

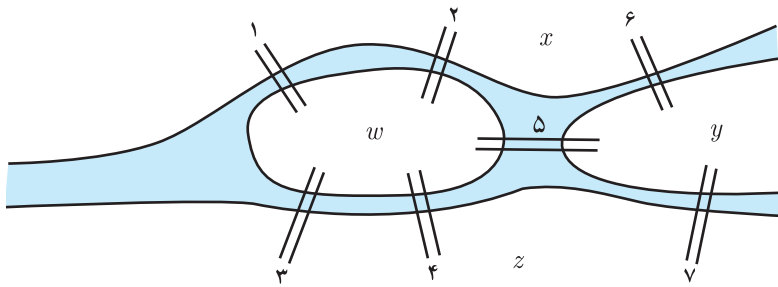
## گراف و مدل سازی

۲

- ۱ معرفی گراف
- ۲ مدل سازی با گراف

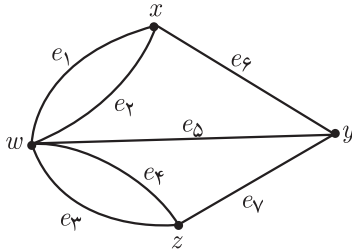
در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانه این شهر که از میان شهر عبور می‌کرد مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می‌کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها، به نقطه شروع حرکت بازگشت؟



شکل ۱

لئونارد اویلر<sup>۱</sup> (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷)، ریاضی‌دان برجسته سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می‌گوییم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان‌پذیر نیست.



شکل ۲

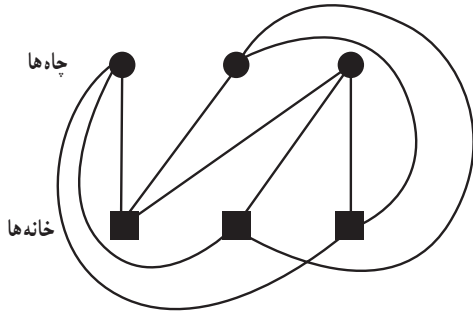
اگر چهار ناحیه  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $w$  را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه‌ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به دست می‌آید که گراف حاصل از مدل‌سازی مسئله مذکور است. مدل‌سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته‌بندی منظم و تفکر منطقی درباره آنها را آسان‌تر می‌نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئله اویلر می‌دانند، اما بی‌تردید

۱- Leonhard Euler

متفکران و ریاضی دانان دیگری پیش از آن تاریخ نیز برای حل مسائل از مدل سازی با گراف بهره گرفته اند. به طور مثال در حدود ۱۰۰ سال پیش از آن شیخ بهایی، ریاضی دان ایرانی (۱۰۰۰-۹۲۵ خورشیدی) مسئله ای به این صورت طرح کرد:

سه خانه و سه چاه آب، مانند شکل مقابل مفروض اند. آیا می توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟



شکل ۳

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه ها و چاه ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال ها را با خط ها یا منحنی ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعه مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعه اول به تک تک نقاط مجموعه دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می توان نشان داد که این کار نشدنی است و لاقبل دو تا از خط ها یکدیگر را قطع می کنند. حال به مثالی از تحلیل یک وضعیت به کمک گراف می پردازیم.

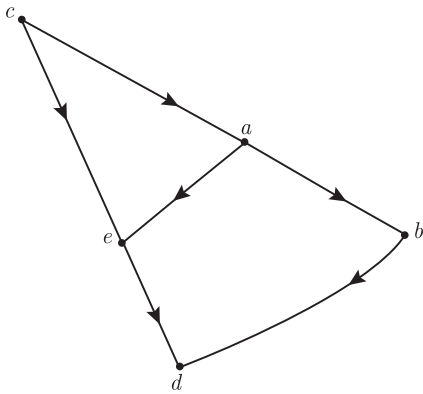
مثال: ۵ تیم فوتبال  $a, b, c, d, e$  در یک گروه قرار دارند و تیم ها دوبه دو با هم بازی می کنند و برخی از این بازی ها انجام

شده است و اطلاعات زیر را داریم:

- تیم  $a$  تیم های  $b$  و  $e$  را برده و به  $c$  باخته است.
- تیم  $b$  به  $a$  باخته و از  $d$  برده است.
- تیم  $c$  از تیم های  $a$  و  $e$  برده است.
- تیم  $d$  به تیم های  $b$  و  $e$  باخته است.
- تیم  $e$  به  $a$  و  $c$  باخته و از تیم  $d$  برده است.

$(a$  با  $d)$  و  $(b, d$  با  $c)$

$(b$  با  $e)$



شکل ۴

برای نمایش تمام اطلاعات بالا به صورت خلاصه، از نموداری به شکل ۴ استفاده می کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می گذاریم و هر دو نقطه را به هم وصل می کنیم اگر و تنها اگر تیم های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند؛ و جهت خط یا منحنی ای که دو نقطه را به هم وصل می کند باید از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

حال با یک نگاه به نمودار رسم شده، علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سؤال های زیر نیز می توان جواب داد.

- مشخص کنید هر تیم با کدام تیم ها بازی نکرده است.
- اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم ها بیشترین امتیاز را کسب کرده اند؟

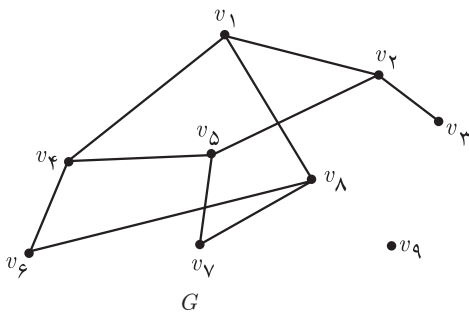
تیم های  $a, c$  بیشترین امتیاز یعنی ۶ امتیاز دارند

۱- دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، ریاضی دان مشهور ایرانی، یکی از پیشگامان نظریه گراف در ایران است. بسیاری از پژوهش گران در این زمینه او را پدر علم گراف

در ایران می دانند.

تیم	a	b	c	d	e
بازی نکرده	d	c, e	b, d	a, c	b
امتیاز	۶	۳	۶	۰	۳

مسئله: سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گراف مثال قبل بتوان به آن جواب داد.



شکل ۵

همان طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها، که به هر یک از این نقاط **رأس** و به هر یک از پاره‌خط‌ها **یال** می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً پاره‌خط راست باشند و می‌توانند به صورت منحنی نیز باشند و در هر سر یال باید رأسی قرار داشته باشد. همان طور که دیدیم یک گراف را می‌توان با رسم نمودار آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوه نمایش یک گراف را بررسی می‌کنیم.

گراف  $G$  را با ۹ رأس و ۱۰ یال، مانند شکل ۵، در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم. با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا، با نمادهای ریاضی مجموعه یال‌ها و رئوس آن را به صورت زیر نمایش داد.

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_8, v_9\}$$

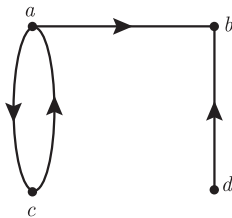
مجموعه رأس‌های گراف  $G$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_2v_3, v_4v_5, v_4v_6, v_4v_7, v_4v_8, v_5v_6, v_5v_7, v_5v_8, v_6v_7, v_6v_8, v_7v_8\}$$

مجموعه یال‌های گراف  $G$

به وضوح، با داشتن شکل گراف، شما می‌توانید مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعه  $V(G)$  و  $E(G)$  می‌توانید ابتدا به تعداد  $n(V(G))$  (تعداد اعضای مجموعه  $V(G)$ ) که آن را با  $|V(G)|$  نیز نمایش می‌دهیم (نقطه رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به  $E(G)$  رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.

همان طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم.



شکل ۶

به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعه رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار شکل ۶ را این گونه نمایش می‌دهیم.

$$V = \{a, b, c, d\} \quad E = \{(a, b), (a, c), (c, a), (d, b)\}$$

### کار در کلاس

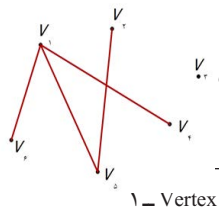
— دو مجموعه  $V(G)$  و  $E(G)$  به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

الف)  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1\}$$

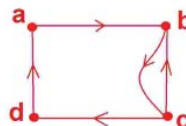
ب)  $V(G) = \{a, b, c, d\}$

$$E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a)\}$$

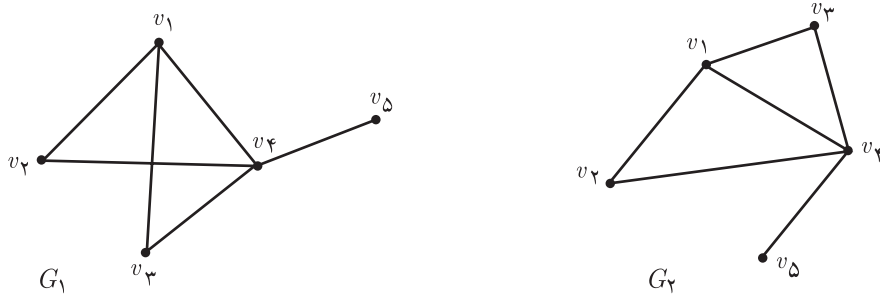


۱ - Vertex

۲ - Edge



توجه: برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی مدنظر نیست. آنچه مهم است این است که باید مشخص باشد که گراف مورد نظر گراف چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. به طور مثال با نوشتن مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.



شکل ۷

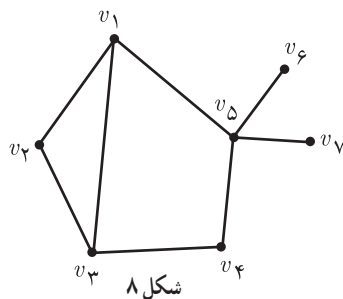
$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G_1) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$$

$$E(G_2) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$$

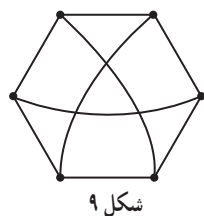
■ مرتبه و اندازه یک گراف: تعداد رأس‌های گراف  $G$  یعنی  $|V(G)|$  را مرتبه آن گراف می‌گوییم و با  $p(G)$  نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی  $|E(G)|$  را اندازه گراف  $G$  می‌گوییم و با  $q(G)$  نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای  $p(G)$  از  $p$  و به جای  $q(G)$  از  $q$  استفاده می‌کنیم. به طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل ۷ از مرتبه ۵ و اندازه ۶ هستند. بنابراین  $p=5$  و  $q=6$ .



شکل ۸

■ درجه یک رأس: درجه رأس  $v$  در گراف  $G$  برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف  $G$  که به رأس  $v$  متصل‌اند و آن را با  $deg_G(v)$  یا به طور ساده‌تر با  $deg(v)$  یا  $d(v)$  نمایش می‌دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم. به طور مثال در شکل مقابل داریم:

$$deg(v_1) = 3, \quad deg(v_5) = 4$$



شکل ۹

■ گراف  $K$  - منتظم: گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد  $k$  باشند، گراف  $k$  - منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف شکل ۹ یک گراف ۶ رأسی ۳ - منتظم است.

■ رأس تنها: به رأسی که درجه آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم.

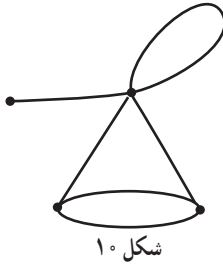
■ گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی می‌نامیم. بنابراین منظور از گراف تهی  $n$  رأسی، گرافی شامل  $n$  رأس تنها و بدون یال است.

راس های فرد  $\rightarrow d(v_1) = 3, d(v_3) = 3, d(v_6) = 1, d(v_7) = 1$

راس های زوج  $\rightarrow d(v_2) = 2, d(v_4) = 2, d(v_5) = 4$

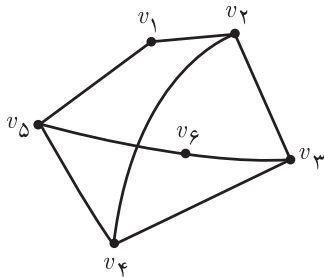
## کار در کلاس

درجه سایر رئوس گراف شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج اند.



شکل ۱۰

بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خود آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال **طوقه** گفته می شود. این دو مورد در شکل ۱۰ نمایش داده شده اند. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می گوئیم. دیدیم که گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب فقط گراف های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



شکل ۱۱

■ دو رأس مجاور (همسایه): دو رأس  $u$  و  $v$  را دو رأس همسایه یا مجاور گوئیم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی  $uv \in E(G)$ . به طور مثال در گراف شکل ۱۱، رأس  $v_1$  با رئوس  $v_2$  و  $v_3$  با رئوس  $v_4$  و  $v_5$  همسایه است و رأس  $v_4$  با رئوس  $v_1$  و  $v_3$  و  $v_5$  و  $v_6$  همسایه است.

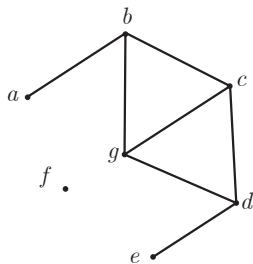
توجه: در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

■ مجموعه همسایه های یک رأس: فرض کنیم  $v \in V(G)$ ، به مجموعه رأس هایی از گراف  $G$  که به رأس  $v$  متصل هستند، «همسایگی باز رأس  $v$ » می گوئیم و با  $N_G(v)$  نمایش می دهیم. اضافه کردن خودِ رأس  $v$  به  $N_G(v)$  «همسایگی بسته رأس  $v$ » را به دست می دهد که آن را با  $N_G[v]$  نمایش می دهیم. می توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

به طور مثال در گراف شکل ۱۲ داریم:



شکل ۱۲

$$N_G(a) = \{b\}$$

$$N_G[a] = \{a, b\}$$

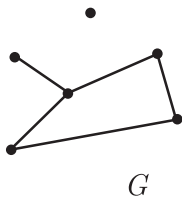
$$N_G(c) = \{b, d, g\}$$

$$N_G[c] = \{b, c, d, g\}$$

$$N_G(f) = \emptyset$$

$$N_G[f] = \{f\}$$

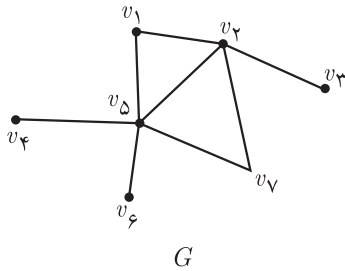
■ دو یال مجاور: دو یال را مجاور گوئیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۱۲، یال های  $bc$  و  $cd$  مجاور اند.



شکل ۱۳

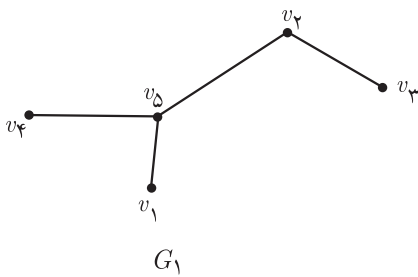
■ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف  $G$  را با  $\Delta(G)$  و کوچک‌ترین آنها را با  $\delta(G)$  نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم:

$$\Delta(G) = 3, \quad \delta(G) = 0$$



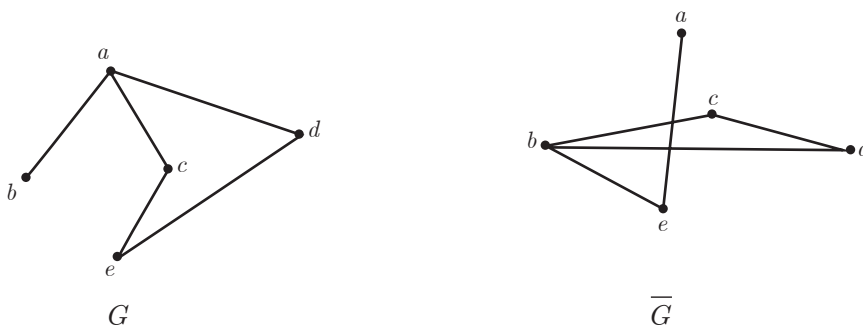
شکل ۱۴

■ زیرگراف: یک زیرگراف از گراف  $G$  گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف  $G$ ، و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های  $G$  باشد. به طور مثال گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  و  $G_3$  که در شکل ۱۵ آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف  $G$  در شکل ۱۴ هستند.



شکل ۱۵

■ مکمل یک گراف: مکمل گرافی مانند  $G$  که آن را با  $G^c$  یا  $\bar{G}$  نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف  $G$  است و بین دو رأس از  $G^c$  یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در  $G$  یالی وجود نداشته باشد. در شکل ۱۶ یک گراف و مکملش نمایش داده شده است.



شکل ۱۶

**مسئله ۱:** اگر  $G$  یک گراف با  $n$  رأس و  $v$  یک رأس آن باشد و  $d_G(v)$  و  $d_{\bar{G}}(v)$  به ترتیب درجه رأس  $v$  در گراف های  $G$  و  $\bar{G}$  باشند، مقدار  $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v)$  را به دست آورید.

**مسئله ۲:** یک گراف  $n$  رأسی حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

**مسئله ۳:** اگر  $G$  یک گراف  $n$  رأسی باشد، مقدار  $q(G) + q(\bar{G})$  را به دست آورید.

**■ گراف کامل:** گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد گراف کامل می نامیم. گراف کامل  $n$  رأسی را با  $K_n$  نمایش می دهیم. می توان گفت  $K_n$  یک گراف  $n$  رأسی و  $n-1$  منتظم است.

**مسئله ۱:** یک گراف کامل  $p$  رأسی چند یال دارد؟

**مسئله ۲:** اگر  $G$  یک گراف  $p$  رأسی باشد، چه رابطه ای بین تعداد یال های گراف های  $G$ ،  $\bar{G}$  و  $K_p$  وجود دارد؟

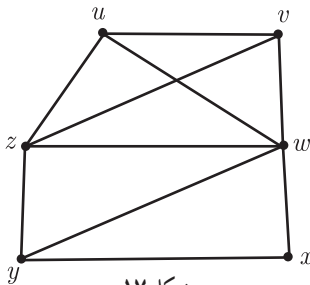
**مسئله ۳:** مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟

**■ مسیر:** اگر  $u$  و  $v$  دو رأس از گراف  $G$  باشند، یک مسیر از  $u$  به  $v$  (یک  $u-v$  مسیر) در  $G$  دنباله ای از رئوس دوهده و متمایز در  $G$  است که از  $u$  شروع و به  $v$  ختم می شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در  $G$  مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می کنیم که دنباله متشکل از تنها یک رأس  $v$ ، یک مسیر است با طول صفر از رأس  $v$  به خودش.

**مثال**

$uvw$  یک  $u-v$  مسیر به طول ۲ است.

$uzyvw$  یک  $u-v$  مسیر به طول ۴ است.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

**■ گرافی را که تنها از یک مسیر  $n$  رأسی تشکیل شده باشد با  $P_n$  نمایش می دهیم.**

به طور مثال  $P_5$  در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.

**■ دور:** دنباله  $v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$  ( $n \geq 3$ ) از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول  $n$  می نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۷ دورهای  $xwvzyx$ ،  $ywzy$ ،  $uvwu$  به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.



شکل ۱۹

**■ گرافی را که تنها از یک دور  $n$  رأسی تشکیل شده باشد را با  $C_n$  نمایش می دهیم.**

به طور مثال  $C_5$  در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.

**مسئله:** در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید.



مسایل صفحه ۳۸: ( مکمل یک گراف )

مسئله ۱: اگر  $G$  دارای  $n$  رأس باشد هر رأس مانند  $v$  می تواند حداکثر  $(n - 1)$  رأس دیگر مجاور باشد که اگر در گراف  $G$  مجاور

باشد پس در گراف متمم  $G$  مجاور خواهد بود پس  $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = n - 1$

مسئله ۲: از هر رأس حداکثر  $(n - 1)$  یال خارج می شود  $n$  گره داریم پس تعداد کل  $\frac{n(n - 1)}{2}$  خواهد شد و تقسیم بر ۲ بعلت

اینکه هر یال دوبار شمارش شده است .

مسئله ۳: هر یال بین دو رأس یا در  $G$  یا در  $\overline{G}$  وجود دارد پس طبق قسمت های قبل  $q(G) + q(\overline{G}) = \frac{n(n - 1)}{2}$  .

مسائل صفحه ۳۸: (گراف مکمل)

$$q_{Lp} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow q(k_p) = \frac{p(p-1)}{2} \text{ مسئله ۱}$$

$$q_{(G)} + q_{(\bar{G})} = q_{(k_p)} = \frac{p(p-1)}{2} \text{ مسئله ۲}$$

مسئله ۳: گراف تهی

■ همبندی و ناهمبندی یک گراف: گراف  $G$  را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم. به طور مثال گراف  $H$  در شکل ۲۰ همبند و گراف  $G$  ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس  $v$  و  $w$  هیچ مسیری وجود ندارد.



شکل ۲۰

### فعالیت

- ۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.
- ۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.
- ۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.
- ۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.
- ۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

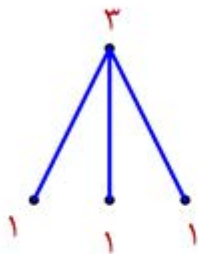
### فعالیت

- ۱ یک گراف دلخواه مانند  $G$  با  $n$  رأس  $v_1, v_2, \dots, v_n$  و  $m$  یال  $e_1, e_2, \dots, e_m$  در نظر بگیرید.
- ۲ تمام یال‌های گراف  $G$  را حذف کنید.
- ۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ تعداد یال‌های گراف حاصل چند است و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟ **ظاهراً با هم برابرند**
- ۴ یال  $e_1$  را در جای خود (بین همان دو رأسی که  $e_1$  قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید. **تعداد یال‌ها ۱ و مجموع درجات ۲ می‌شود**
- ۵ تمام یال‌های  $e_1, e_2, \dots, e_m$  را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیه  $G$  برسید و پس از اضافه کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید. هر مرحله تعداد یالها یکی افزایش می‌یابد و مجموع درجات ۲ واحد افزایش می‌یابد.
- ۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟ **بطوریکه در مرحله آخر تعداد یال‌ها  $m$  و مجموع درجات  $2m$  می‌گردد**
- ۷ **خیر، چون تعداد یالها از اول صفر بوده و در هر مرحله که یالها یکی اضافه می‌شود درجه دوبرابر می‌شود**
- ۸ **برای تساوی  $\sum \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = 2m$  استدلال خود را بیان نمایید.**
- ۹ **چون در شمارش درجه هاهم یال شامل دو رأس است پس هر یال دوبار شمرده می‌شود پس مجموع درجات دوبرابر یالهست با توجه به آنچه در این فعالیت به دست آوردیم، می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.**

قضیه: اگر  $G$  یک گراف با مرتبه  $p$  و اندازه  $q$  و  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  مجموعه رئوس آن باشند، آنگاه:

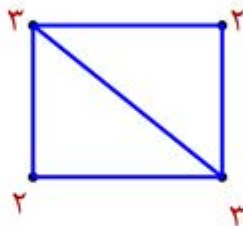
$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

(۱)



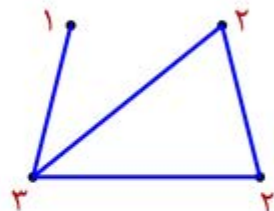
$$\sum \deg(v_i) = 6$$

$$q = 3$$



$$\sum \deg(v_i) = 10$$

$$q = 5$$



$$\sum \deg(v_i) = 8 \quad (۲)$$

$$q = 4 \quad (۳)$$

(۴) مجموع درجات رئوس گراف دو برابر تعداد یال های آن است.  $\sum \deg(v_i) = 2q$

نتیجه: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات: فرض کنیم  $G$  یک گراف و  $A$  مجموعه همه رئوس فرد گراف  $G$  و  $B$  مجموعه همه رئوس زوج گراف  $G$  باشد. در

این صورت داریم  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ . چون طبق قضیه مجموع رئوس زوج است پس مجموع رئوس فرد زوج است از طرفی درجه هر رأس  $B$  زوج است پس مجموع آنها زوج است

از طرفی  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  و  $\sum_{v \in A} \deg(v)$  زوج اند. (چرا؟) بنابراین  $\sum_{v \in B} \deg(v)$  نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد

که  $(A)$  عددی زوج است. (چرا؟) طبق قضیه  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  عددی زوج است و  $\sum_{v \in B} \deg(v)$  چون حاصل جمع تعدادی عدد زوج است

پس این مجموع نیز زوج است.

### فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطه دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون:

الف) گراف  $G$  رأسی ۷ رأسی را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیه قبل نشان دهید که امکان ندارد درجه تمام رئوس گراف حاصل برابر با ۳ باشد.

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

### فعالیت

فرض کنید  $G$  یک گراف باشد و داشته باشیم  $\delta(G) \geq 4$ . می‌خواهیم نشان دهیم که  $G$  شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

۱) رأس دلخواه  $v_1$  را در  $G$  در نظر می‌گیریم. حتماً  $v_1$  به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس  $v_2$  باشد.

۲) حتماً  $v_2$  به رأسی به جز رأس  $v_1$  متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس  $v_3$  باشد.

۳) حتماً  $v_3$  به رأسی از مجموعه  $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$  وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس  $v_4$  باشد.

۴) حتماً  $v_4$  به رأسی از مجموعه  $V(G) - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس  $v_5$  باشد.

۵) مسیر  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$  یک مسیر به طول ۴ در گراف  $G$  است.

### کار در کلاس

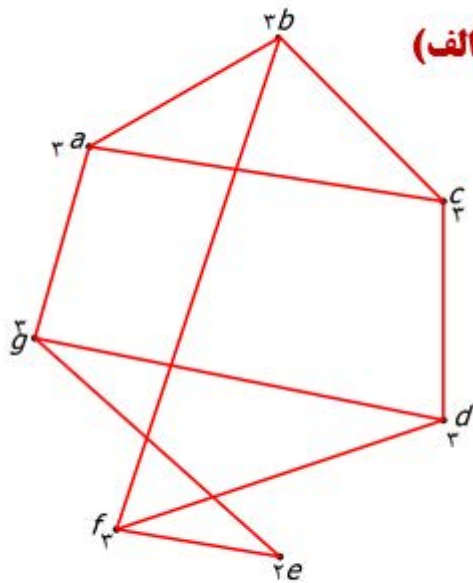
در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف  $G$  را به دست آورید.

الف)  $G$  یک گراف  $n$  رأسی  $K$  - منظم است.

ب)  $G$  یک گراف  $n$  رأسی کامل است. ( $G = K_n$ )

## حل فعالیت اول صفحه ۴۰:

(الف)



ب) اگر درجه تمام رئوس فرد باشد آنگاه

$$\text{که } \sum_{i=1}^7 \deg(v_i) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

عددی فرد است و نمی تواند برابر  $2q$  باشد

پ) در این صورت مجموع درجات زوج برابر با صفر می

شود و خواهیم داشت

$$\sum_{v \in A} \deg(v) = \sum_{v \in V(G)} \deg v = 2q$$

اما حاصل جمع تعدادی فرد از اعداد فرد، زوج نمی شود.

## حل فعالیت دوم صفحه ۴۰:

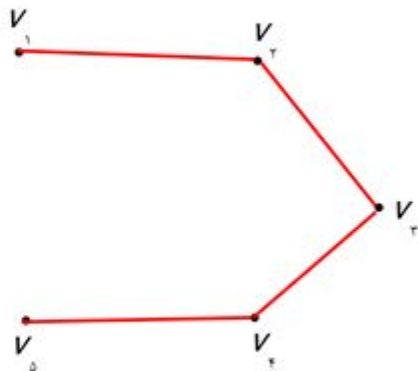
(۱) زیرا اگر به رأس دیگر متصل نباشد درجه آن صفر است در حالی که طبق فرض کمترین درجه ۴ است

(۲) زیرا اگر چنین نباشد درجه آن ۱ خواهد بود که با فرض مسئله که کمترین درجه ۴ است تناقض دارد.

(۳) زیرا اگر چنین نباشد درجه آن ۲ خواهد بود که با فرض مسئله که کمترین درجه ۴ است تناقض دارد.

(۴) زیرا اگر چنین نباشد درجه آن ۳ خواهد بود که با فرض مسئله که کمترین درجه ۴ است تناقض دارد.

$V_6$



مسیر  $V_5 V_4 V_3 V_2 V_1$  با طول ۴ است

## حل کار در کلاس صفحه ۴۰:

الف)  $G$  یک گراف  $n$  راس  $k$  - منتظم

چون گراف  $k$  منتظم است پس درجه هر راس آن  $k$  می باشد.  $n$  راس دارد پس مجموع درجات رئوس آن برابر با  $\sum \deg v_i = nk$  و از طرفی  $\sum \deg v_i = 2q$  . پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum \deg v_i &= nk \\ \sum \deg v_i &= 2q \end{aligned} \Rightarrow 2q = nk \rightarrow q = \frac{nk}{2}$$

ب) در گراف  $n$  راس کامل  $(K_n)$  درجه هر راس  $(n-1)$  است پس مجموع درجات رئوس آن  $\sum \deg v_i = n(n-1)$  خواهد بود از طرفی طبق قضیه  $\sum \deg v_i = 2q$  . پس خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \sum \deg v_i &= n(n-1) \\ \sum \deg v_i &= 2q \end{aligned} \Rightarrow 2q = n(n-1) \rightarrow q = \frac{n(n-1)}{2}$$



۱) گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  و مجموعه یال‌های  $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$  مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

(الف) مرتبه و اندازه گراف  $G$  را بنویسید.

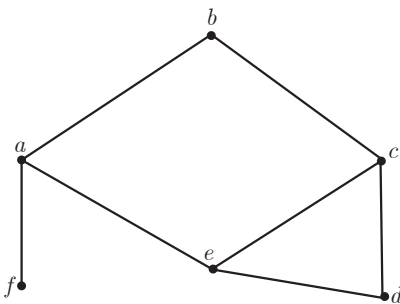
(ب) درجه رأس‌های  $G$  را مشخص نمایید.

(پ) کدام رأس‌های گراف  $G$  با رأس  $f$  مجاورند؟

(ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

(ث) گراف  $H$  با مجموعه رأس‌های  $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

و مجموعه یال‌های  $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$  مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (ت) در مورد گراف  $H$  پاسخ دهید.



شکل ۲۱ •g

۲) گراف  $G$  (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  را بنویسید.

(ب)  $\Delta(G)$  و  $\delta(G)$  را مشخص نمایید.

(پ) مجموعه همسایه‌های رأس‌های  $f$  و  $g$  را بنویسید.

(ت) اگر  $N_G(x) = \{a, c\}$ ، آنگاه  $x$  کدام رأس است؟

۳) گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  مفروض است. اگر  $N_G(v_1)$  دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های  $N_G(v_i)$  برای  $2 \leq i \leq 6$  تک‌عضوی باشند، گراف  $G$  را رسم کنید.

۴) در گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  داریم:

$$N_G(a) = \{b, c, d\}$$

$$N_G(b) = \{a, c\}$$

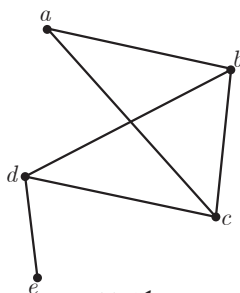
$$N_G(c) = \{a, b\}$$

$$N_G(d) = \{a, f\}$$

$$N_G(e) = \{ \}$$

$$N_G(f) = \{d\}$$

گراف  $G$  را رسم و اندازه آن را مشخص کنید.

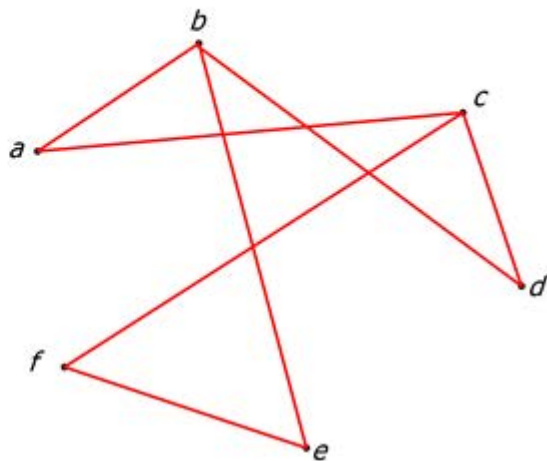


شکل ۲۲

۵) گراف  $G$  (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف  $\bar{G}$  را

مشخص کنید و همچنین درجات رئوس  $a$  و  $c$  در گراف  $\bar{G}$  را تعیین نمایید.

# تمرین (۱)



$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$$

مرتبہ:  $p = 6$

اندازه:  $q = 7$

(ب)  $d(a) = 2 \quad d(b) = 3 \quad d(c) = 3 \quad d(d) = 2 \quad d(e) = 2 \quad d(f) = 2$

(پ)  $\sum \deg(v_i) = 14$  (ت)

(ث)  $p = 4, q = 6 \quad d(v_1) = 3 \quad d(v_2) = 3 \quad d(v_3) = 3 \quad d(v_4) = 3 \quad \sum \deg(v_i) = 12$

## تمرین ۲

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$E = \{ab, af, bc, cd, ec, ed, ac\}$$

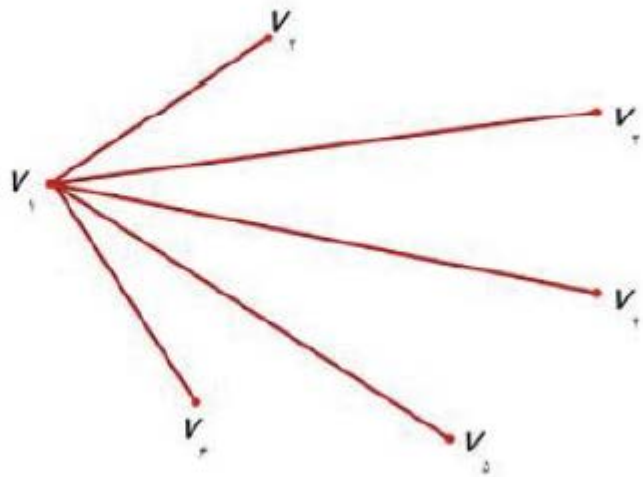
(الف)

$$N_G(g) = \{ \} \quad \Delta(G) = 3 \quad \sigma(G) = 1 \quad (\text{ب})$$

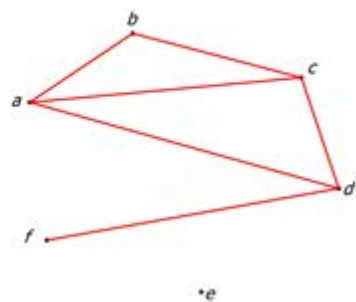
$$N_G(f) = \{a\} \quad N_G(e) = \{a, c, d\} \quad (\text{پ})$$

$$\begin{aligned} N_G(x) = \{a, c\} \\ N_G(b) = \{a, c\} \end{aligned} \Rightarrow N_G(x) = N_G(b) \Rightarrow x = b \quad (\text{ت})$$

تمرین ۳



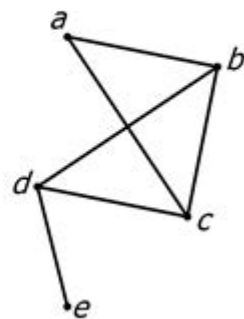
### تمرین (۴)



$$q = 5 \quad \sigma = 0$$

$$\sum \deg(v_i) = 10$$

### تمرین (۵)



$$\sum_{v_i \in G} \deg(v_i) = 12 \Rightarrow \sum_{v_i \in \bar{G}} \deg(v_i) = (5 \times 4) - 12 = 8$$

$$\deg_G(a) = 3 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 4 - 3 = 1$$

$$\deg_G(c) = 3 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) = 4 - 3 = 1$$

۶ گراف کامل  $K_p$  دارای ۳۶ یال است. در این گراف  $\Delta(G)$  و  $\delta(G)$  را مشخص کنید.

۷ گراف‌های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید.

۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف  $r$ -منتظم از مرتبه  $n$  رسم کنید.

الف)  $n = 4$      $r = 1$     ب)  $n = 4$      $r = 2$

پ)  $n = 5$      $r = 2$     ت)  $n = 5$      $r = 3$

ث)  $n = 6$      $r = 4$     ج)  $n = 7$      $r = 3$

۹ برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به طوری که:

الف) یک رأس تنها داشته باشد.    ب) دو رأس تنها داشته باشد.

پ) سه رأس تنها داشته باشد.    ت) چهار رأس تنها داشته باشد.

ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه‌ای دوطرفه داشته باشد؛ یعنی هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱۲ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به طوری که:

الف) دوره‌هایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دوره‌هایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

۱۳ فرض کنید  $G$  یک گراف باشد و  $\delta(G) \geq K$ . درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف)  $G$  لزوماً شامل یک مسیر به طول  $K$  است.

ب)  $G$  لزوماً شامل یک مسیر به طول  $K + 1$  است.

۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیرتهی  $K$ -منتظم بکشید که:

الف)  $K$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب)  $K$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۵ یک گراف ۵ رأسی غیرتهی  $K$ -منتظم بکشید که:

الف)  $K$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب)  $K$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

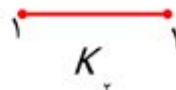
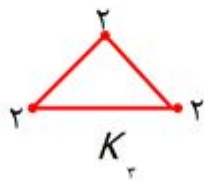
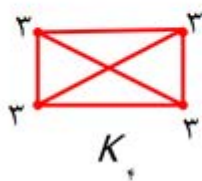
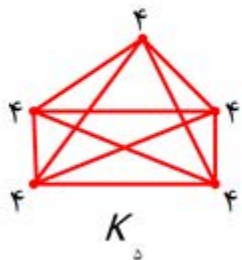
## تمرین ۶

$$q_{k_p} = \frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p^2 - p = 72 \Rightarrow p^2 - p - 72 = 0 \Rightarrow (p-9)(p+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = -8 & \times \\ p = 9 & \checkmark \end{cases}$$

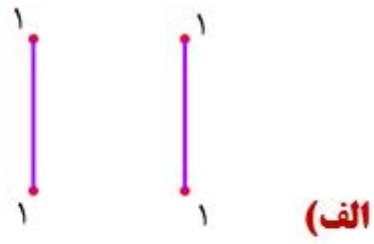
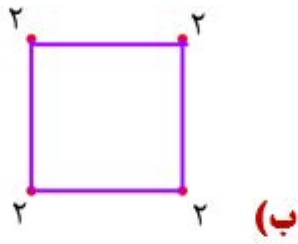
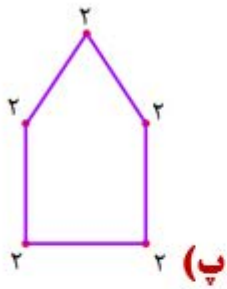
پس گراف کامل از مرتبه ۹ می باشد در  $k_9$  درجه تمام رئوس برابر ۸ است

$$p = 9 \Rightarrow \Delta(G) = \sigma(G) = 8$$

## تمرین ۷



تمرین ۸



ت) ۳- از مرتبه ۵ وجود ندارد زیرا مجموع درجات رئوس زوج نخواهد بود

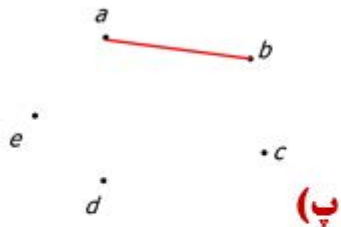
ث)



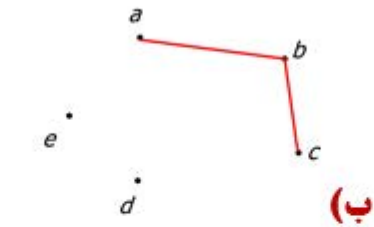
ج) ۳- از مرتبه ۷ وجود ندارد زیرا مجموع درجات رئوس زوج نخواهد بود



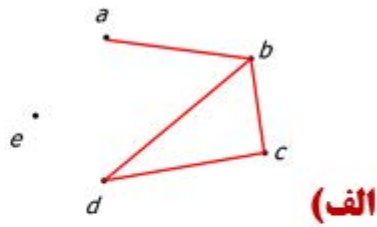
## تمرین ۹



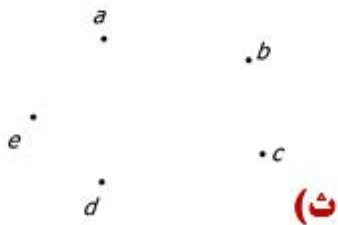
(پ)



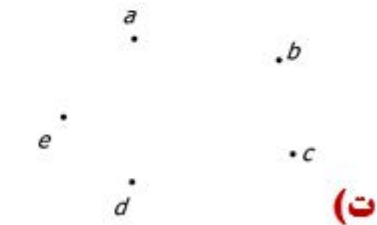
(ب)



(الف)



(ث)



(ت)

گراف تهی

چهار رأس تنها امکان ندارد

### تمرین ۱۰

زیرا گرافی با درجه رئوس  $۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۵$  قابل رسم نیست زیرا تعداد رئوس فرد آن زوج نیست و مجموع درجات رئوس آن فرد است.

### تمرین ۱۱

الف) دو نفر دوست باشند ← بعنوان دوست انتخاب شده باشد

دو نفر دوست نباشند ← در لیست دوستان انتخاب شده باشد

$$\text{پس } ۲^۰ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times \dots \times ۲ \quad (۲۶۲۰)$$

ب) در این حالت گراف ساده دارای ۵ رأس با تعداد  $۱۰ = \frac{۵ \times ۴}{۲}$  یال وجود دارد

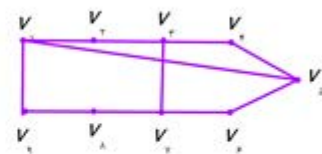
## تمرین ۱۲ الف

دور بطول ۵:  $v_3 v_4 v_5 v_6 v_7$

دور بطول ۶:  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$  یا  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$

دور بطول ۷:  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7$

دور بطول ۹:  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9$



دور بطول ۵:  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$

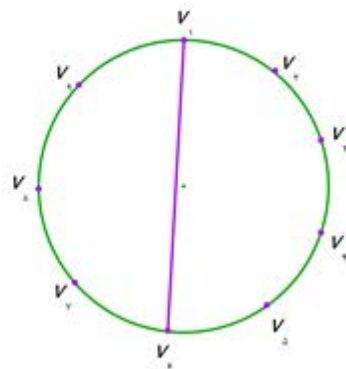
دور بطول ۶:  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$

دور بطول ۷: ایجاد نمی شود اگر یالی دیگر اضافه کنیم ممکن است یالی بطول ۷

ایجاد شود ولی حتماً یالهایی بطول ۳ و ۴ نیز ایجاد می شود

دور بطول ۸:  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8$

دور بطول ۹:  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9$



تمرین ۱۳) الف : درست است . اثبات :

راس دلخواه  $V_1$  را در گراف  $G$  در نظر می گیریم ، حتماً  $V_1$  به راس دیگری (مثل  $V_2$ ) متصل است ، زیرا در غیر این صورت  $\delta = 0$  خواهد شد.

همچنین  $V_2$  به راسی به جز  $V_1$  متصل می باشد (مثل  $V_3$ ) زیرا در غیر این صورت  $\delta = 1$  خواهد شد .

حتماً  $V_3$  به راسی به غیر از  $V_1$  و  $V_2$  (مثل  $V_4$ ) وصل است ، زیرا در غیر این صورت ، حداکثر مقدار  $\delta$  ، دو خواهد بود.

این روند ادامه دارد تا به راس جدید  $V_K$  برسیم که با استدلال مشابه قبل بایستی به راس جدیدی مانند  $V_{K+1}$  وصل باشد .

بنابراین مسیر  $V_1 V_2 V_3 \dots V_{K+1}$  یک مسیر به طول  $K$  در گراف  $G$  است.

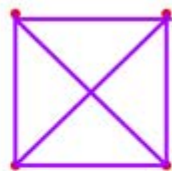
ب). نادرست است . مثال های نقض برای رد آن مطرح می کنیم :

● مثال نقض اول : در گراف یک راسی روبرو  $\delta = 0$  ،  $K = 0$  مسیری به طول  $1 = 0 + 1$  وجود ندارد .

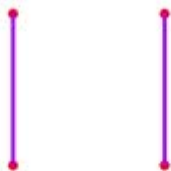
●● مثال نقض دوم : در گراف دو راسی روبرو  $\delta = 1$  ،  $K = 1$  مسیری به طول  $2 = 1 + 1$  وجود ندارد .

توجه : هر گراف کامل می تواند یک مثال نقض برای آن محسوب شود .

تمرین ۱۴ (الف)



(ب)



تمرین ۱۵ (الف)



(ب)

