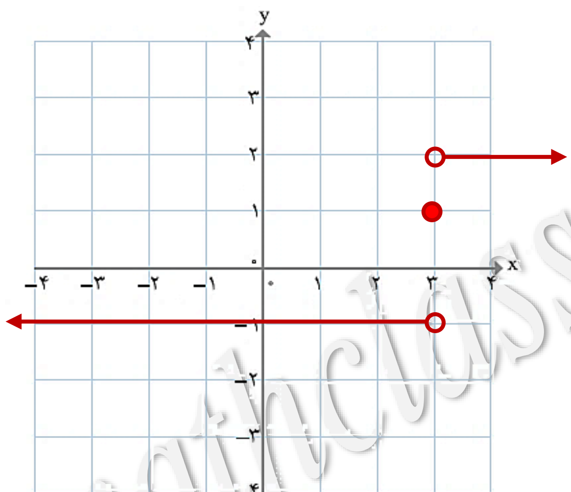


$$\lim_{x \to ۲} f(x) = -۱$$

تمرین ۳ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد و $f(۳) = ۱$.

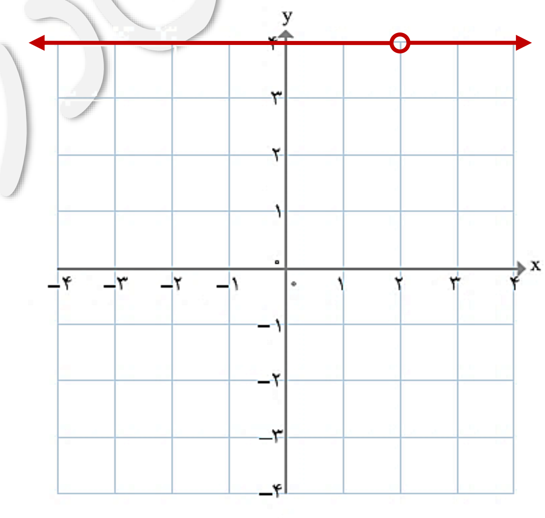
$$f(x) = \begin{cases} ۲ & x > ۳ \\ ۱ & x = ۳ \\ -۱ & x < ۳ \end{cases}$$



$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = ۲ \qquad \lim_{x \to ۳^-} f(x) = -۱$$

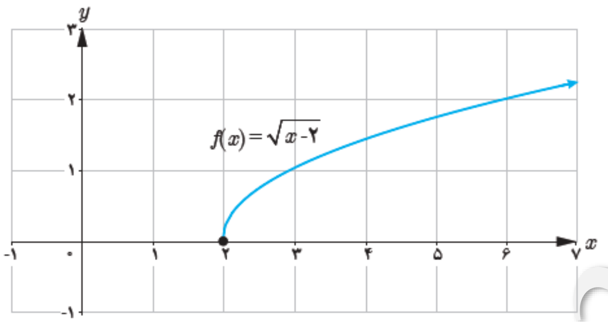
تمرین ۴ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد و $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۴$.



تمرین ۵ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

درباره تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

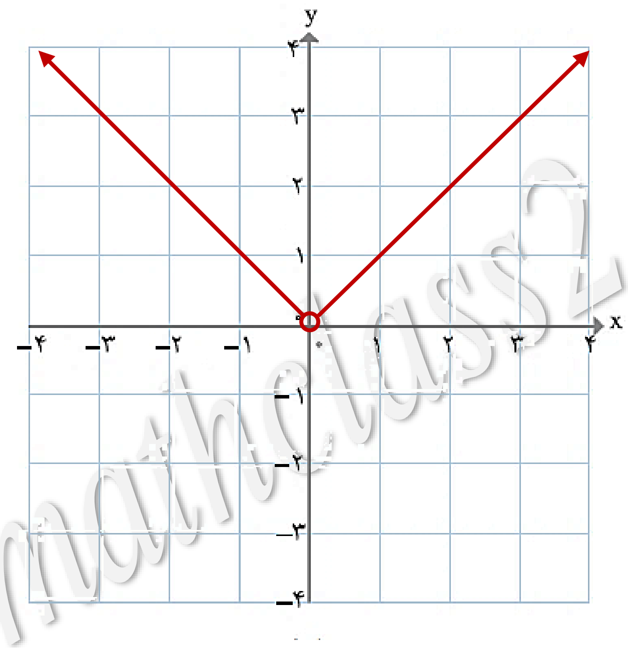
ت) $f(۲) = ۰$

تمرین ۶ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} -x, & x < \cdot \\ x, & x > \cdot \end{cases}$ را در نظر می گیریم. آیا f در نقطه صفر حد دارد؟

آیا $f(\cdot)$ موجود است؟

خیر، موجود نیست.



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \cdot^+} f(x) = \cdot \\ \lim\limits_{x \to \cdot^-} f(x) = \cdot \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to \cdot} f(x) = \cdot$$

تمرین ۷ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

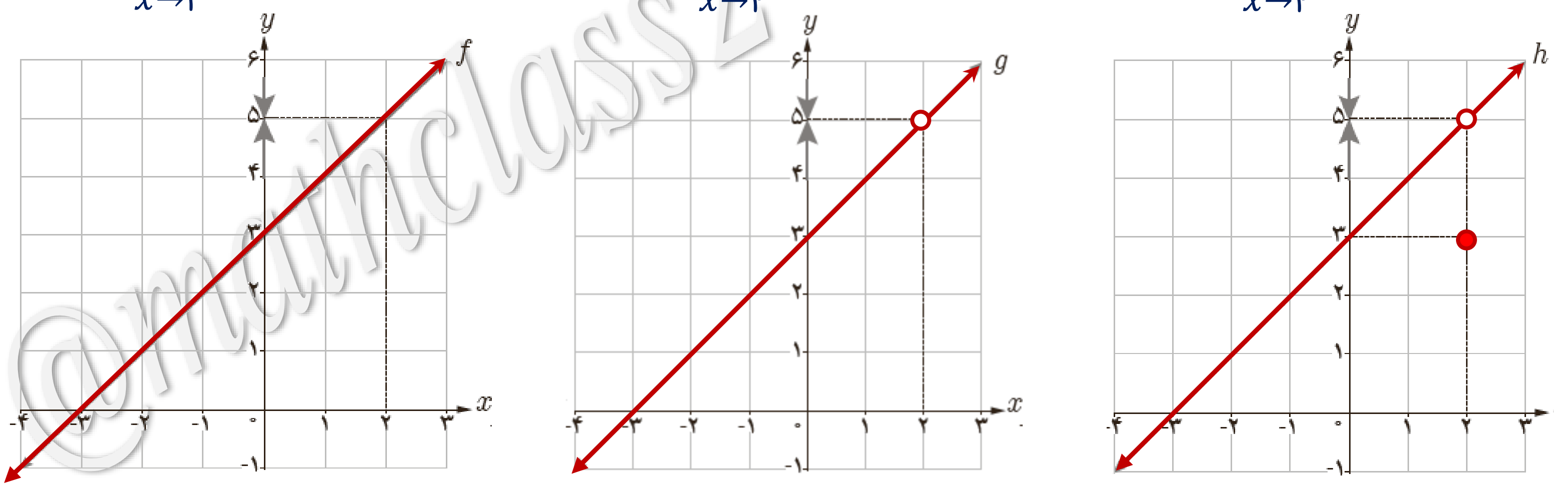
$f(x) = ۲x + ۱$ $\qquad g(x) = ۲x + ۱ \quad , x \neq ۲$ $\qquad h(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x \neq ۲ \\ ۳ & x = ۲ \end{cases}$

الف) مقادیر $f(۲)$ و $g(۲)$ و $h(۲)$ را در صورت وجود به دست آورید.

$f(۲) = ۲(۲) + ۱ = ۵$ $\qquad g(۲)$ وجود ندارد $\qquad h(۲) = ۳$

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۵$ $\qquad \lim\limits_{x \to ۲} g(x) = ۵$ $\qquad \lim\limits_{x \to ۲} h(x) = ۵$



تمرین ۸ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

آیا حد تابع زیر در $x = ۲$ موجود است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x + ۲ & x > ۲ \\ -۲ & x = ۲ \\ x - ۳ & x < ۲ \end{cases}$$

x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود

x از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود

x	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲		۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۲	۲/۵	x
$f(x) = x - ۳$	−۱/۵	−۱/۲	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	−۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۳	۰/۵	$f(x) = -x + ۲$

$f(x)$ به ۱− نزدیک می‌شود

$f(x)$ به صفر نزدیک می‌شود

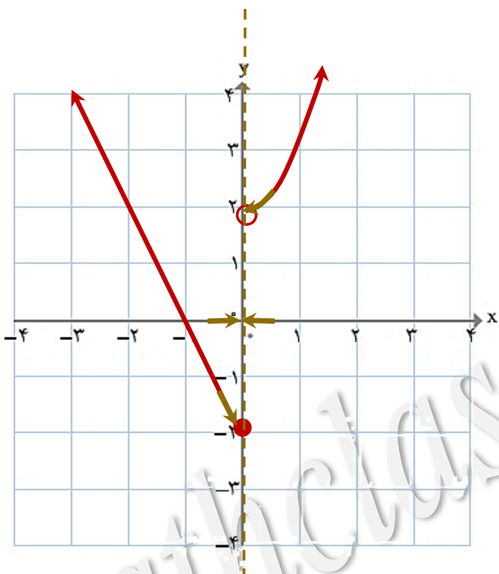
$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = -۱$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۰$$

در $x = ۲$ حد موجود نیست زیرا حد چپ و راست برابر نیستند.

تمرین ۹ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲, & x>۰ \\ -۲x-۲, & x\leq ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را در صورت وجود بیابید.



$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۲$

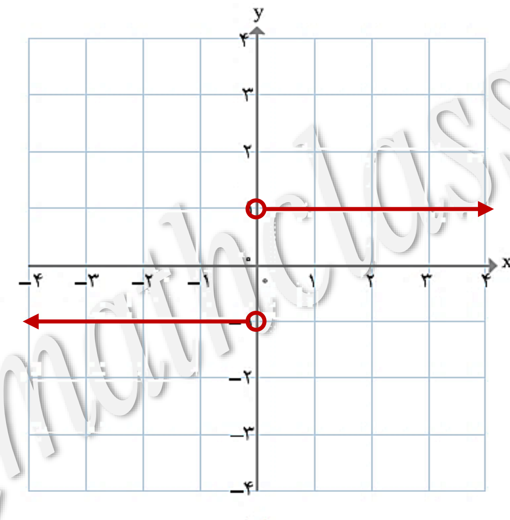
$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=-۲$

در $x=۰$ حد موجود نیست زیرا حد چپ و راست برابر نیستند.

تمرین ۱۰ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ باشد، نمودار f را رسم کنید آیا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ موجود است؟

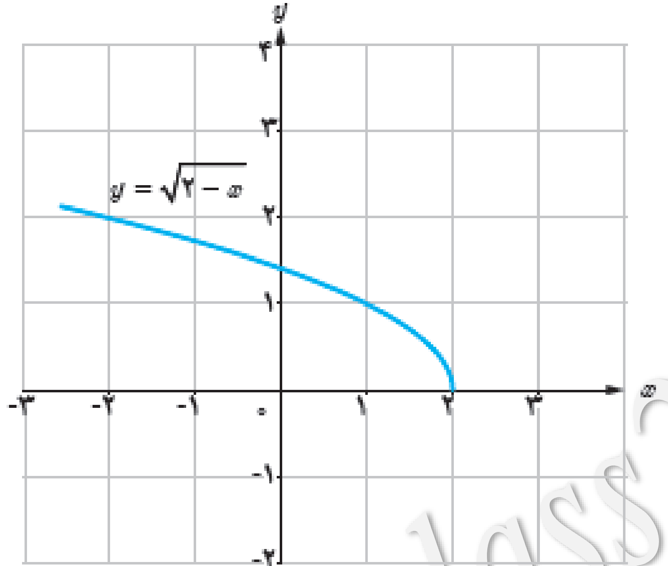
$$f(x)=\begin{cases}\frac{-x}{x}, & x<۰\\ \frac{x}{x}, & x>۰\end{cases} \quad \to \quad f(x)=\begin{cases}-۱, & x<۰\\ ۱, & x>۰\end{cases}$$



$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to ۰^+} f(x)&=۱\\ \lim_{x\to ۰^-} f(x)&=-۱\end{aligned}\right] \to \lim_{x\to ۰} f(x)$$ وجود ندارد

تمرین تکمیلی

سوال ۴ : آیا تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ در نقطهٔ $x = ۲$ حد دارد؟ چرا؟

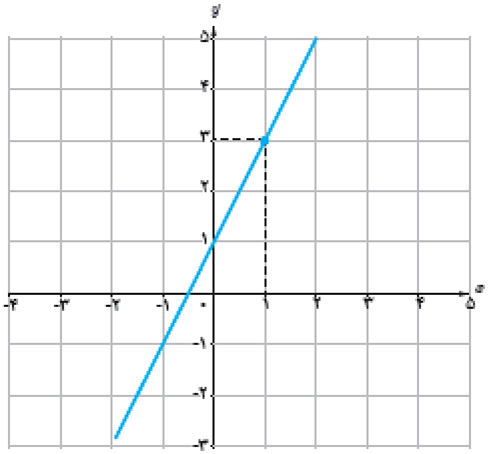


تابع f نقطهٔ $x = ۲$ حد ندارد، زیرا:

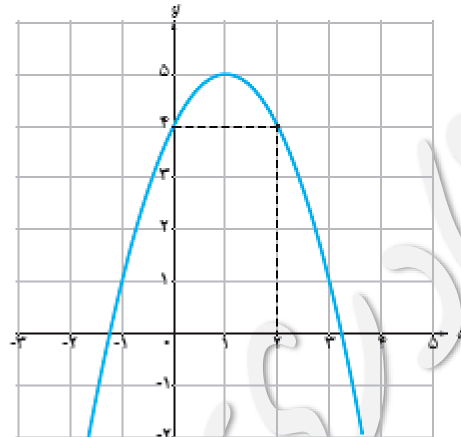
دامنهٔ تابع برابر با بازهٔ $(-\infty , ۲]$ می باشد. لذا اعداد حقیقی بیشتر از ۲ متعلق به دامنهٔ تابع نیستند و نمی توان همسایگی راست برای ۲ تعریف نمود.

تمرین تکمیلی

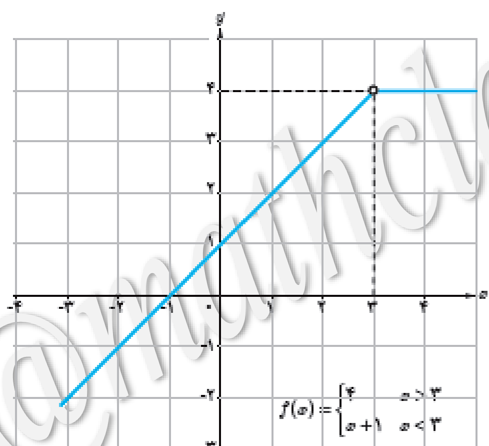
سوال ۵ : با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



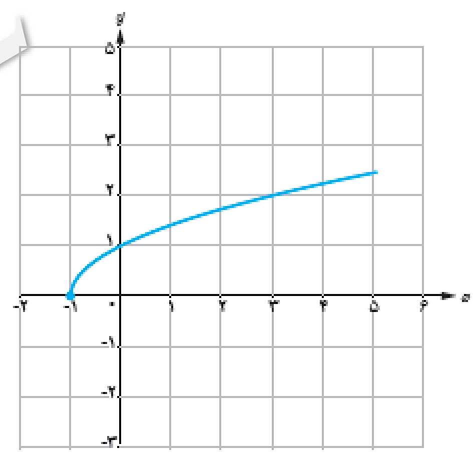
$\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) =$ ۳



$\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+2x+4) =$ ۴



$\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ ۴



$\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+1} =$ وجود ندارد

تمرین تکمیلی

سوال ۶ : با تکمیل هر یک از جدول های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} (-۳x + ۴) = ۴$

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

ب) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = -۵$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x = -۱ \end{cases}$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	-۶	$-۵/۵$	$-۵/۱$	$-۵/۰۱$	$-۵/۰۰۱$	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	$-۴/۹۹۹$	$-۴/۹۹$	$-۴/۹$	$-۴/۸$

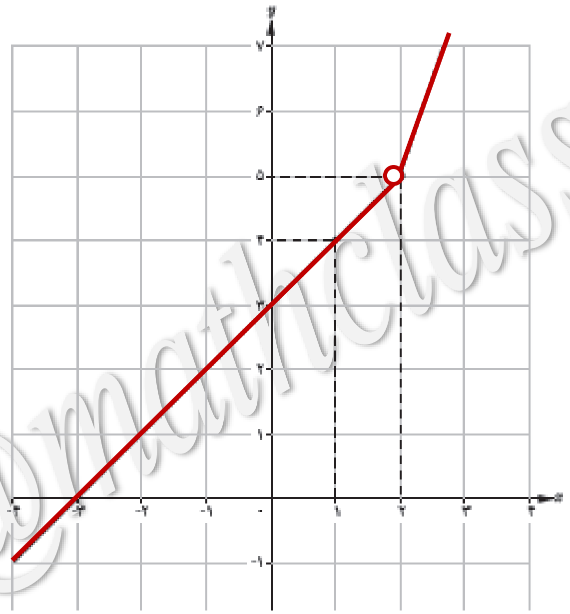
تمرین تکمیلی

سوال ۷ : تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۳x - ۱, & x > ۲ \\ x + ۳, & x < ۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ تعریف شده است؟ تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ تعریف نشده است، زیرا $۲ \notin D_f$

ب) با رسم نمودار f و با نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$ را به دست آورید.

x	۱	۱/۵	۱/۹	→	۲	←	۲/۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۴	۴/۵	۴/۹	→	؟	←	۵/۲	۶/۵	۸



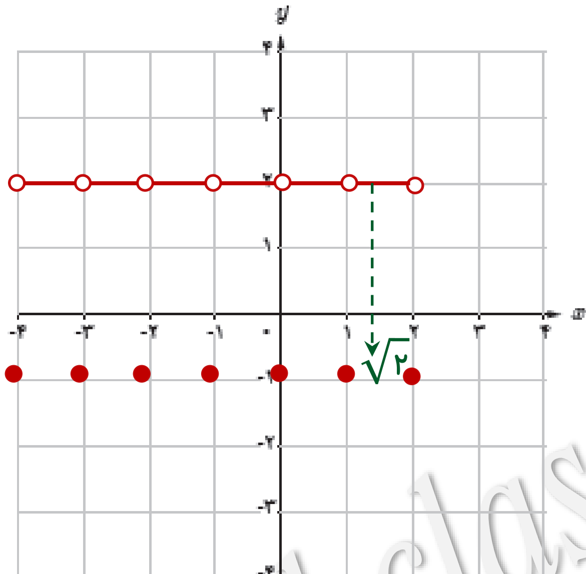
$\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۵$

تمرین تکمیلی

سوال ۸ : تابع g با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in\mathbb{Z}\\ 2, & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع g را در بازهٔ $[-4\,,\,2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.



$$\lim_{x\to 1} g(x) = ۲$$

$$\lim_{x\to \sqrt{2}} g(x) = ۲$$

تمرین تکمیلی

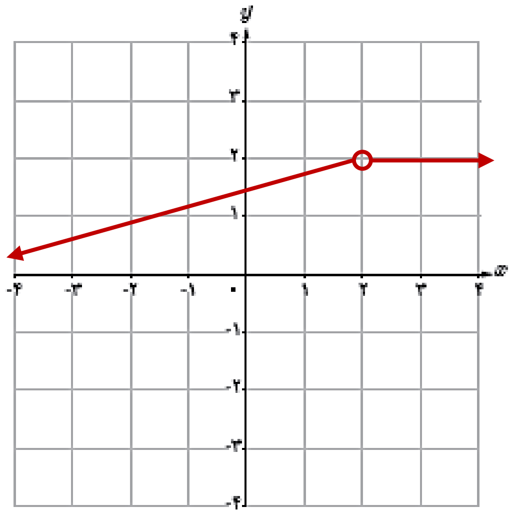
سوال ۹ : نمودراری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

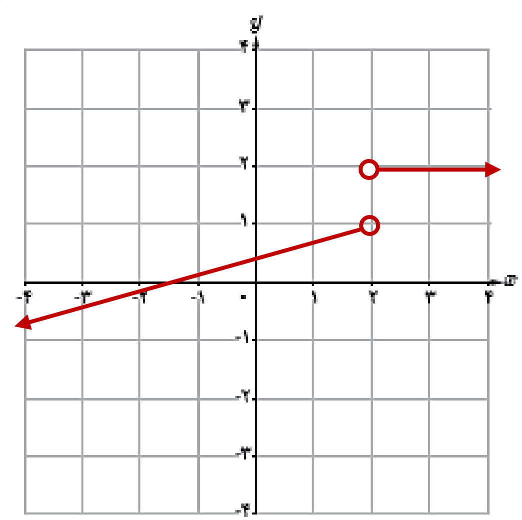
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

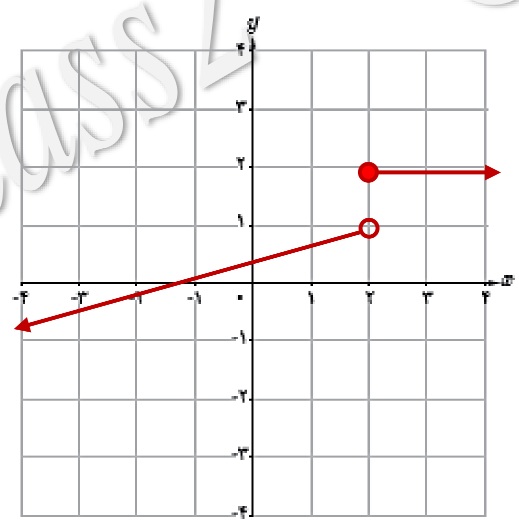
ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



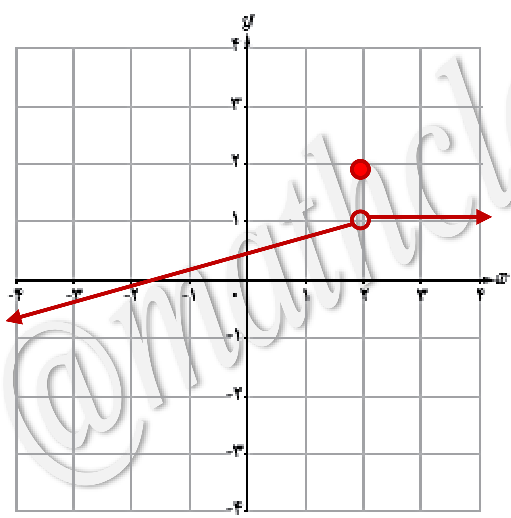
(الف)



(ب)



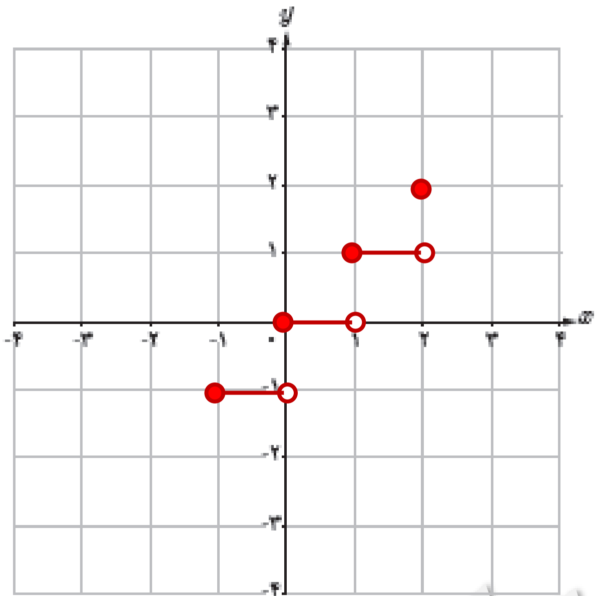
(پ)



(ت)

تمرین تکمیلی

سوال ۱۰ : نمودار تابع $f(x) = [x]$ را در فاصلهٔ $[-۱ , ۲]$ رسم کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) حد چپ و راست تابع f در نقطهٔ $x = ۱$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۰$$

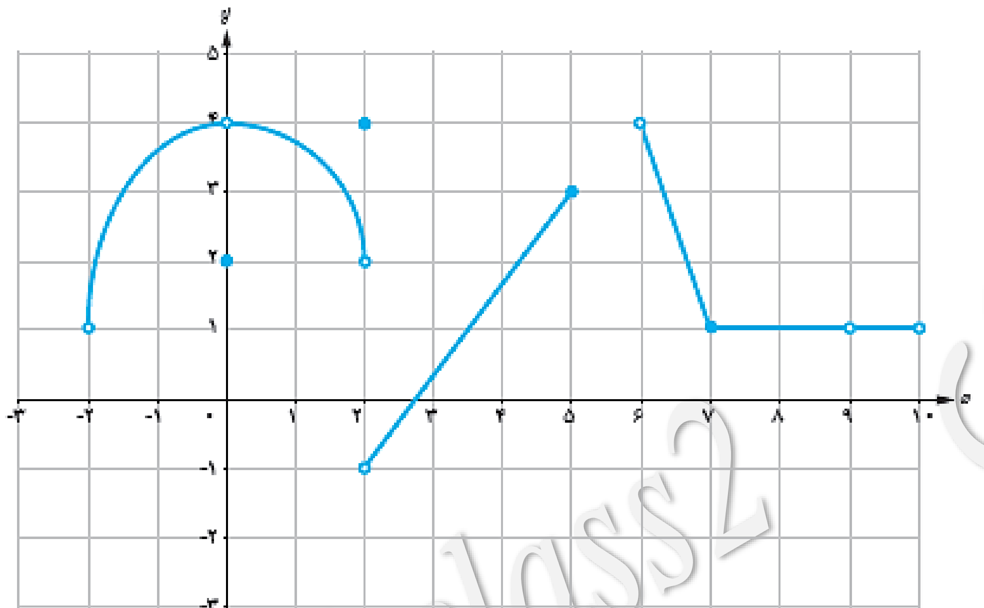
$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۱$$

ب) آیا تابع f در نقطهٔ $x = ۱$ حد دارد؟ چرا؟

تابع f در نقطهٔ $x = ۱$ حد ندارد. زیرا: $\lim_{x \to ۱^-} f(x) \neq \lim_{x \to ۱^+} f(x)$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۱ : نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $\lim_{x\to ۰} f(x) =$ ۴

ب) $\lim_{x\to ۲} f(x) =$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x\to ۵} f(x) =$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to ۶^-} f(x) =$ وجود ندارد

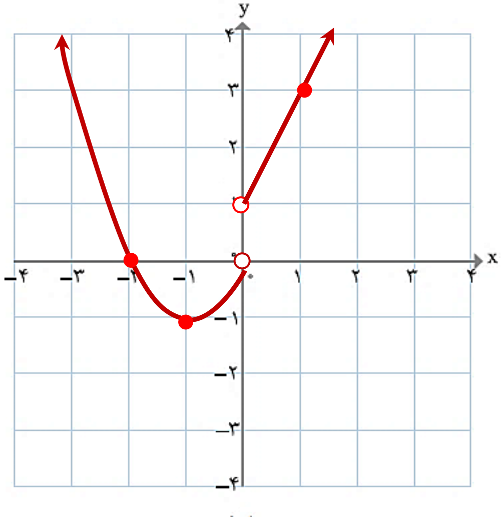
ث) $\lim_{x\to (-۲)^+} f(x) =$ ۱

ج) $\lim_{x\to ۸} f(x) =$ ۱

چ) $\lim_{x\to ۹} f(x) =$ ۱

تمرین تکمیلی

سوال ۱۲ : با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۱, & x>۰\\ x^۲+۲x, & x<۰\end{cases}$ به سوالات زیر پاسخ دهید.



$f_۱(x)=۲x+۱$

x	۰	۱
$f_۱(x)$	۱	۳

$f_۲(x)=x^۲+۲x$

x	۰	۱-	۲-
$f_۲(x)$	۰	۱-	۰

الف) حد چپ و راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱$$

ب) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد دارد؟ چرا؟

تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد ندارد. زیرا: $\lim_{x\to ۰^-} f(x)\neq \lim_{x\to ۰^+} f(x)$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۳ : با توجه به دامنهٔ تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x^۲ - x}$ در نقطهٔ $x = ۱$ چه می توان گفت؟

ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می آوریم. به این منظور عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی یک قرار می دهیم.

$$x^۲ - x \geq ۰$$

$$x^۲ - x = ۰ \quad \rightarrow \quad x(x-۱) = ۰ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x^۲ - x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
		جواب				جواب	

$$D_f = (-\infty, ۰) \cup (۱, +\infty)$$

تابع f به ازای مقادیر بین صفر تا یک تعریف نشده است.

تابع f در همسایگی چپ $x = ۱$ تعریف نشده است پس $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$ وجود ندارد.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۴ : با توجه به دامنهٔ تابع، در مورد حد راست تابع f با ضابطهٔ زیر در نقطهٔ $x = ۲$ چه می توان گفت؟

$$f(x) = \frac{x}{[x] - ۲}$$

توابع u و v را اینچنین تعریف می کنیم:

$$u(x) = x \quad \rightarrow \quad D_u = \mathbb{R}$$

$$v(x) = [x] - ۲ \quad \rightarrow \quad D_v = \mathbb{R}$$

$$D_f = D_u \cap D_v - \{v(x) = ۰\}$$

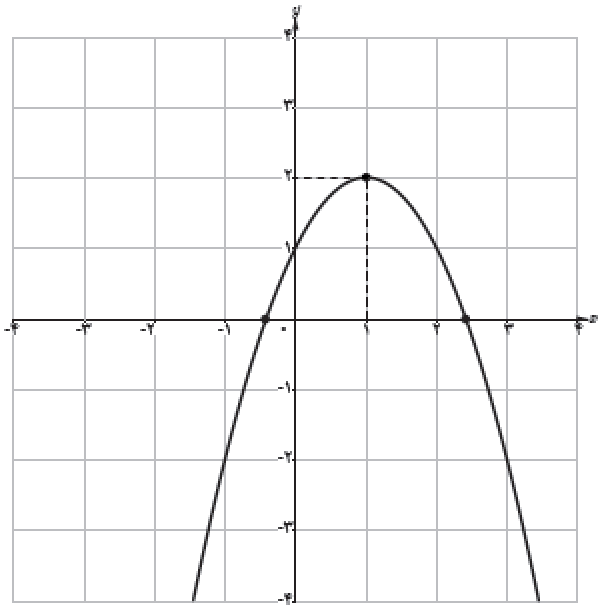
$$v(x) = [x] - ۲ = ۰ \quad \rightarrow \quad [x] = ۲ \quad \rightarrow \quad ۲ \leq x < ۳$$

$$D_f = \mathbb{R} - [۲\,,۳) = (-\infty, ۲) \cup [۳\,, +\infty)$$

تابع f به ازای مقادیر $[۲\,,۳)$ تعریف نشده است.

تابع f در همسایگی چپ $x = ۲$ تعریف نشده است پس $\lim_{x \to ۲^+} f(x)$ وجود ندارد.

تمرین تکمیلی



سوال ۱۵ : با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-۱)^۲ + ۲$ ، حدود زیر را مشخص کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

الف) $\lim_{x \to ۱} [f(x)] =$

ب) $\left[\lim_{x \to ۱} f(x)\right] =$

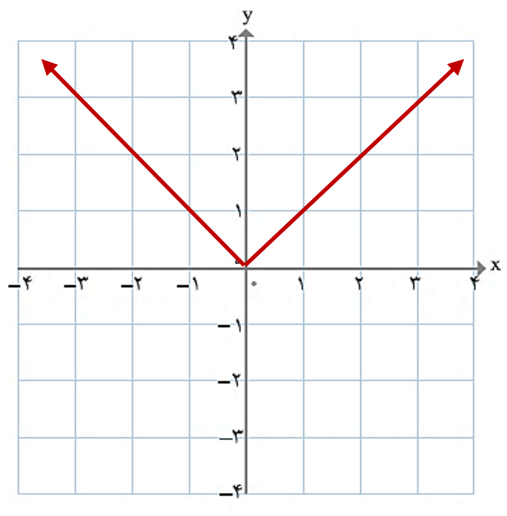
$$\begin{aligned} &۰ \le x < ۱ \to ۱ \le f(x) < ۲ \to [f(x)] = ۱ \to \lim_{x \to ۱^-} [f(x)] = ۱ \\ &۱ < x \le ۲ \to ۱ \le f(x) < ۲ \to [f(x)] = ۱ \to \lim_{x \to ۱^+} [f(x)] = ۱ \end{aligned} \to \lim_{x \to ۱} [f(x)] = ۱$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۲ \\ &\lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۲ \end{aligned} \to \lim_{x \to ۱} f(x) = ۲ \to \left[\lim_{x \to ۱} f(x)\right] = ۲$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۶ : با رسم نمودار تابع $f(x) = |x|$،

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to 0} |x|$ را به دست آورید.



$$f(x) = |x| \quad \to \quad f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$$

ب) اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد، آیا تساوی $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$ برقرار است؟

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} x = a \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} (-x) = -a \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to a} f(x) = \begin{cases} -a & a < 0 \\ a & a > 0 \end{cases} \to \lim\limits_{x\to a} f(x) = |a|$$

پایان درس اول