

تجزیه دو جمله ای خاص :

زوج یا فرد

$$\textcircled{1} a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

فرد یا فرد

$$\textcircled{2} a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1})$$

مثال : عبارات زیر را تجزیه کنید :

الف) $x^6 - 32$

$$= x^6 - 2^6 = (x-2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$

ب) $x^7 + 1$

$$= x^7 + 1^7 = (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

پ) $x^9 - x^3y^3$

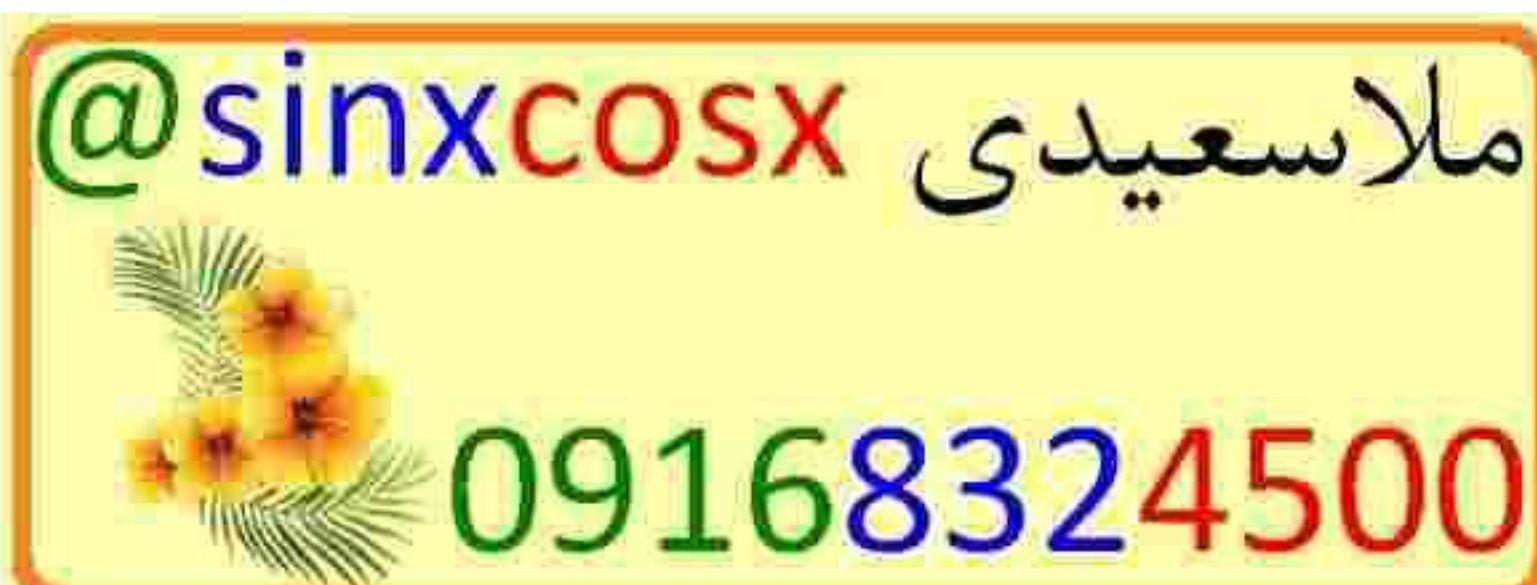
$$\begin{aligned} &= x^3(x^6 - y^3) = x^3[(x^2)^3 - y^3] \\ &= x^3(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2) \\ &= x^3(x^2 - y)(x^2 + x^2y + y^2) \end{aligned}$$

ت) $3x^6 + 729$

$$= 3(x^6 + 243) = 3(x^6 + 3^6) = 3(x+3)(x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 81x + 243)$$

ث) $(x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + 2$

$$= x^6 - 1 + 2 = x^6 + 1 = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + 1)$$



مثال: عبارات زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{(x^d+1)(x-1)}{x^r-1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x^d-x^r+x^r-x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} = x^d-x^r+x^r-x+1$$

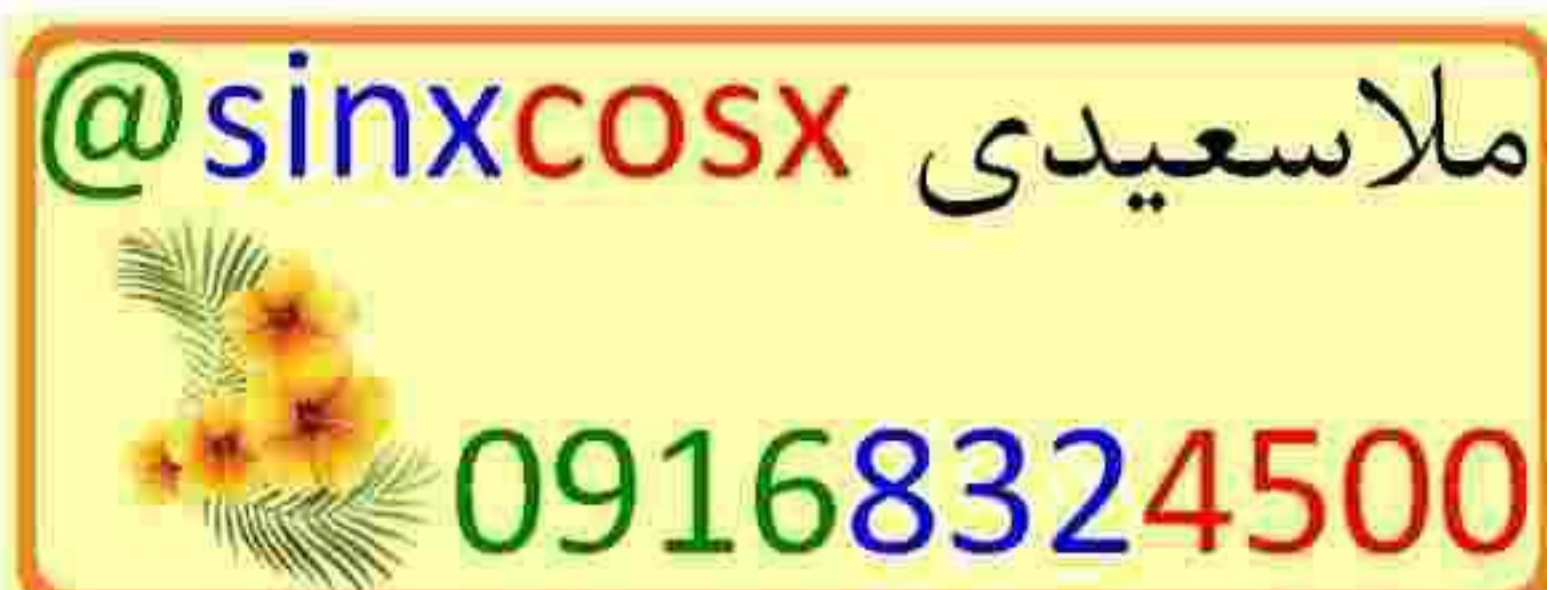
$$\text{ب) } \frac{(1+t+t^r+t^r+t^d)(1-t)}{t^d-1} = \frac{\cancel{1-t^d}}{\cancel{(t^d-1)}(t^d+1)} = \frac{-1}{t^d+1}$$

$$\text{پ) } \frac{(1+a+a^r+a^r)(1-a)}{a^r+1} = \frac{1-a^d}{a^r+1} = \frac{(1-a^r)\cancel{(1+a^r)}}{a^r+1} = 1-a^r$$

$$\text{ت) } \frac{(x-1)(x^d+x^d+\dots+1)}{(x^r-1)(x+1)} = \frac{x^d-1}{(x^r-1)(x+1)} = \frac{\cancel{(x^r+1)}\cancel{(x^r-1)}}{\cancel{(x^r-1)}(x+1)} = \frac{\cancel{(x+1)}(x^r-x+1)}{x+1}$$

$$= x^r-x+1$$

$$\text{ث) } \frac{(y-1)(y^r+ry+\epsilon)+v}{(1-y)(1+y+y^r)} = \frac{y^r-1+v}{1-y^r} = \frac{\cancel{y^r-1}}{\cancel{1-y^r}} = -1$$



معادله‌ی درجه دوم:
 در مسائل کنونی برای حل این معادله روش هایی پیشنهاد شده است - بهترین آنها را یادآور می‌شیم:

① روش تجزیه:

مثال: $2x^2 + 4x + 2 = 0$

$$\frac{1}{2} (2x+1)(2x+2) = 0 \Rightarrow (2x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = -2$$

⊕ → ۱ , ⊗ → ۲

② معرفی دو حالت خاص:

@sinxcosx ملا سعیدی
 09168324500

الف) اگر $a+c = b$ باشد، آنگاه $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$

ب) اگر $a+c = -b$ باشد، آنگاه $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$

مثال: $3x^2 = 4x - 2 \rightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{ب} x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3}$

مثال: $3 + x = \frac{-2}{x} \xrightarrow{\times x} 3x + x^2 = -2 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{الف} x_1 = -1$, $x_2 = -2$

مثال: $(2x-1)^2 = 25$

③ روش زوج:

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 5 \Rightarrow x=3 \\ 2x-1 &= -5 \Rightarrow x=-2 \end{aligned}$$

④ تعیین مبین (روش Δ):

مثال: $(2x+1)^2 - 3(x-1)^2 = 22$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 3x^2 + 6x - 3 = 22 \Rightarrow x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 + 96 = 196 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 \pm 14}{2} \rightarrow x = 2 \vee x = -12$$

توجه: واضح است که جواب معادله باید در معادله صدق کند.

سؤال: اگر $x = -1$ یک جواب معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

$$x = -1 \rightarrow 4 + m - 7 = 0 \Rightarrow m = 3$$

جواب دیگر $x = \frac{7}{4}$ است. $x = -1 \vee x = \frac{7}{4} \rightarrow 4x^2 - 3x - 7 = 0$ معادله

ردیف اول: با توجه به این که این معادله از جواب $x = -1$ شروع می‌شود، جواب دیگر $x = \frac{7}{4}$ است.

نکته (۱) اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو جواب حقیقی x_1 و x_2 باشد، آنگاه:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

سؤال: مجموع حاصل ضرب جوابهای معادله $2x^2 - 8x + 1 = 0$ را بیابید.

$$S = -\frac{(-8)}{2} = 4 \quad , \quad P = \frac{1}{2}$$

سؤال: برای چه مقدار از m مجموع جوابهای معادله $mx^2 + (2m-1)x - 1 = 0$ برابر $-\frac{3}{2}$ است؟

$$S = -\frac{1}{m} \Rightarrow -\frac{(2m-1)}{m} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 4m - 2 = 3m \Rightarrow m = 2$$

سؤال: برای چه مقدار از m مجموع جوابهای معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ حاصل ضرب جوابها است؟

$$S = \frac{1}{2} P \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \frac{c}{a} \xrightarrow{\times 2} -2b = c \Rightarrow -2(-m) = m - 1$$

$$\Rightarrow 2m - m = -1 \Rightarrow m = -1$$



سؤال: اگر $x = -1$ یکی از جواب‌ها معادله‌ی $x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، جواب دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و جوابها بیابید.

$$x_1 = -1 \quad \text{و} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{-7}{1} \Rightarrow -1 \cdot x_2 = \frac{-7}{1} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{1}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{m}{1} \Rightarrow -1 + \frac{7}{1} = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 6$$

سؤال: در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جوابها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب را بیابید.

$$\beta = \alpha + 2 \rightarrow \beta - \alpha = 2$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 2 \\ \beta + \alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \beta = 2 \quad \text{و} \quad \alpha = 1$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{m}{2} \Rightarrow 2 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 4$$

سؤال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - 5x - 1 = 0$ باشند، حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\hookrightarrow \alpha = \frac{5}{2}, \quad \beta = \frac{-1}{2}$$

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

الف) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2}} = -4$

ب) $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\beta + \alpha) = \frac{-1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{-5}{4}$

پ) $(\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4$
 $= \frac{-1}{2} + 2\left(\frac{5}{2}\right) + 4 = \frac{17}{2}$

ت) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{25}{4} + 1 = \frac{29}{4}$

ث) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} + \frac{15}{4} = \frac{155}{8}$

$$\text{ج) } |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} - 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 2\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

سوال: اگر α و β جواب ہا معادلی $x^2 - x - 1 = 0$ ہا ہا حاصل عبارت
 $(\alpha^3 - \alpha^2 + \beta)(\beta^3 - \beta^2 + \alpha)$ را بدست آوری۔

معادله: $x^2 - x = 1 \xrightarrow{\times x} x^3 - x^2 = x$

$$\text{عبارت} = \underbrace{(\alpha^3 - \alpha^2 + \beta)}_{\alpha} \underbrace{(\beta^3 - \beta^2 + \alpha)}_{\beta} = (\alpha + \beta)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9}$$


سوال: بدست حل معادله و با استفاده از Δ و P و S در وجود و علامت جوابا
 معادلی $x^2 - 7x - 4 = 0$ بحث کنی۔

معادله دارا دو جواب حقیقی مثبت و دیگر منفی
 به اندازهی جواب مثبت بیشتر است۔

$\Delta = 49 + 16 = 65 > 0$
 $P = -4 < 0$
 $S = \frac{7}{1} > 0$

سوال: اگر α و β جوابا معادلی $x^2 - 4x + 1 = 0$ ہا ہا حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را
 بدست آوری۔

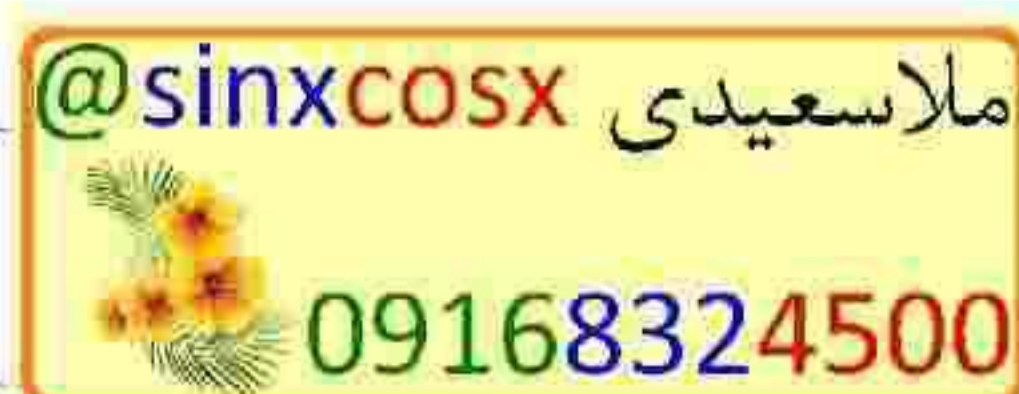
$$\sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

@sinxcosx ملاسعیدی

 09168324500

تمرین ۱ در معادله $3x^2 - 6x + m = 0$ اگر یکی از جواب ها سه برابر جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب را بیابید.

$$\beta = 3\alpha \quad \alpha + \beta = 2 \rightarrow \alpha + 3\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{m}{3} \xrightarrow{\times 6} m = \frac{9}{2}$$



تمرین ۲: اگر α, β جوابهای معادله $2x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند حاصل عبارت زیر را بیابید.
 $\hookrightarrow \alpha\beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha + \beta = \frac{7}{2}$

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad (2\alpha - 1)(2\beta - 1) &= 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1 = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{7}{2}\right) + 1 = \frac{-7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{49}{4} - \frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{47}{2}$$

تمرین ۳: اگر α, β جوابهای معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند حاصل $\alpha^4 + \beta^4$ را بیابید.

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = \left[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \right]^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 7$$

$$x^2 = x + 1 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 = 2x + 2 \Rightarrow x^4 = 2x + 2$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = 2\alpha + 2 + 2\beta + 2 = 2(\alpha + \beta) + 4 = 7$$

تمرین ۴: اگر α, β جوابهای معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند مطلوب است

$$\text{الف)} \quad \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

$$\text{ب)} \quad |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta} = \sqrt{16}$$

نکته (۲) : اگر S مجموع و P حاصلضرب جوابها معادله باشد، آن معادله به صورت زیر است:

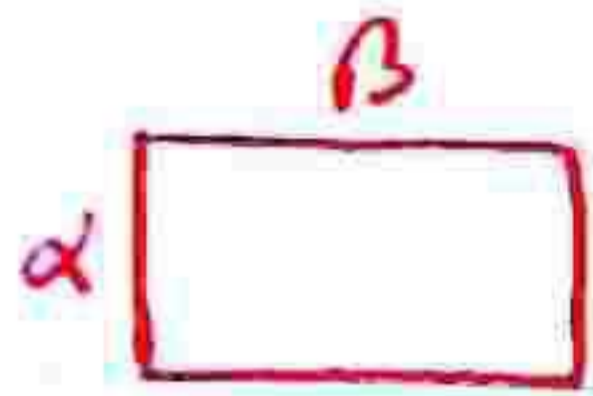
$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که جوابها آن $3 \pm \sqrt{2}$ باشد.

$$x_1 = 3 + \sqrt{2} \rightarrow S = 6$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{2} \rightarrow P = 7 \Rightarrow \text{معادله: } x^2 - 6x + 7 = 0$$

مثال: محیط مستطیل 22 سانتی متر و مساحت آن 6 سانتی متر مربع است. ابعاد مستطیل را بیابید.



$$\text{محیط: } 2(\alpha + \beta) = 22 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{22}{2} \Rightarrow S = \frac{22}{2}$$

$$\text{مساحت: } \alpha \cdot \beta = 6 \Rightarrow P = 6$$

$$\text{معادله: } x^2 - \frac{22}{2}x + 6 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 22x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2x-20)(2x-12) = 0 \Rightarrow (x-10)(2x-12) = 0 \rightarrow x=10 \vee x=\frac{12}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{12}{2}, \beta = 10$$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که جوابها آن (α, β) روابط $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4$ و

$$6\alpha + 6\beta = 4 \text{ برقرار باشد.}$$

$$6(\alpha + \beta) = 4 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{4}{6} \Rightarrow S = \frac{4}{6}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 4 \Rightarrow \frac{4/6}{P} = 4 \Rightarrow \frac{1}{6P} = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{محیط}} x^2 - \frac{4}{6}x + \frac{1}{6} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مساحت}} 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

مثال: اگر α, β جواب معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند معادله درجه دومی بنویسید که جوابها آن α^2, β^2 باشد.

نکته: اگر α, β جواب معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، آن معادله به صورت زیر است:

$$y_1 = \alpha^2 \rightarrow S = y_1 + y_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$$

$$y_2 = \beta^2 \rightarrow P = y_1 y_2 = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } y^2 - 3y + 1 = 0$$

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

مثال: معادله درجه دوم بنویسید جوابها آن دو برابر جوابها معادله $5x^2 + 2x - 1 = 0$ باشد.

روش اول:
 $y_1 = 2\alpha \rightarrow S = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{4}{5}$
 $y_2 = 2\beta \rightarrow P = (2\alpha)(2\beta) = 4(\alpha\beta) = 4\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{5}$

معادله: $y^2 + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} = 0 \xrightarrow{\times 5} 5y^2 + 4y - 4 = 0$

روش دوم:
 $y = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2} \xrightarrow{\text{معادله}} 5\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{2}\right) - 1 = 0$

$\xrightarrow{\times 4} 5y^2 + 4y - 4 = 0$

مثال: معادله درجه دوم بنویسید که جوابها آن 3 واحد بیشتر از جوابها معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد.

$y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3 \xrightarrow{\text{معادله}} (y-3)^2 - 2(y-3) - 1 = 0$
 $\Rightarrow y^2 - 8y + 14 = 0$

مثال: معادله درجه دوم بنویسید که جوابها آن عکس جوابها معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ باشد.

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \xrightarrow{\text{معادله}} 3\left(\frac{1}{y}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) - 1 = 0 \xrightarrow{\times y^2} -4y^2 - 4y + 3 = 0$

مثال: معادله درجه دوم بنویسید که جوابها آن عکس و قرینه جوابها معادله $2x^2 - x - 1 = 0$ باشد.

$y = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = -\frac{1}{y} \xrightarrow{\text{معادله}} 2\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{-1}{y} - 1 = 0 \xrightarrow{\times y^2} -4y^2 + y + 2 = 0$

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

سؤال: اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، معادله درجه دوم بنویسید که جواب‌های آن $\frac{\alpha-1}{2}$ و $\frac{\beta-1}{2}$ باشد.

$$y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow x-1=2y \Rightarrow x=2y+1 \xrightarrow{\text{عوض}} (2y+1)^2 - 4(2y+1) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 6y - 2 = 0$$

سؤال: معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ را بنویسید که جواب‌های آن $2 - \sqrt{3}$ باشد.

$$x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x - 2 = -\sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

سؤال: معادله $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ را بنویسید که جواب‌های آن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ باشد.

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} \rightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^4 - 10x^2 + 25 = 24$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

تمرین (۱) به ازای چه مقدار از m جواب‌های معادله $m x^2 + (2m-1)x - m^2 = 0$ قرین می‌شوند.

$$S = 0 \rightarrow \frac{-(2m-1)}{m} = 0 \Rightarrow -2m+1=0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

تمرین (۲) به ازای چه مقدار از k جواب‌های معادله $(k-1)x^2 + 10x + 2k = 0$ کس می‌شوند؟

$$P = 1 \Rightarrow \frac{2k}{k-1} = 1 \Rightarrow 2k = k-1 \Rightarrow k = -1$$

تمرین (۳) معادله درجه دوم بنویسید که جواب‌های آن $x^2 - x - 3 = 0$ معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد.

سیم آن در P جواب‌های معادله جدید باشد. بنابراین:

$$y_1 = \alpha^2 \rightarrow \text{جبر } S = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = 10$$

$$y_2 = \beta^2 \rightarrow \text{جبر } P = \alpha^2 \beta^2 = (-3)^2 = -27$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } y^2 - 10y - 27 = 0$$

تمرین (۴) معادله درجه دوم بنویسید جوابها را از دو برابر جوابها معادله $2x^2 - 4x + 1 = 0$ یک واحد کمتر باشد.

$$y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} 2\left(\frac{y+1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{y+1}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{y^2 + 2y + 1}{2} - 2y - 2 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2} y^2 - 2y - 1 = 0$$

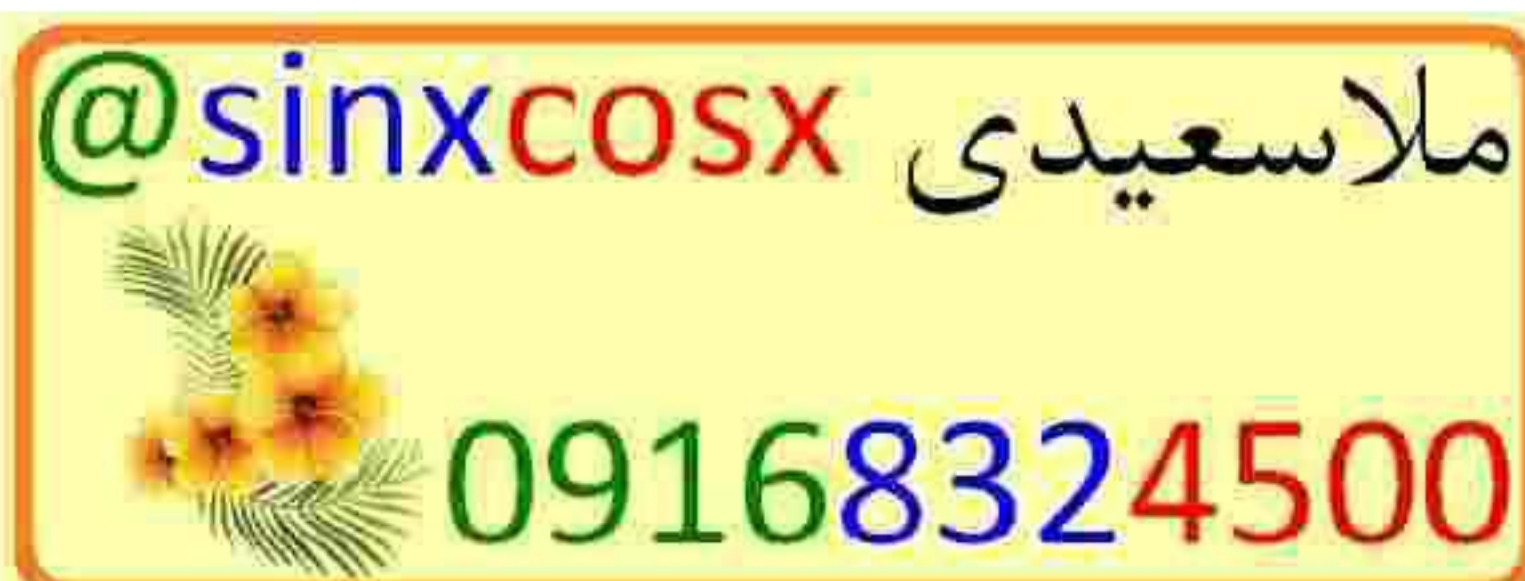
تمرین (۵) معادله درجه دوم بنویسید جوابها را از جذر جوابها معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ بیشتر باشد.

تعمیر آن را در جوابها معادله همیده باشند. بنابراین:

$$y_1 = \sqrt{\alpha} \rightarrow \text{جبر } S = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{4}$$

$$y_2 = \sqrt{\beta} \rightarrow \text{جبر } P = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta} = 1$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } y^2 - \sqrt{4}y + 1 = 0$$



تمرین (۶) معادله‌های چند جمله‌ای با ضرایب صحیح بنویسید. هر یک از جواب‌های آن به صورت زیر باشد:

الف) $\sqrt{2} - 1$

$$x = \sqrt{2} - 1 \rightarrow x + 1 = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 + 2x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

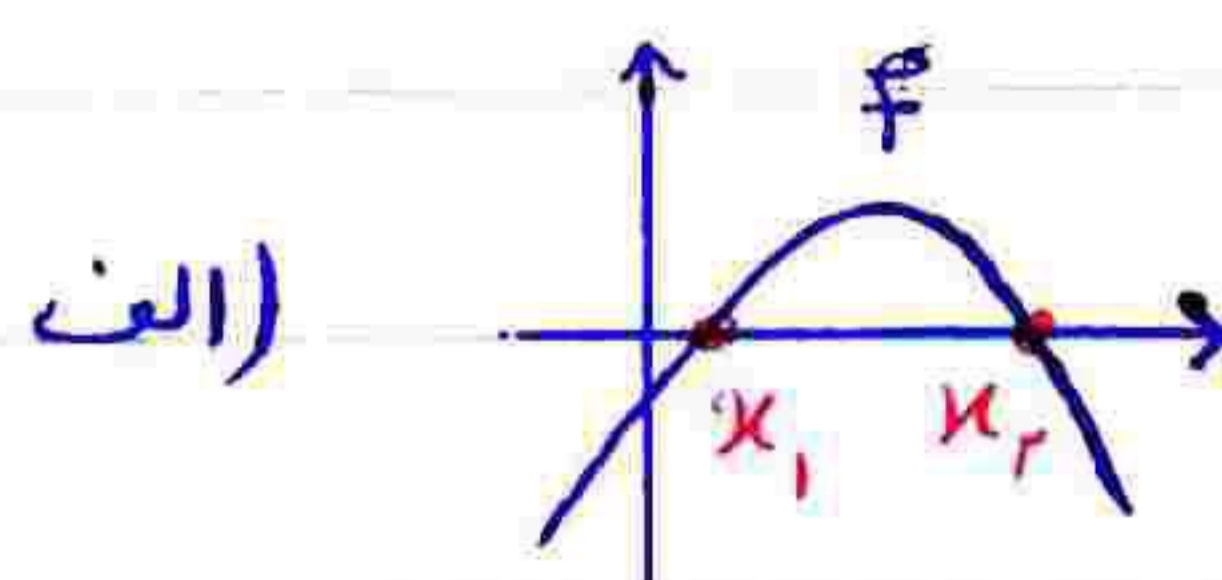
ب) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 = 3 - 2\sqrt{6} \rightarrow x^2 - 3 = -2\sqrt{6} \xrightarrow{\text{توان } 4} x^4 - 10x^2 + 9 = 24$$

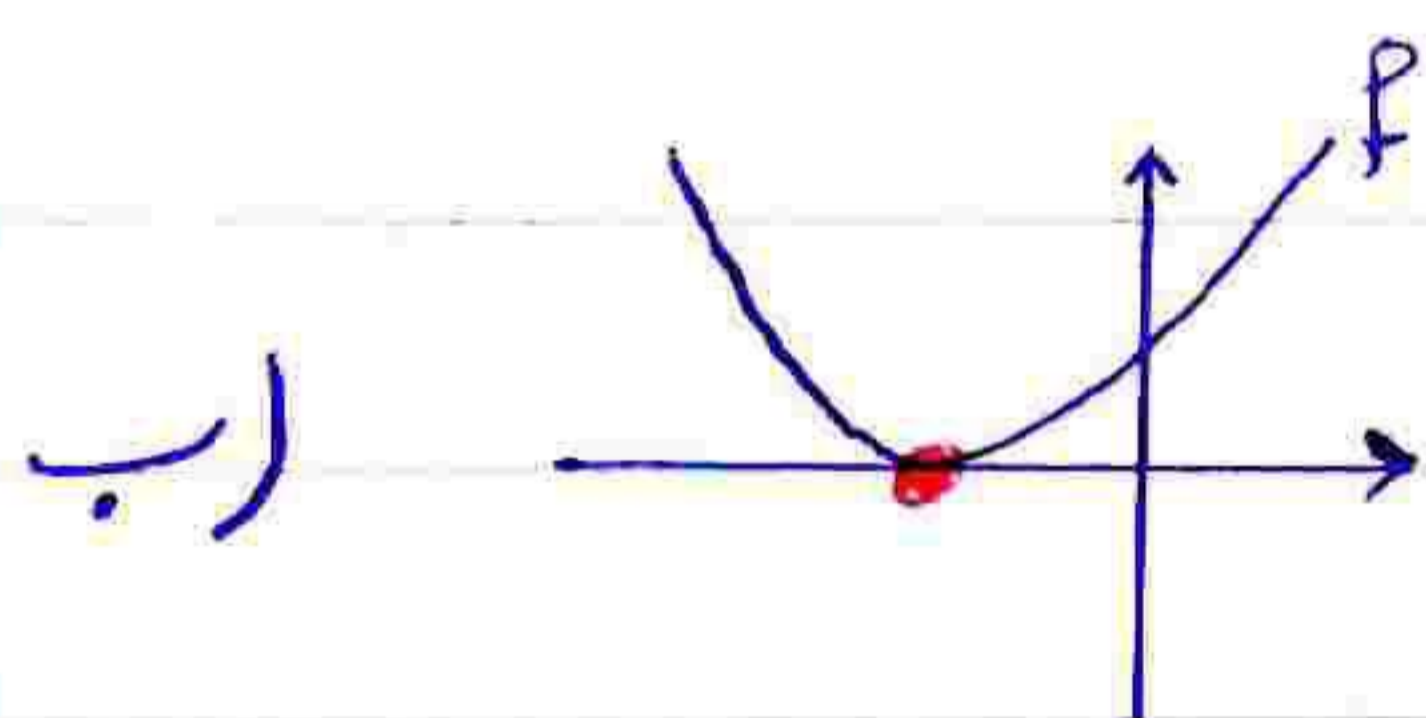
$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

نکته (۳): جایی که نمودار تابع با محور طولها برخورد می‌کند، صفر تابع نامیده می‌شود. در جواب‌های معادله $f(x) = 0$ است.

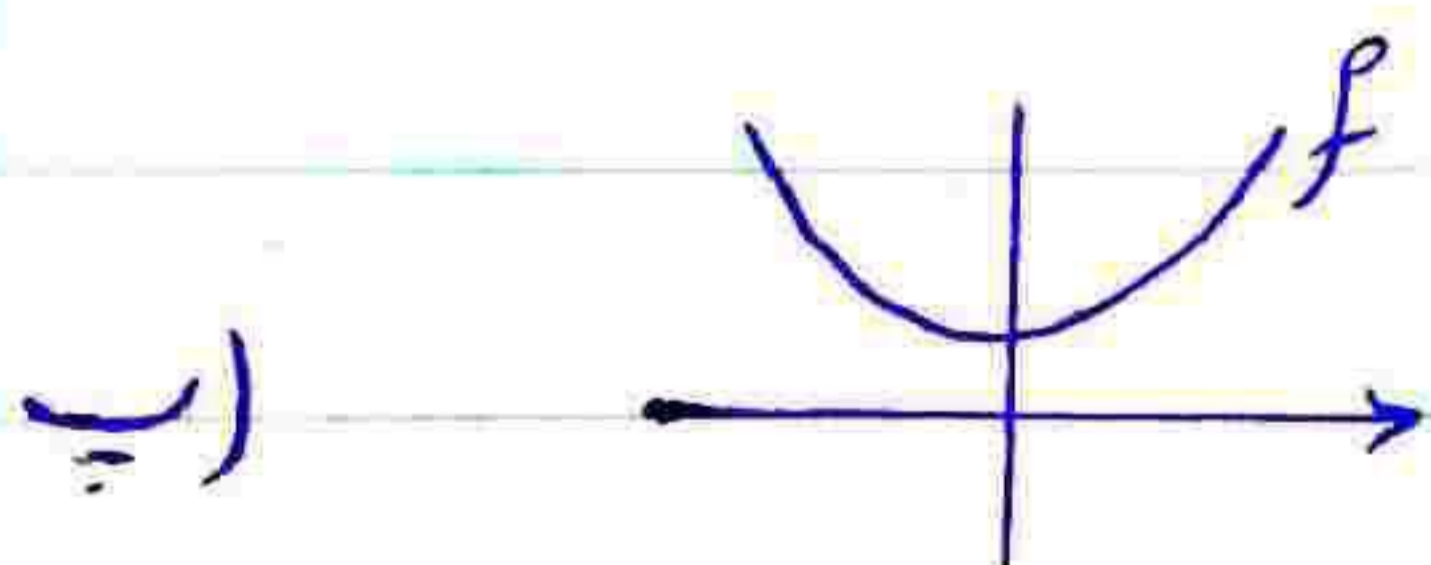
مثال: با توجه به نمودارها رسم شده، در مورد جواب معادله $f(x) = 0$ نظر دهید.



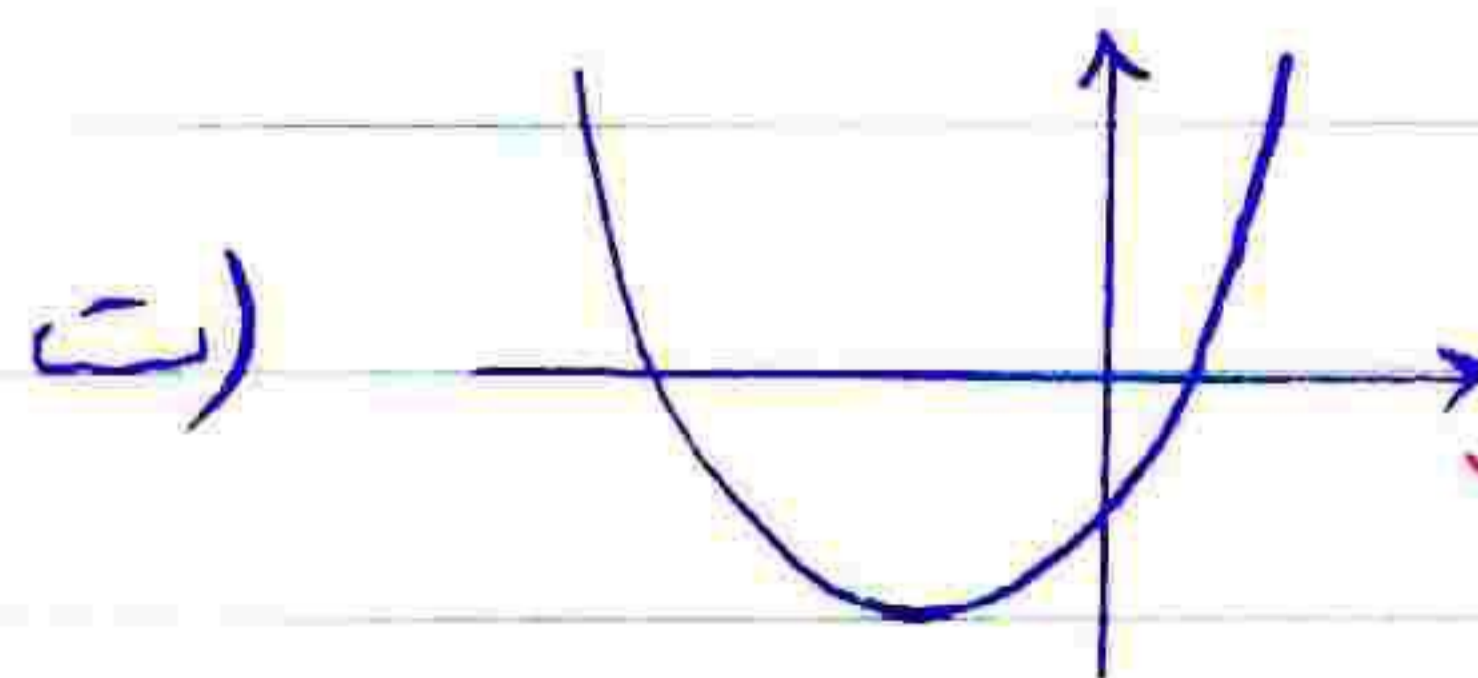
معادله $f(x) = 0$ دارای دو جواب مثبت است.



معادله دارای یک جواب مضاعف مثبت است.



معادله جواب حقیقی ندارد.



معادله دارای یک جواب مثبت و یک جواب منفی است که اندازه آن‌ها برابر است. جواب مثبت بیشتر از جواب منفی است.

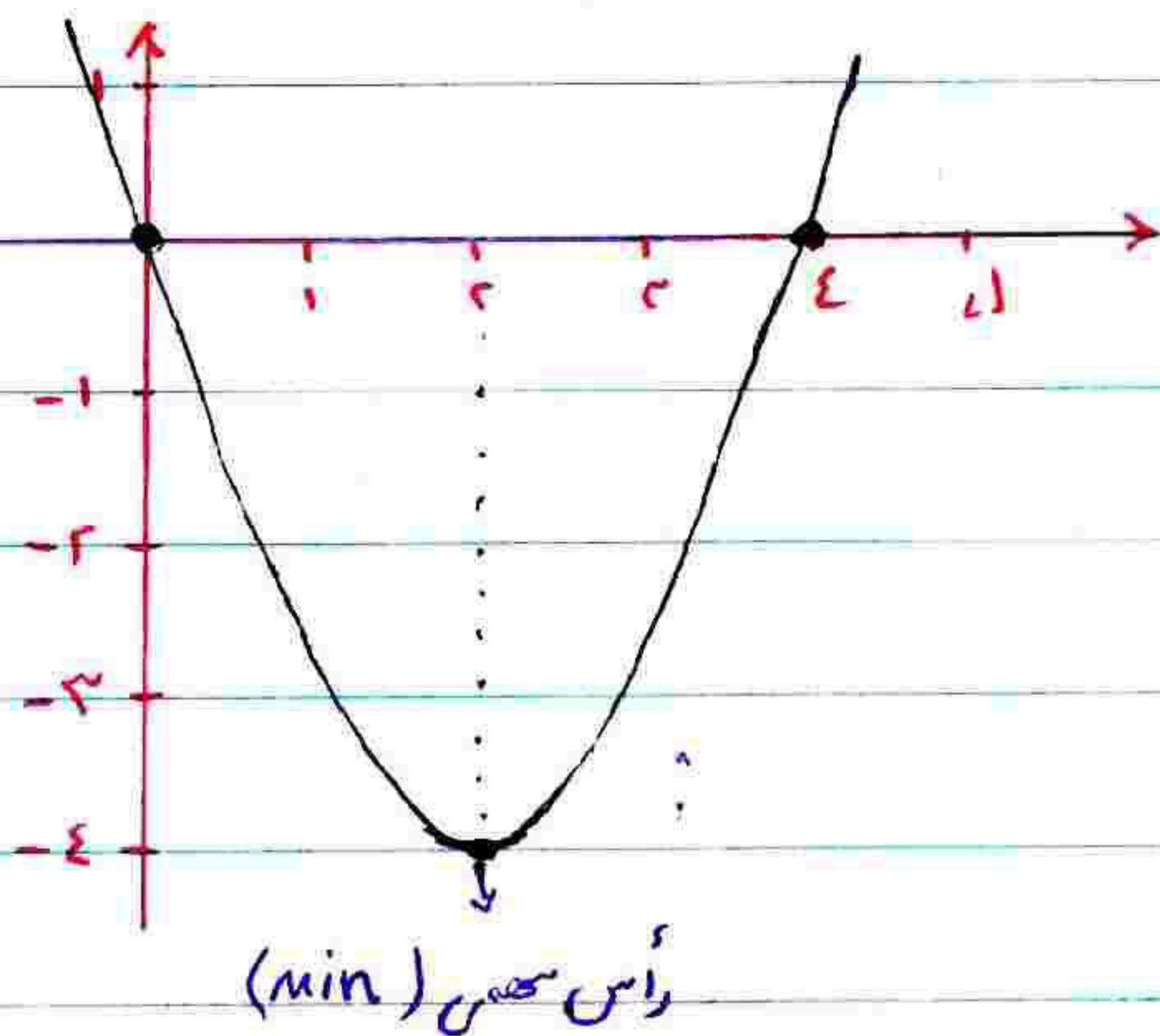
نکته (۴) : فرم کلی تابع درجه دوم (پهلو) به صورت $F(x) = ax^2 + bx + c$ می باشد
 برابر رسم آن جدول رو به دریا استفاده می کنیم:

x	$-\frac{b}{2a}$?
y	?	?

مسئله: $y = x^2 - 4x$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

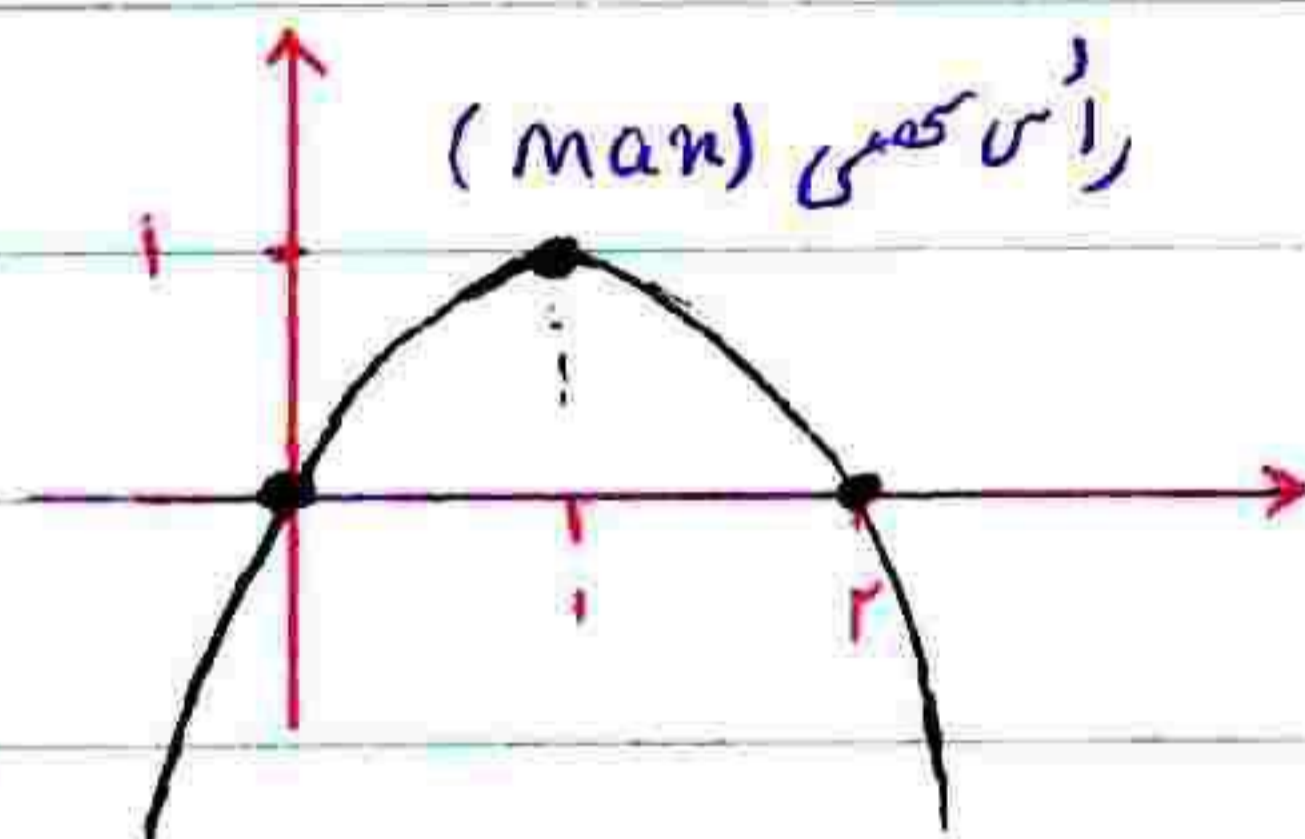
x	0	2	4
y	0	-4	0



مسئله: $y = 2x - x^2$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

x	0	1	2
y	0	1	0



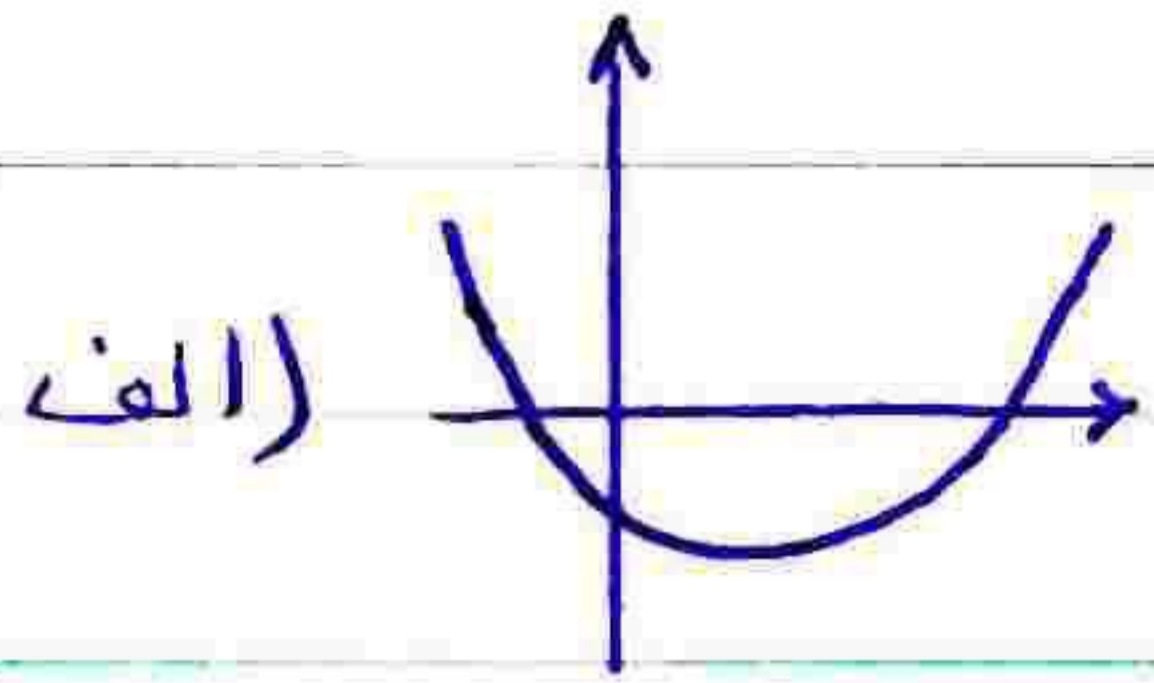
نکته (۵) : ① اگر $a > 0$ باشد پهلو به صورت \cup و اگر $a < 0$ باشد به صورت \cap است.
 ② جایی که پهلو با محور عرضها برخورد می کند نشانگر عدد C در تابع $y = ax^2 + bx + c$ است.

③ اگر رأس پهلو در سمت راست محور y ها باشد $\frac{-b}{2a} > 0$ است و اگر سمت چپ
 محور ها باشد $\frac{-b}{2a} < 0$ است.
 بهین است که اگر رأس در محور y ها باشد $b = 0$ است.

سؤال: در هر یک از شکلها زیر سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. در هر مورد علامت ضرایب a ، b ، c را تعیین کنید.

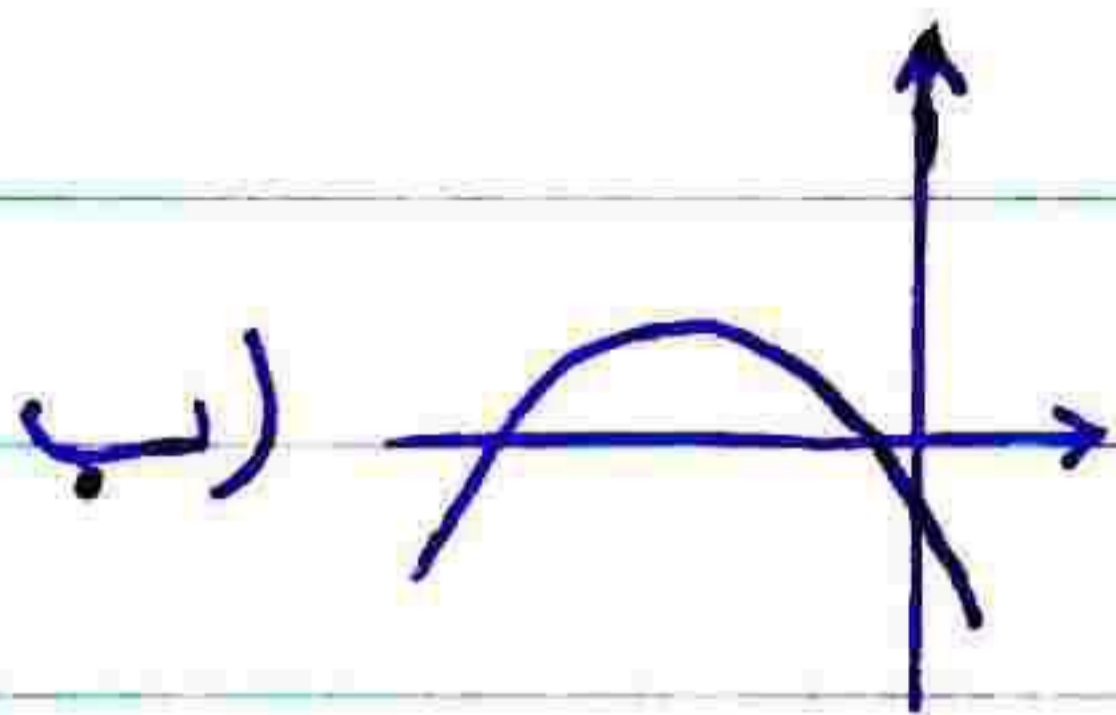
ملاسعدی @sinxcosx

 09168324500



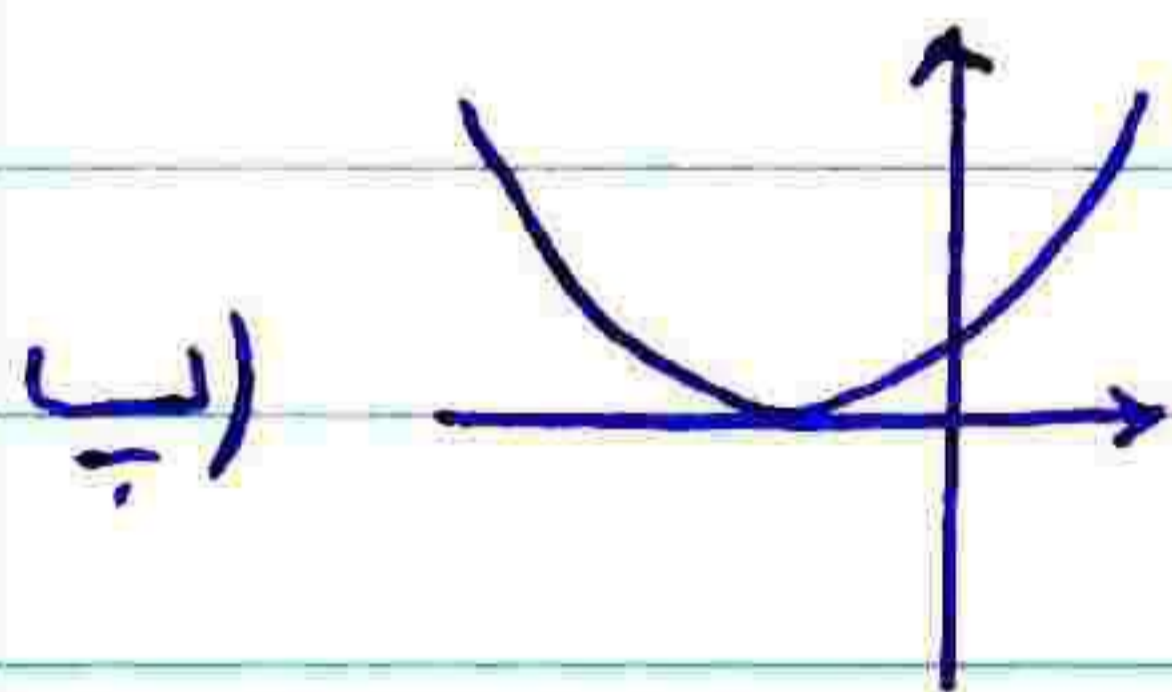
$$a > 0, \quad c < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \frac{-b}{2a} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$$



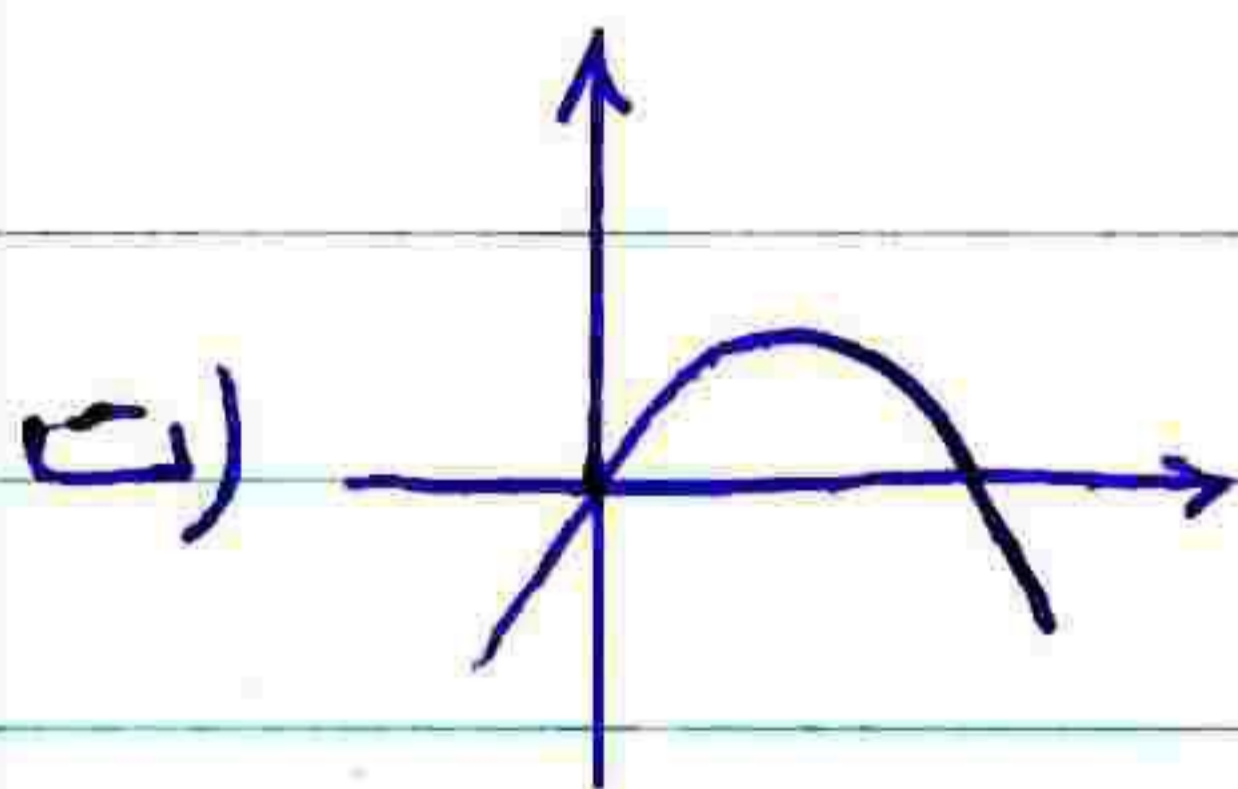
$$a < 0, \quad c < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \frac{-b}{2a} < 0 \end{array} \right\} \rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$$



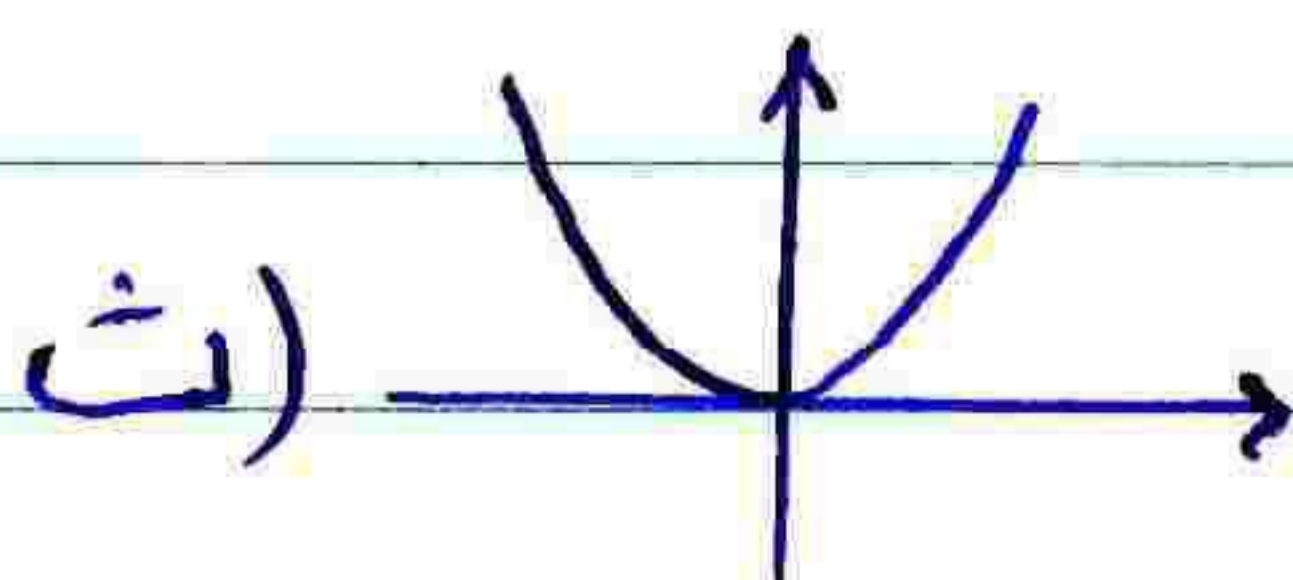
$$a > 0, \quad c > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \frac{-b}{2a} < 0 \end{array} \right\} \rightarrow -b < 0 \Rightarrow b > 0$$



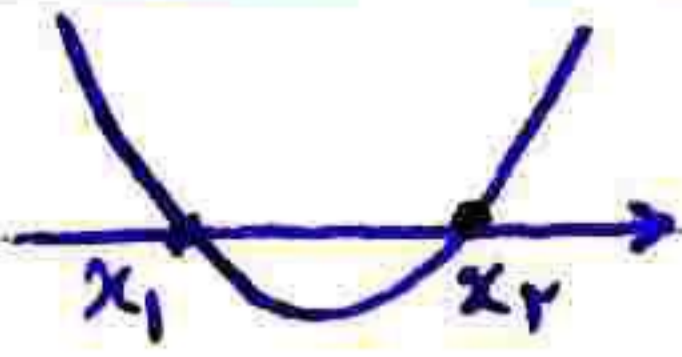
$$a < 0, \quad c = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \frac{-b}{2a} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow -b < 0 \Rightarrow b > 0$$



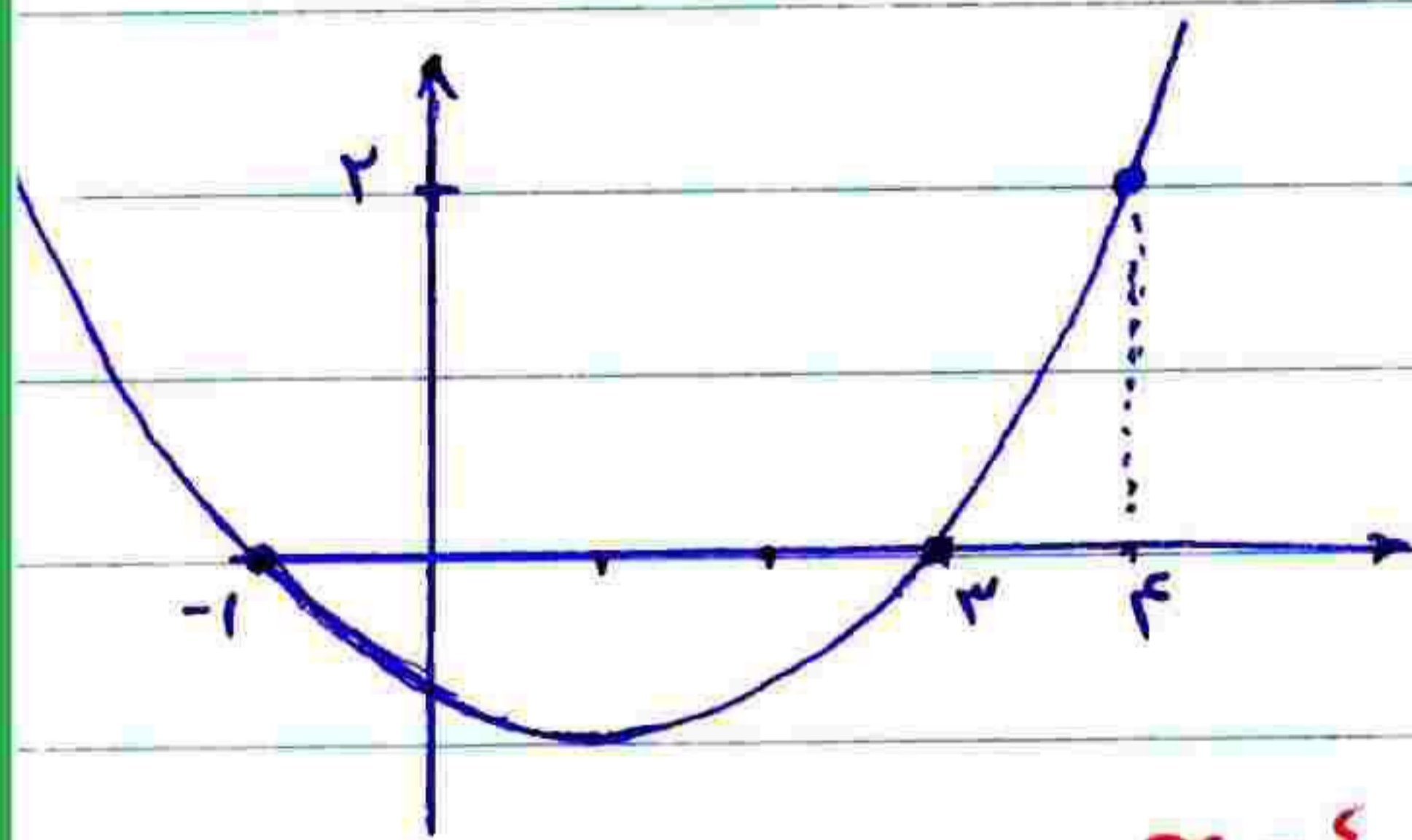
$$a > 0, \quad c = 0, \quad b = 0$$

نکته (۶): اگر تابع درجه دوم دارای جوابها x_1 و x_2 باشد



آنگاه معادله‌ی تابع به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

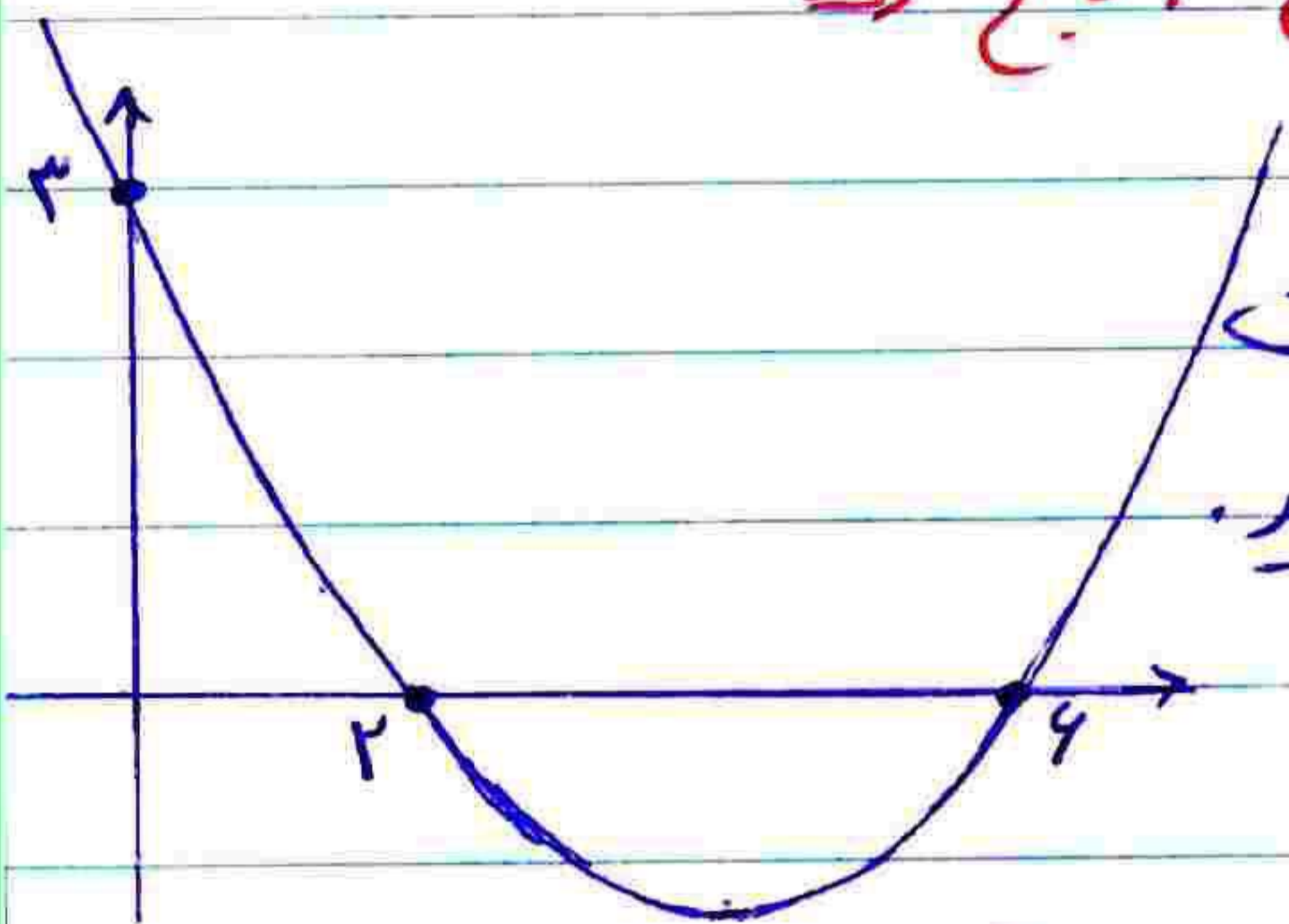
است. به با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان مقدار a را محاسبه کرد.



مسئله: با توجه به نمودار سهم f (شکل مقابل) تابع f را مشخص کنید.

$$y = a(x + 1)(x - 3) \xrightarrow[x=4]{y=2} 2 = a(4)(1) \Rightarrow a = \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow \text{تابع: } y = \frac{2}{4}(x + 1)(x - 3)$$



مسئله: اگر نمودار سهم $y = ax^2 + bx + c$ به صورت روبه بالا، حاصل $4a + b + c$ را بدست آورید.

$$y = a(x - 2)(x - 6) \xrightarrow[x=0]{y=3} 3 = a(-2)(-6) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{تابع: } y = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 6) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -4, c = 6 \Rightarrow 4a + b + c = 2 - 4 + 6 = 4$$

مثال: صفرها تابع زیر را در صورت وجود بیست آورید

الف) $f(x) = x^2 - 4x \rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

ب) $g(x) = 2x^2 + x + 3 \rightarrow x(2x^2 + x + 3) = 0$

با این فقط صفرا \rightarrow بیست
 $x = 0$
 $2x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = -23 \rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد

پ) $h(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$\rightarrow x^2(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$
 $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \rightarrow x = -3, x = 2$

مثال: اگر $x = 3$ یکی از صفهای تابع $f(x) = x^2 - kx^2 + 9x - 10k + 3$ باشد، مقدار k را بیست آورید.

$x = 3 \rightarrow f(x) = 27 - 9k + 27 - 10k + 3 = 0 \Rightarrow -19k = -47 \Rightarrow k = 3$

نکته (۷): اگر $x = \alpha$ یکی از صفهای تابع $f(x)$ باشد آنگاه با تقسیم $f(x)$ بر $x - \alpha$ صفرا تابع را به صورت ضرب دو پیرامتر نوشت و به کمک آن صفهای دیگر تابع را در صورت وجود بیست آورد.

مثال: اگر $x = 2$ یکی از صفهای تابع $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد، سایر صفها تابع را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ 2x^2 - 4x + 4 \\ \underline{-2x^2 + 4x - 4} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x^2 + x - 2)$
 $x = 2 \downarrow \quad x = 1, x = -2$

با این صفهای تابع عبارتند از $-2, 1, 2$.

مثال: مقدار k را چنان بیابید پس از صفهای تابع $F(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر ۲ باشد، پس صفهای دیگر تابع را بدست آورید.

$$x = -2 \quad F = 0 \rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

بنابراین $F(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ خواهد بود.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x + 2 \\ \hline -x^3 + 2x^2 & \\ \hline -x - 2 & \\ -x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow F(x) = (x+2)(x^2-1)$$

$$x = -2 \quad x = \pm 1$$

بنابراین صفهای تابع ۲، -۱ و ۱ می باشند.

ملاسعیدی @sinxcosx



09168324500

نکته (۸): گاهی مواقع می توان معادلات را با یک تغییر متغیر مناسب به

یها از انواع معادلاتی که می شناسیم تبدیل کرده و پس از حل آن و بازجوع

به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را بدست آورد.

مثال: صفهای تابع $F(x) = (x^2-1)^2 + (x^2-1) - 2$ را بدست آورید.

بیم $x^2 - 1 = t$ بگذاریم:

$$t^2 + t - 2 = 0 \rightarrow t = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$t = -2 \Rightarrow x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

بنابراین صفهای تابع $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می باشند.

مثال: صرفاً توابع زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = x^4 - 10x^2 + 14$$

بهریم $x^2 = t$ ، بنابراین:

$$t^2 - 10t + 14 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-8) = 0 \rightarrow t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\rightarrow t=8 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

پس $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$ صرفاً تابع هستند.

$$\text{ب) } g(x) = \left(\frac{x^2-d}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-d}{2}\right) - 2$$

بهریم $\frac{x^2-d}{2} = t$ ، بنابراین:

$$t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow t = -1 \Rightarrow \frac{x^2-d}{2} = -1 \Rightarrow x^2-d = -2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\rightarrow t = 2 \Rightarrow \frac{x^2-d}{2} = 2 \Rightarrow x^2-d = 4 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

پس $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$ صرفاً تابع هستند.

$$\text{پ) } h(x) = x - \sqrt{x} - 4$$

بهریم $\sqrt{x} = t$ ، بنابراین:

$$t^2 - t - 4 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0$$

$$\rightarrow t=3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

$$\rightarrow t=-1 \Rightarrow \sqrt{x} = -1 \text{ غیر ممکن}$$

پس 9 صرفاً تابع است.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید

الف) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

ب) $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$

پ) $(4 - x^2)^2 - (4 - x^2) - 12 = 0$

ت) $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$

الف) $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 = -1$ غیر ممکن
 $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ جواب

ب) $\frac{x^2}{3} - 2 = t \Rightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \rightarrow t = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
 $t = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm \sqrt{24}$

پ) $4 - x^2 = t \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 3) = 0$
 $t = 4 \Rightarrow 4 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
 $t = -3 \Rightarrow 4 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7}$

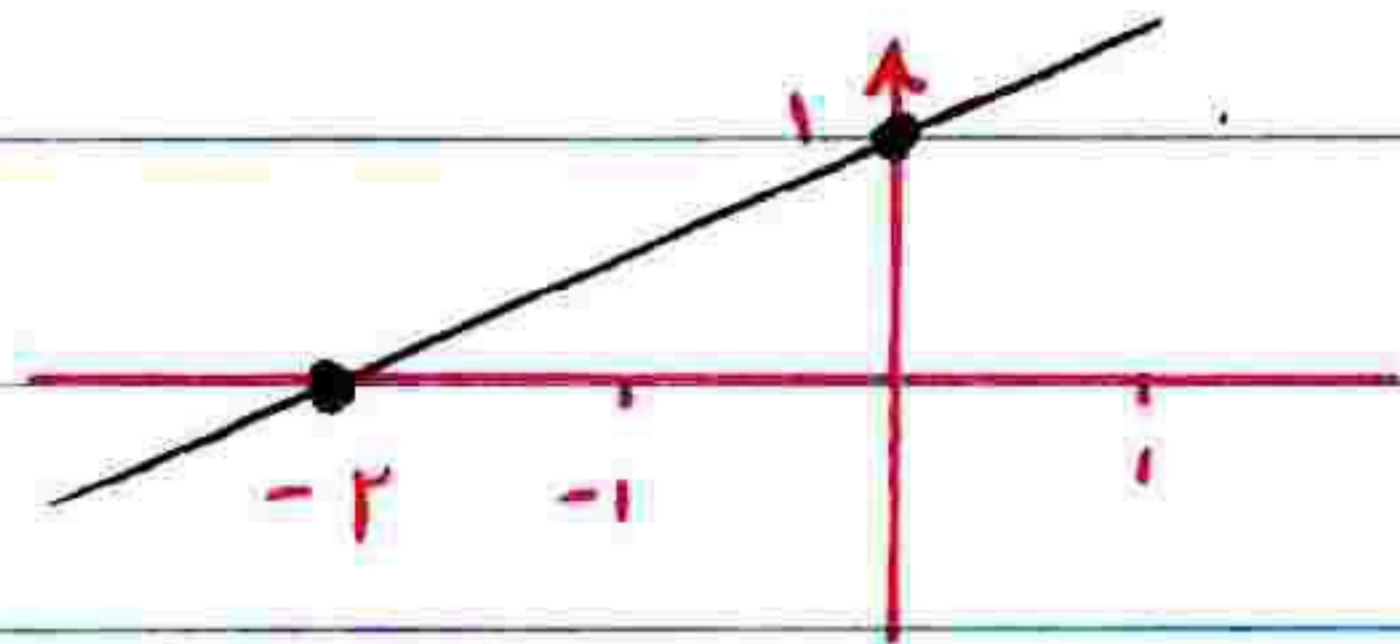
ت) $x^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$ حقیقی جواب ندارد

یادآوری:

الف) رسم خط: به x دو مقدار دکواه، بخصوص $x=0$ ، داده و y را حساب کرده تا در نقطه مشخص شود. پس نمودار را رسم میکنیم.

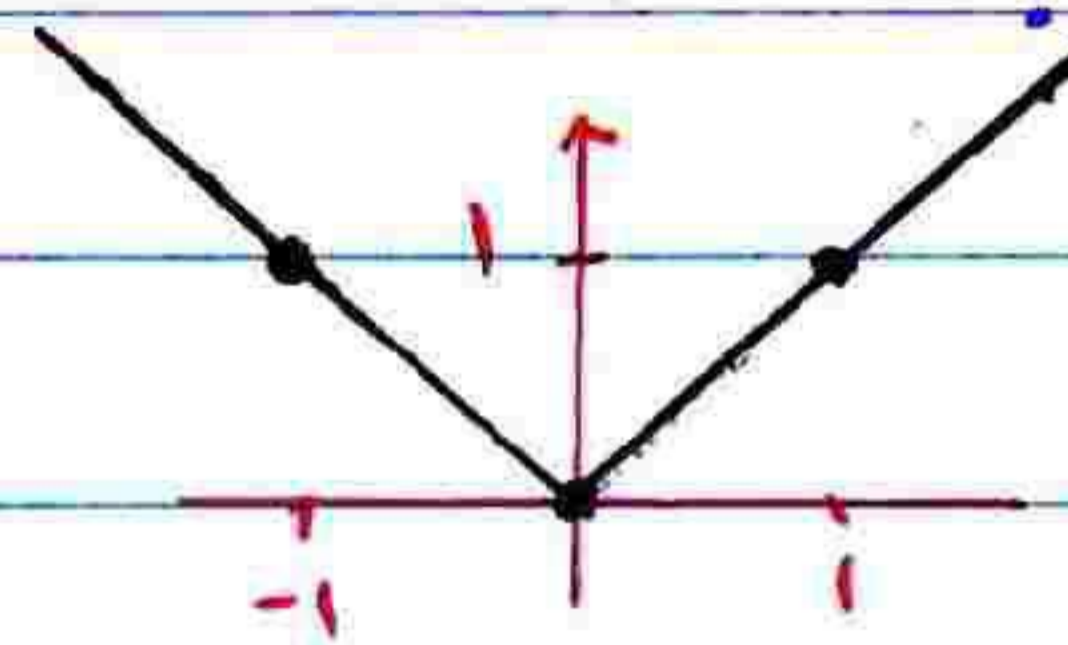
مثال: $y = \frac{1}{2}x + 1$

x	0	-2
y	1	0



ب) رسم تابع قدر مطلق:
 جدول:

عدد	?
ریشه درون قدر مطلق	?
تبدیل x	?

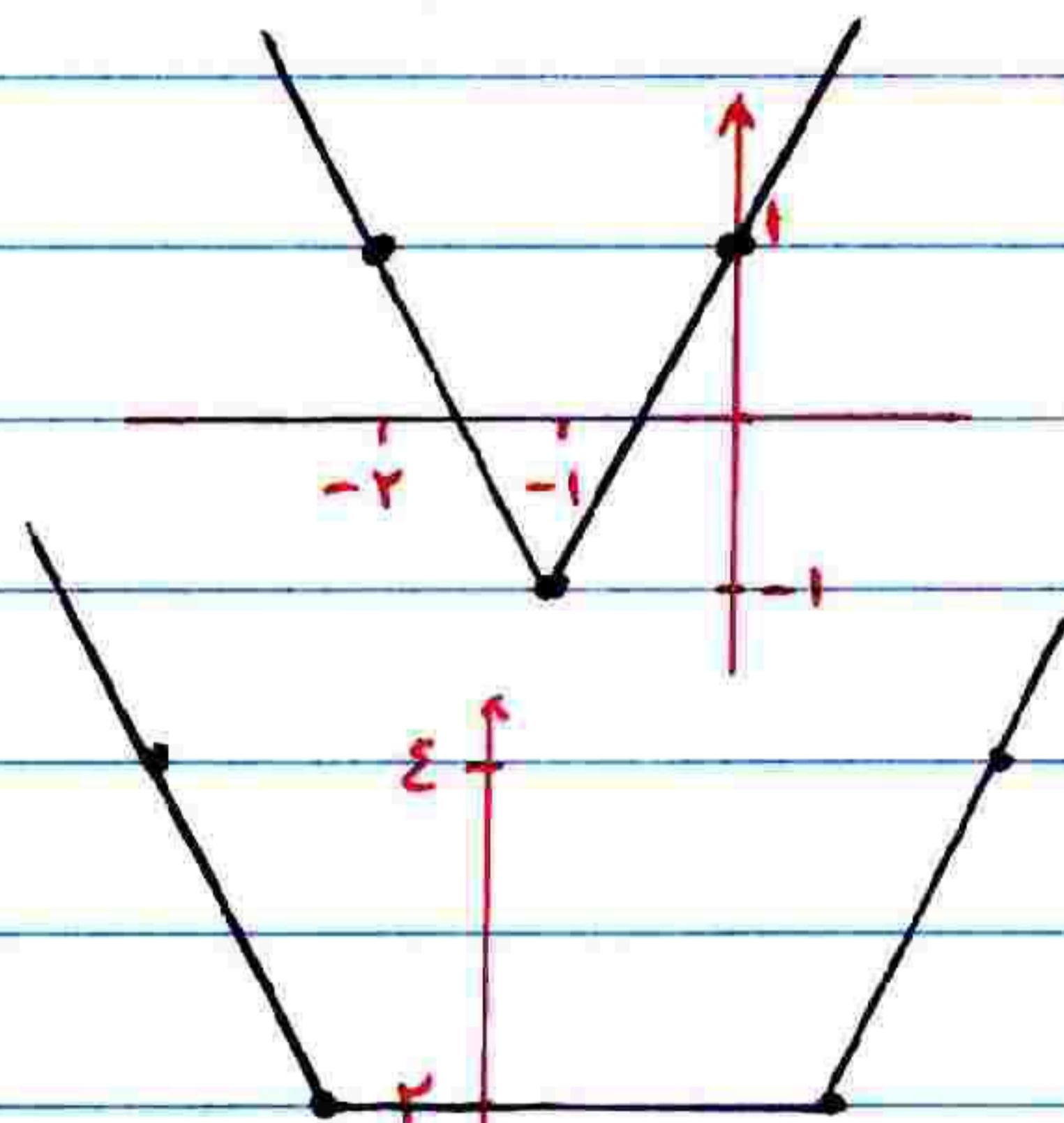


مثال: $y = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

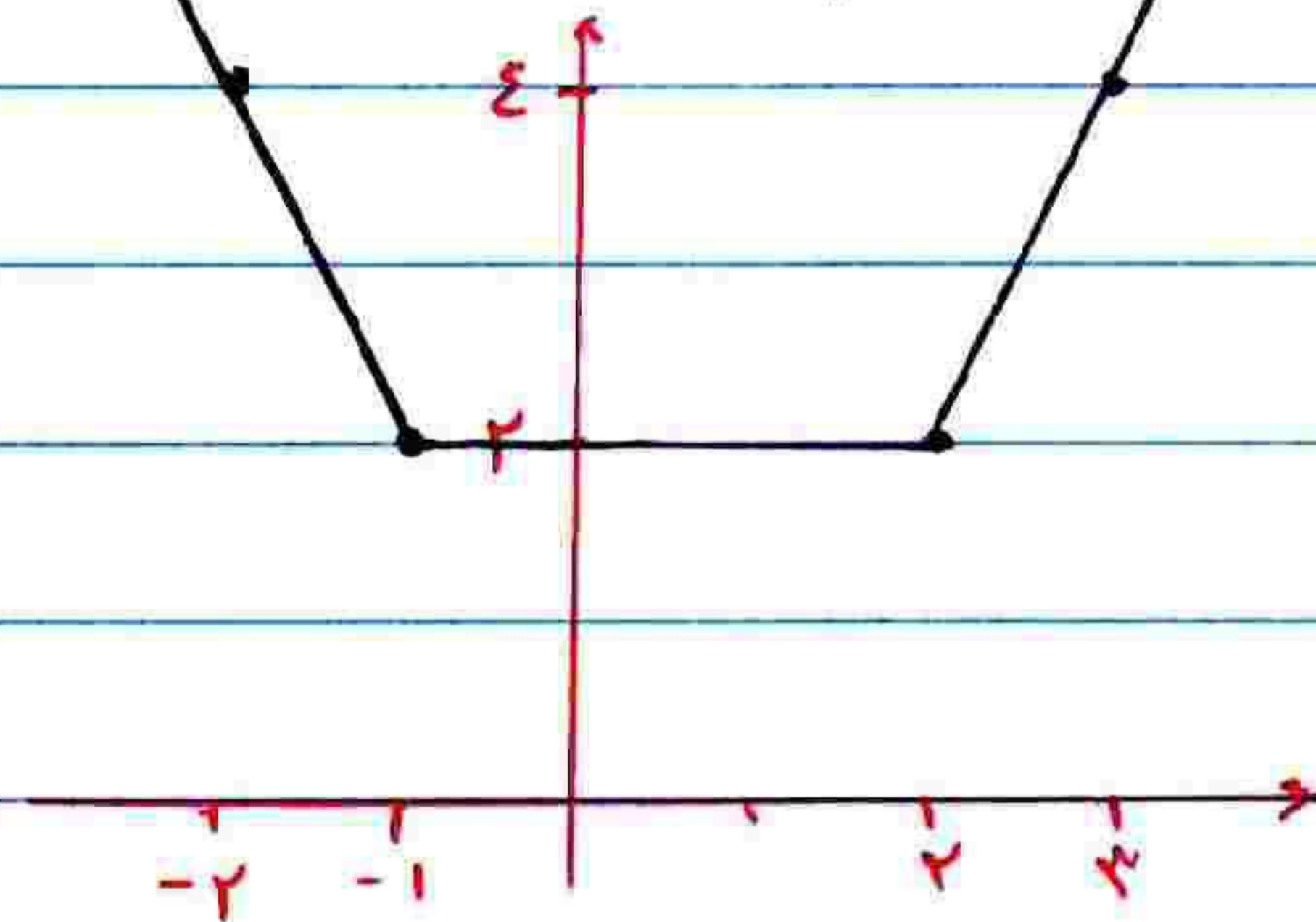
مثال: $y = 2|x+1| - 1$

x	-2	-1	0
y	1	-1	1



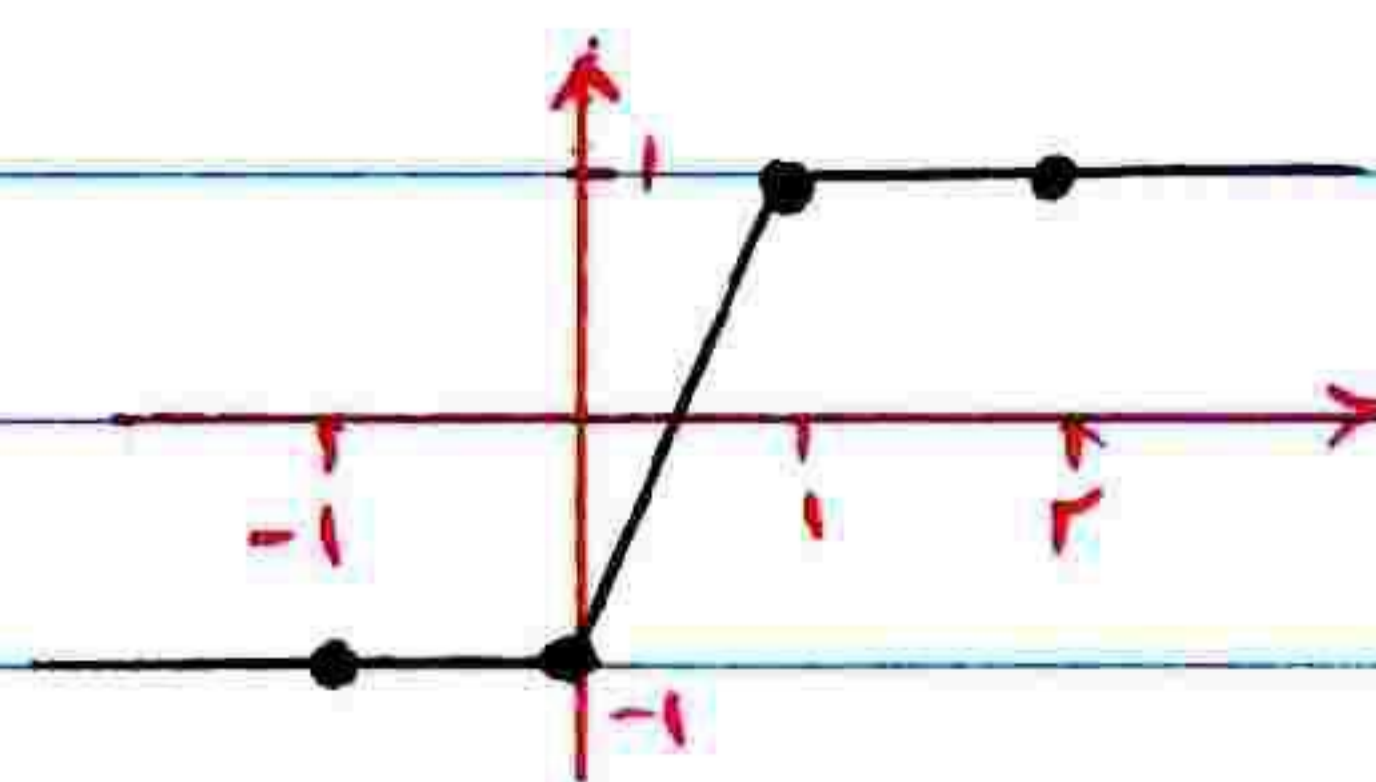
مثال: $y = |x-2| + |x+1| - 1$

x	-2	-1	2	3
y	4	2	2	4



مثال: $y = |x| - |x-1|$

x	-1	0	1	2
y	-1	-1	1	1



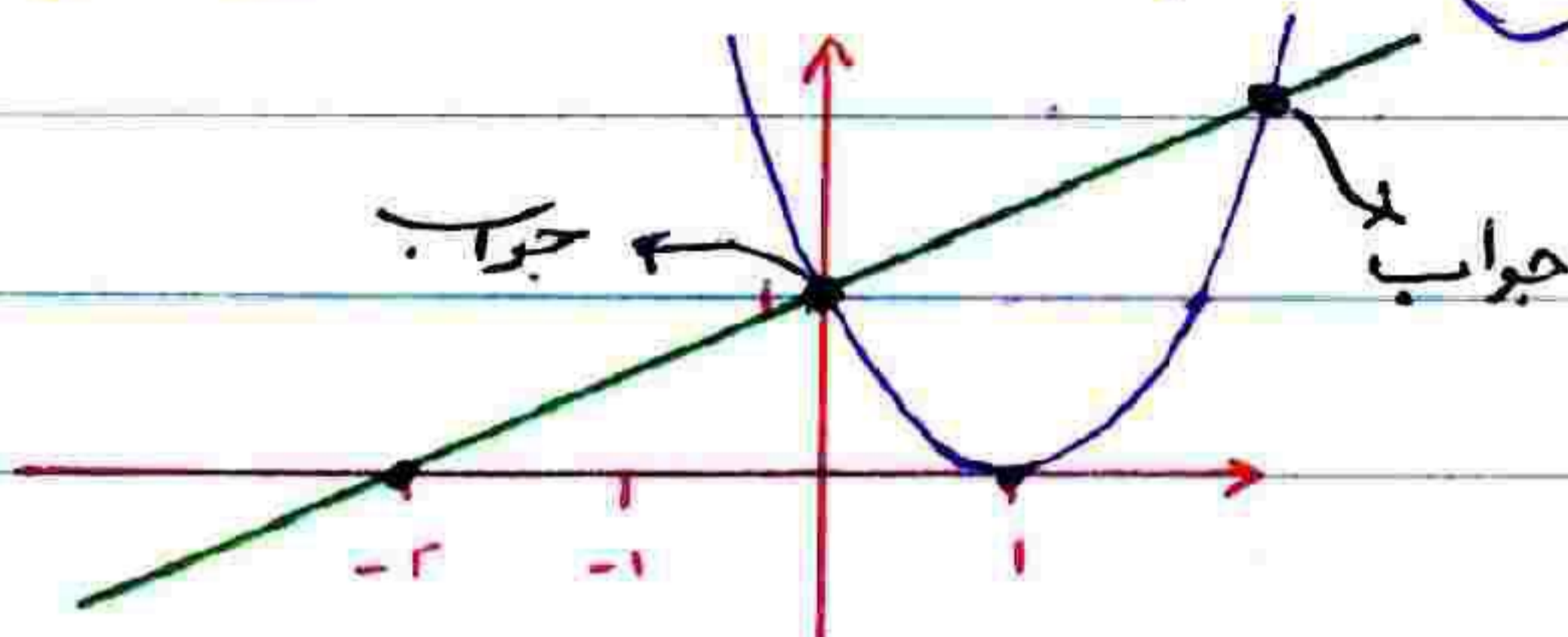
نکته (9) : روش هندسی حل معادلات

برای حل معادله‌ها به صورت $f(x) = g(x)$ باید نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم کرد. نقطه برخورد دو نمودار، جواب معادله است.

مثال: معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$ را به روش هندسی حل کنید

$$y = (x-1)^2$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$



معادله دارای دو جواب است به این معنی $x=0$ و دیگر عددی مثبت است.

ملاسعیدی @sinxcosx

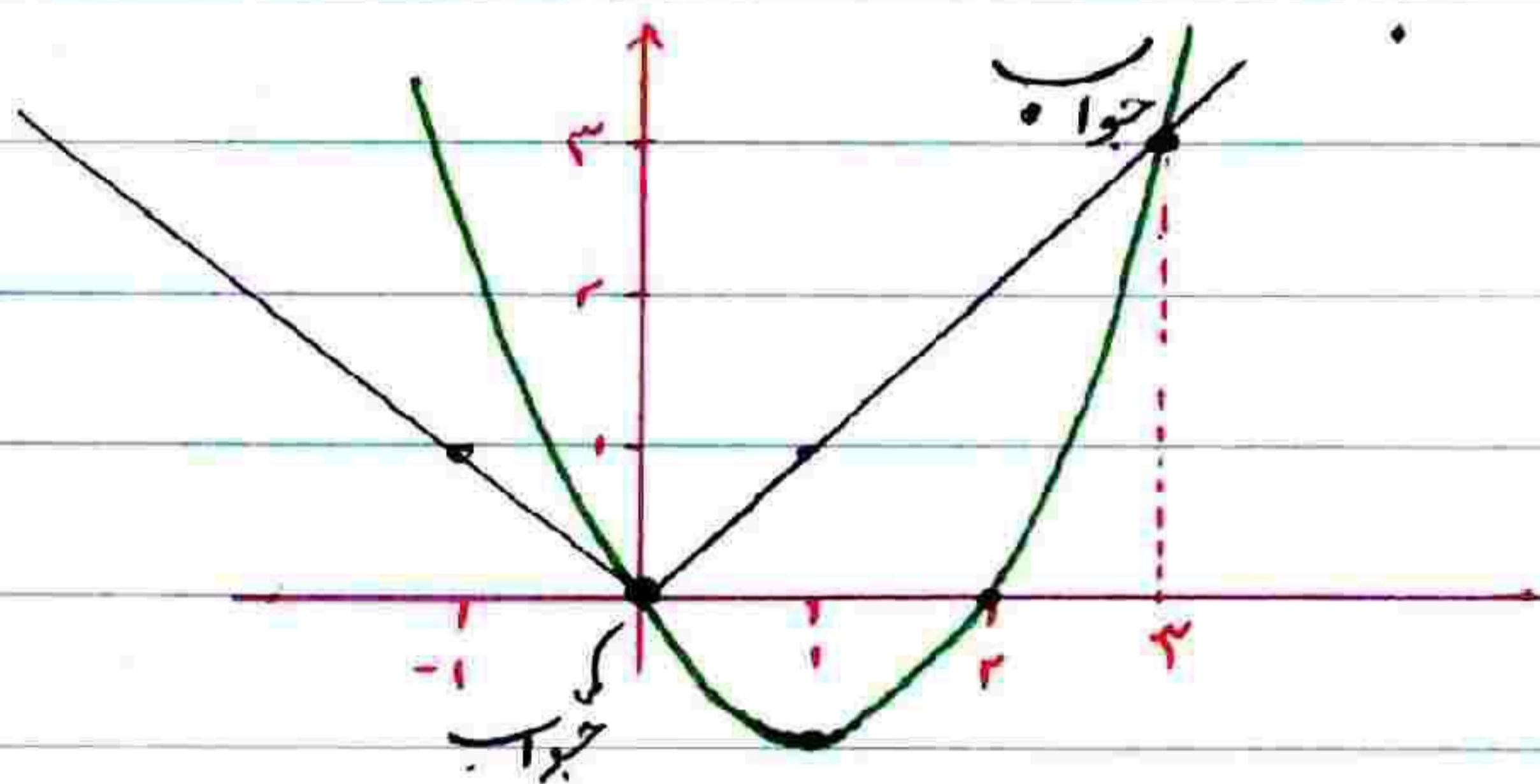
09168324500

مثال: به روش هندسی معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

$$y = |x| \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$y = x^2 - 2x \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

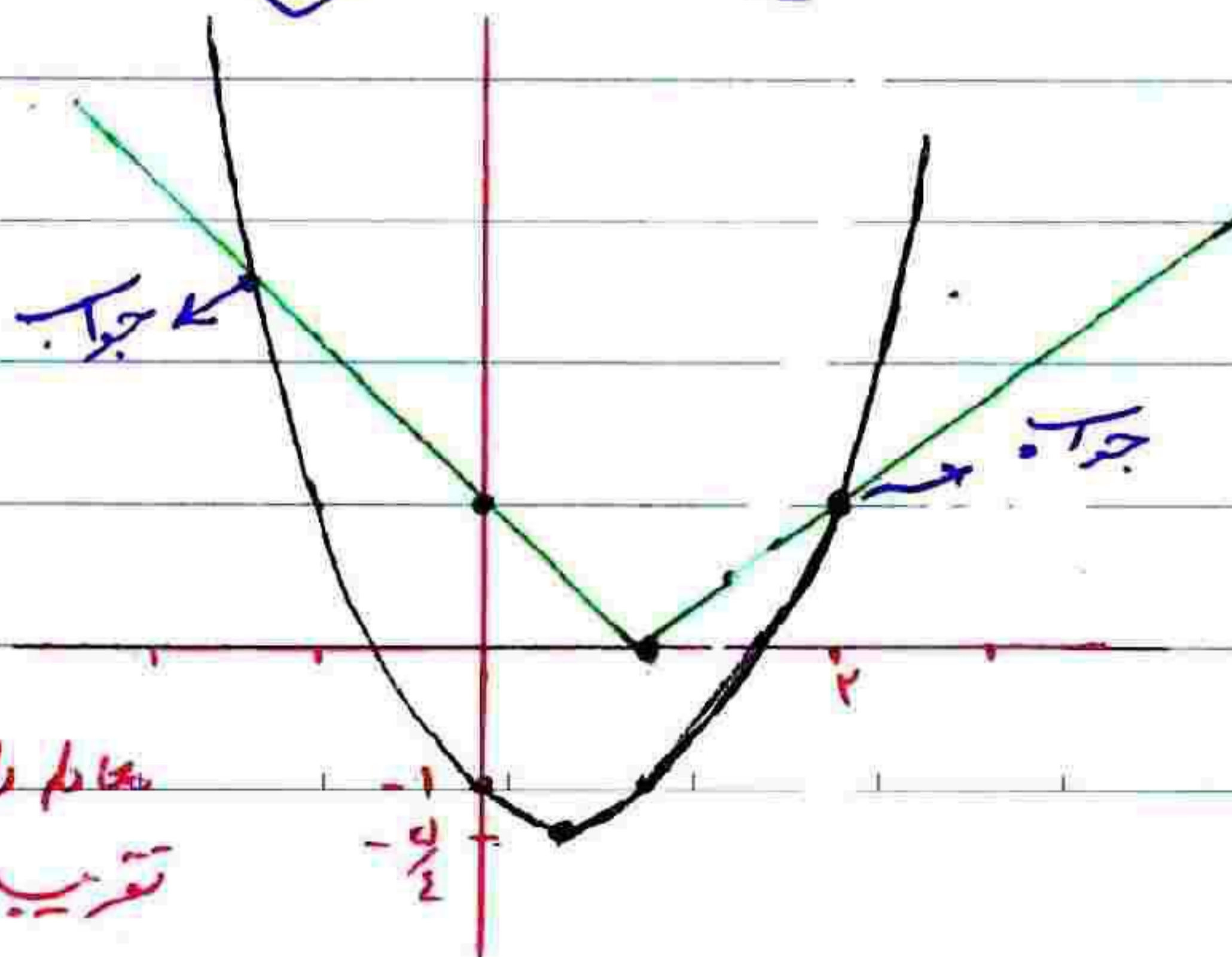


معادله دارای دو جواب $x=0$ و $x=2$ است.

مثال: تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی بیابید.

$$y = x^2 - x - 1 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1 \end{array}$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$$

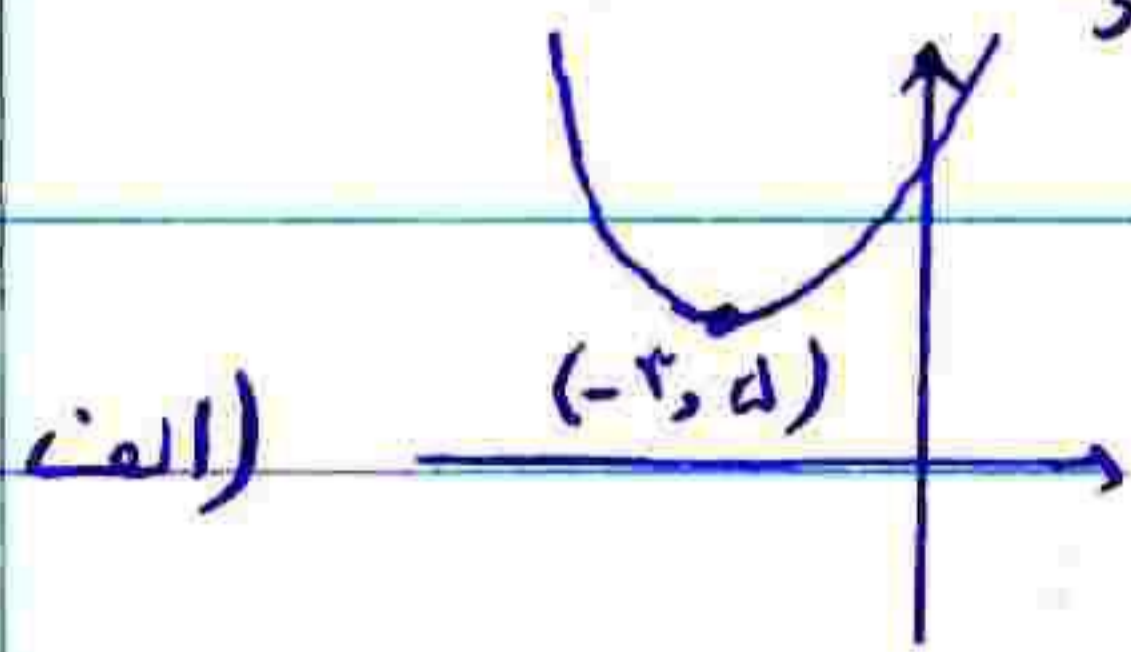


$$y = |x-1| \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

معادله دارای دو جواب مختلف علامت است که به طور تقریبی جوابها 0 و 2 می‌باشند

* سوالات پایانی *

۱- حرکت از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. ضرایب تابع را در صورت وجود بدست آورید و ضرایب تابع را مشخص کنید.

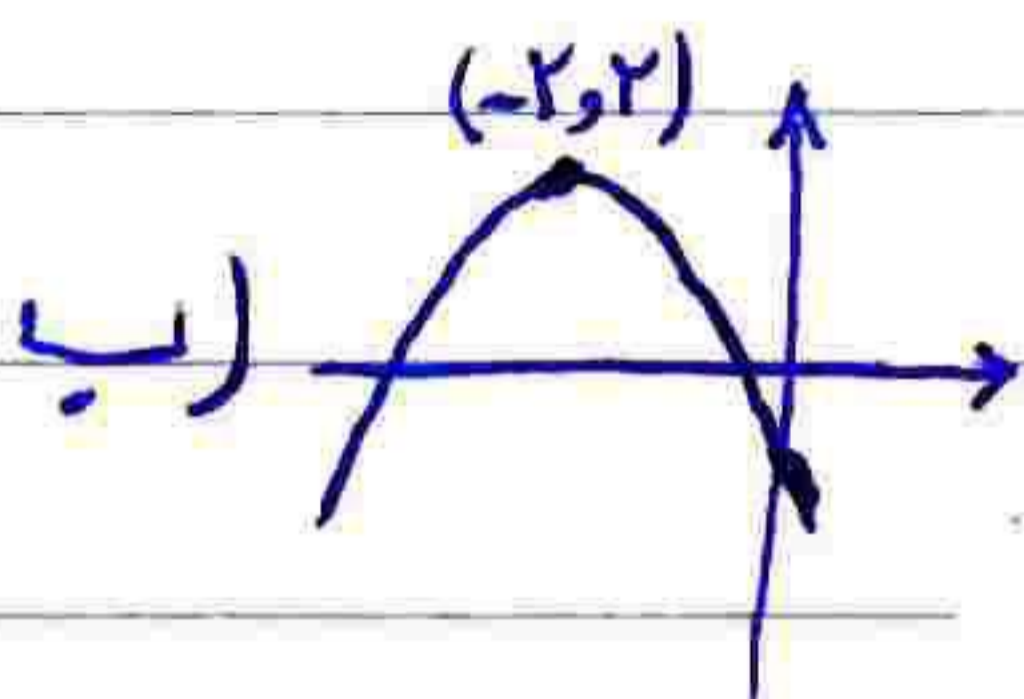


$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{a=1} y = x^2 + bx + c$$

$$x = -\frac{b}{2} = -2 \Rightarrow b = 4 \rightarrow y = x^2 + 4x + c$$

$$\begin{matrix} x = -2 \\ y = d \end{matrix} \rightarrow d = 9 - 8 + c \Rightarrow c = 14 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 14$$

چون سهمی با محور x ها برخورد ندارد پس تابع همواره دارد.



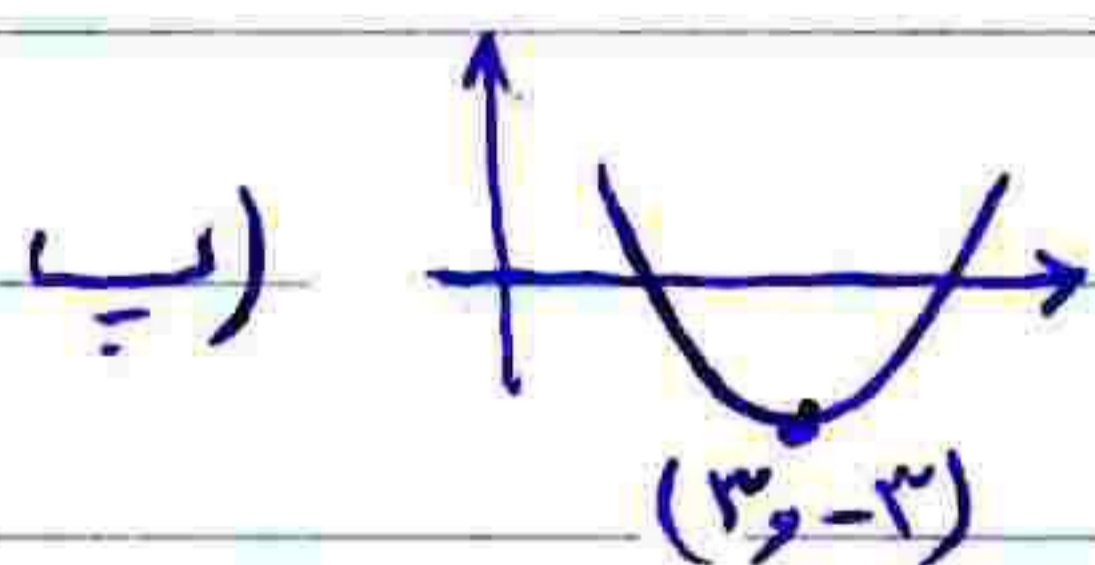
$$a = -1 \rightarrow y = -x^2 + bx + c$$

$$-\frac{b}{-2} = -2 \Rightarrow b = -4 \rightarrow y = -x^2 - 4x + c$$

$$\begin{matrix} x = -2 \\ y = 2 \end{matrix} \rightarrow 2 = -4 + 8 + c \Rightarrow c = -2 \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 2$$

دو عدد مثبت ضرایب تابع هستند آنها را با علامت منسوخ کنیم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{4 \pm 4}{-2} = -2 \pm 2$$



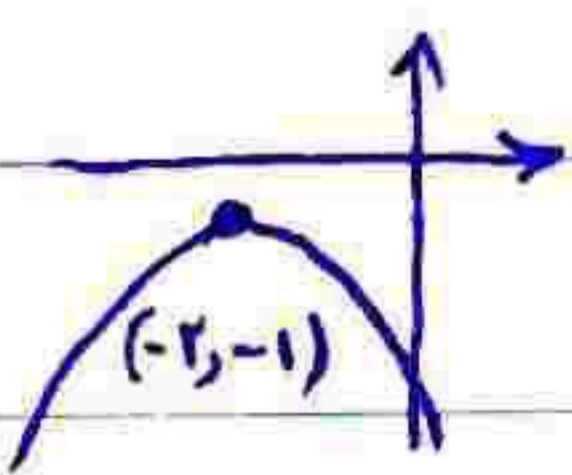
$$a = 1 \rightarrow y = x^2 + bx + c$$

$$-\frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = -6 \rightarrow y = x^2 - 6x + c$$

$$\begin{matrix} x = 3 \\ y = -3 \end{matrix} \rightarrow -3 = 9 - 18 + c \rightarrow c = 6 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 6$$

دو عدد مثبت صفرها تابع هستند، آنرا محاسبه میکنیم:

$$\Delta = 12 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

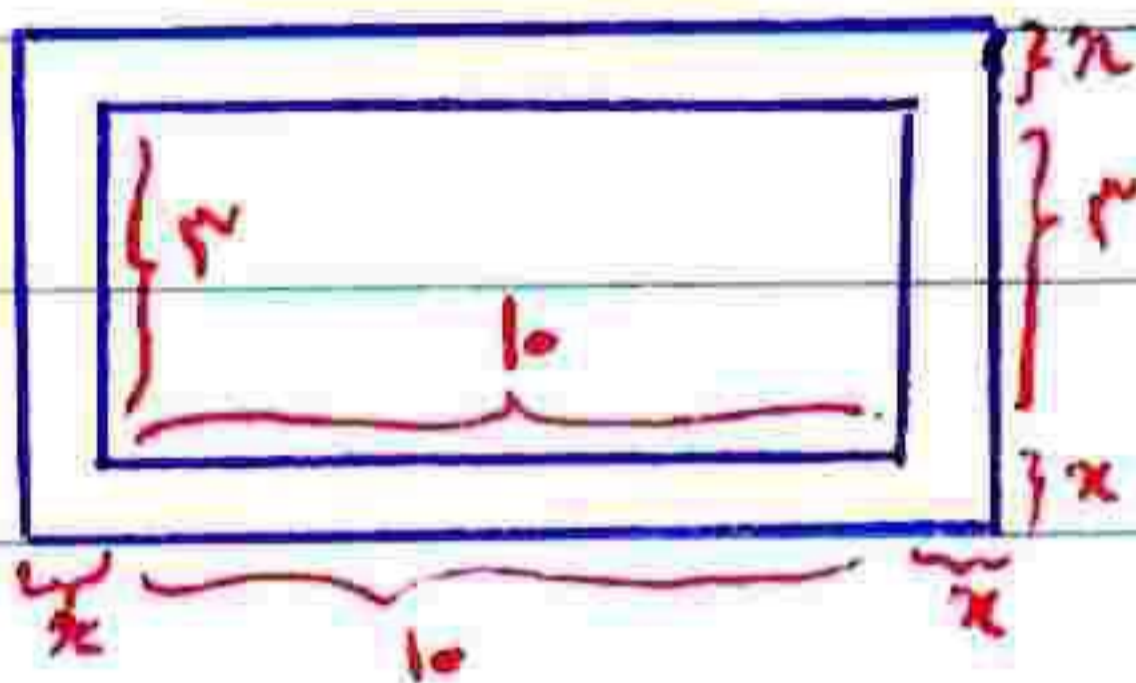
ب)  $a = -1 \rightarrow y = -x^2 + bx + c$

$$\frac{-b}{2(-1)} = -2 \Rightarrow b = 4 \rightarrow y = -x^2 - 4x + c$$

$x = -2 \rightarrow -1 = -4 + 8 + c \Rightarrow c = -4 \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 4$

چون مختصات محور طولها بر محور دندارد پس تابع فاقد منفرات است.

۲- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که آب آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد پهنای آن را محاسبه کنید.



ملا سعیدی @sinxcosx
09168324500

مساحت آبراه + مساحت مستطیل کوچک = مساحت مستطیل بزرگ

$$(2x+10)(2x+3) = 3 \times 10 + 14 \Rightarrow 4x^2 + 26x + 30 = 44$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 26x - 14 = 0 \div 2 \rightarrow 2x^2 + 13x - 7 = 0 \rightarrow (x+7)(2x-1) = 0$$

غیرقابل قبول $x = -7$

پهنای آبراه $\frac{1}{2}$ متر است $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

۳- طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۱۲,۸ متر مربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی متر است؟

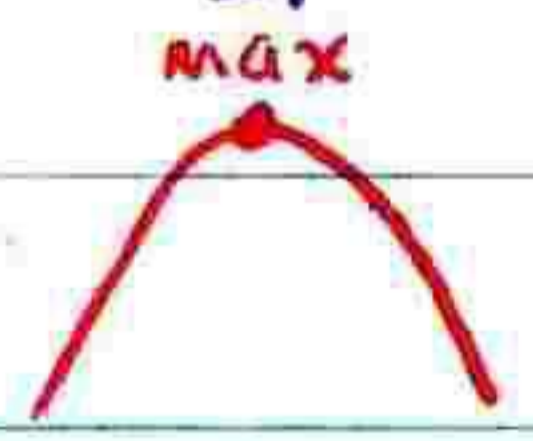
طول = $4x + 1$
 مساحت هر کاشی = $x(4x + 1) = 4x^2 + x$
 مساحت کل = $\frac{4x^2 + x}{1000} = 12,8$

$4x^2 + x = 12800 \Rightarrow 4x^2 + x - 12800 = 0 \Rightarrow \Delta = 4225 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 65}{8}$

غیرقابل قبول $x = \frac{-66}{8}$

$x = \frac{64}{8} = 8 \Rightarrow$ عرض کاشی = ۸ و طول کاشی = ۳۲

۴- یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می شود. ارتفاع موشک (h) در زمان t، از رابطه $h(t) = -16t^2 + 144t$ پیروی می کند. ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمان را که موشک به زمین برخورد می کند را بیابید.



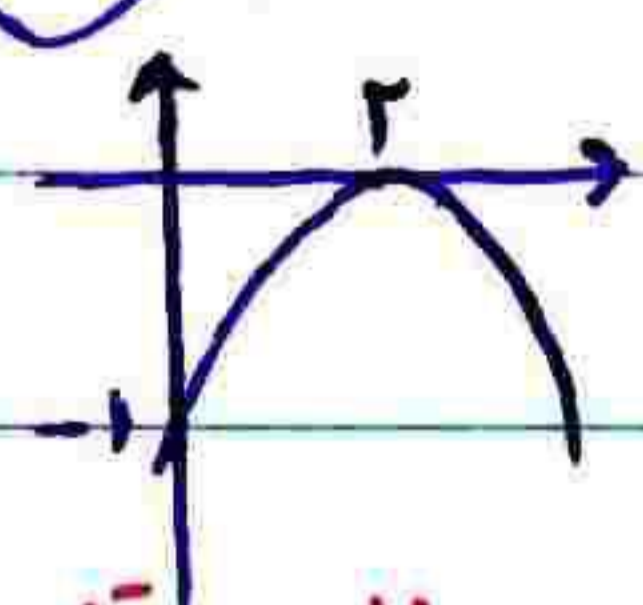
زمان رسیدن به نقطه راج $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-144}{2(-16)} = 9$

ملا سعیدی @sinxcosx
 09168324500

ارتفاع ماکزیمم: $h(9) = -16 \times \frac{81}{4} + 144 \times \frac{9}{2} = 324$

ذرات $t = 0$
 $-16t^2 + 144t = 0 \Rightarrow$ هنگام برخورد به زمین ارتفاع صفر است
 جواب $t = \frac{144}{16} = 9$

۵- در شکل درجه دوم نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. سهمی تابع را به همراه ضابطه آن تعیین کنید. $x = 2$ سهمی تابع است.



$\frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$ و $c = -1$

تابع: $y = ax^2 - 4ax - 1$ $(2, 0) \rightarrow 0 = 4a - 8a - 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{4} \rightarrow b = 1$

\Rightarrow تابع: $y = \frac{-1}{4}x^2 + x - 1$