



بندر سیراف، شهر باستانی استان بوشهر یکی از مکان‌های تاریخی و از نقاط دیدنی ایران است که زمانی دارای رونق چشمگیری بوده و در آن زمان با سیصد هزار نفر جمعیت، روابط تجاری زیادی با روم و یونان (در اروپا) و ماداگاسکار (در آفریقا)، هند و چین (در آسیا) داشته است. با این همه زمین لرزه شدیدی در قرن چهارم هجری قمری ویران شدن کامل این بندر را در پی داشت.

آشنایی با برخی از انواع توابع

وارون یک تابع و تابع یک به یک

اعمال جبری روی توابع

درس اول

درس دوم

درس سوم

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)



## درس اول

## آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید دامنه تابع و ضابطه آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطه تابعی داده شده باشد، اما دامنه آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

## توابع گویا

## فعالیت

حسین در پایه یازدهم درس می‌خواند. او در روستای کوچکی زندگی می‌کند که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پرتردد ایران قرار دارد. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که به دلیل کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم این روستا درآمد کافی ندارند. حسین تصمیم گرفت این وضع را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب، بخشی از افرادی که قصد گردشگری دارند و معمولاً از جاده اصلی کنار روستا می‌گذرند را به روستای خود جلب کند. او با خود فکر کرد این گردشگران بابت پذیرایی محلی و تجربه خوشایند یک زندگی روستایی، هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب چرخه اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.

پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع کار به حدوداً ده میلیون تومان نیاز دارد که البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین تصمیم گرفت ابتکار خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند با سرمایه‌گذاری به نسبت مساوی در راه‌اندازی این کار اقتصادی سهیم شوند.

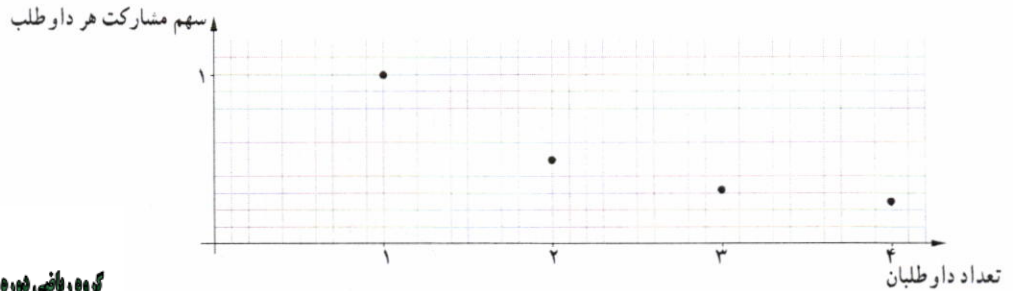
الف) اگر حسین تنها شخص شرکت‌کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست  $\frac{1}{1}$  از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید  $\frac{1}{2}$  از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند،  $n$  نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟  $\frac{1}{n}$

پ) رابطه بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطه این تابع چیست؟  $f(x) = \frac{1}{x}$   $x \in \mathbb{N}$

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینه مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟  
 «با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش  افزایش  می‌یابد».



تپه‌کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن دلمان ریاضی، استان خوزستان

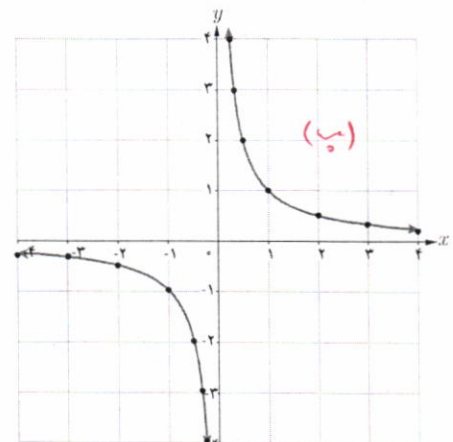
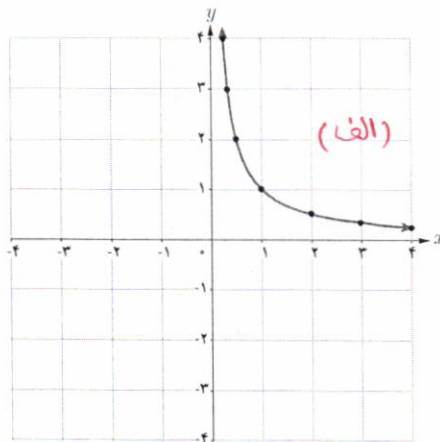
khuzmath1394@chmail.ir

فعالیت

در نمودارهای زیر تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  با دو دامنه متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف)  $D_f = (0, +\infty)$

ب)  $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$



### خواندنی

هزینه پاک‌سازی  $x$  درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطه  $p(x) = \frac{255x}{100-x}$  محاسبه می‌شود که در آن  $x$  درصد آلودگی و  $p(x)$  هزینه پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟

ب) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

$x$	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$					

هر تابع به شکل  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن  $P(x)$ ،  $Q(x)$  چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای  $Q(x)$  صفر نیست.

تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  و همچنین توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-10}$$

$$f(x) = \sqrt{5x}$$

$$f(x) = 2$$



## کار در کلاس

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همه پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همه پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطه تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x) = x + \sqrt{V} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{V+x}} \quad f(x) = \frac{V+x}{10+x} \quad \checkmark$$

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟ **بله، یک تابع گویا است.**

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$$f(x) = \frac{10}{100} \rightarrow \frac{V+x}{10+x} = \frac{80}{100} \rightarrow \frac{V+x}{10+x} = \frac{4}{5} \rightarrow 5(V+x) = 4(10+x) \rightarrow 5V + 5x = 40 + 4x \rightarrow x = 5$$

## دامنه توابع گویا

از سال‌های گذشته می‌دانیم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد؛ بنابراین عدد صفر در دامنه تابع با ضابطه  $y = \frac{1}{x}$  نیست. به طور کلی اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطه یک تابع گویا را صفر کنند، عضو دامنه آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنه تابع گویای با ضابطه

$$f(x) = \frac{5}{x-2} \quad \text{برای } \mathbb{R} - \{2\} \text{ است.}$$

## کار در کلاس

دامنه هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x+5} \quad D_f = \mathbb{R} - \{-5\} \quad g(x) = \frac{3}{x-4} \quad D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

## تساوی دو تابع

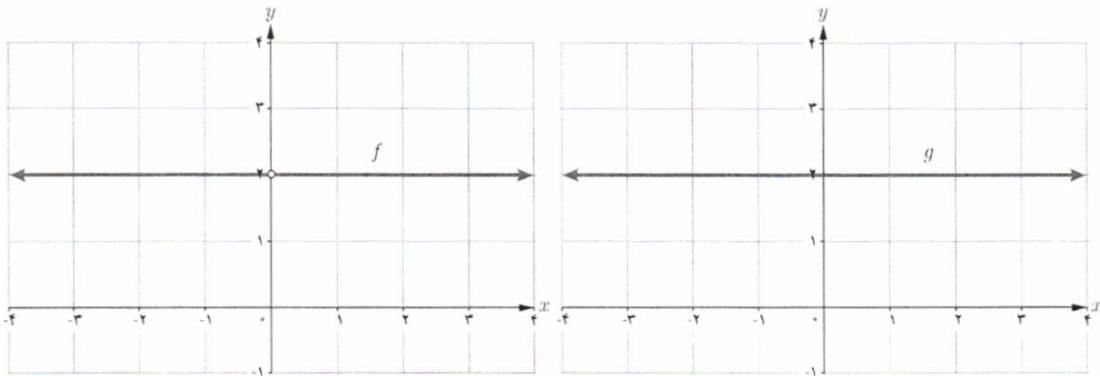
دو تابع  $f$  و  $g$  را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه  $f$  و دامنه  $g$  با هم برابر باشند.

ب) برای هر  $x$  از این دامنه یکسان داشته باشیم:  $f(x) = g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

به نمودار دو تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2x}{x}$  و  $g(x) = 2$  دقت کنید.



می بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطه دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن  $x$ ، ضابطه های دو تابع برابر می شوند ولی دامنه ولی متفاوت اند، زیرا داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

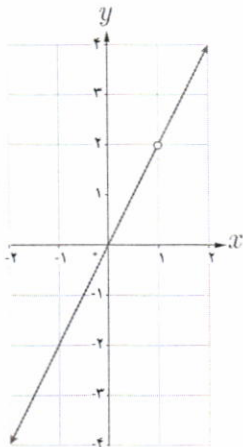
در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

تذکر: همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می کنیم.

کار در کلاس

۱ آیا دو تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2}{x}$  و  $g(x) = x$  با هم برابرند؟ چرا؟  
 دو تابع برابر نیستند }  
 $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$   
 $D_g = \mathbb{R}$

۲ نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



الف)  $g(x) = 2x$        $D_g = \mathbb{R}$

ب)  $g(x) = 2x$        $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

پ)  $g(x) = 2x$        $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

ت)  $g(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x-1}$        $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

ث)  $g(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x-2}$        $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$   
 $f(0) = 0$   
 $f(2) = 4$   
 $f(-2) = -4$

توابع «ب» و «ت»

## توابع رادیکالی

## کار در کلاس

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر  $S$  تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطه  $S = 356\sqrt{d}$  محاسبه کرد که در آن  $d$  میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. ( $\sqrt{2} = 1/4$ ،  $\sqrt{3} = 1/7$ )

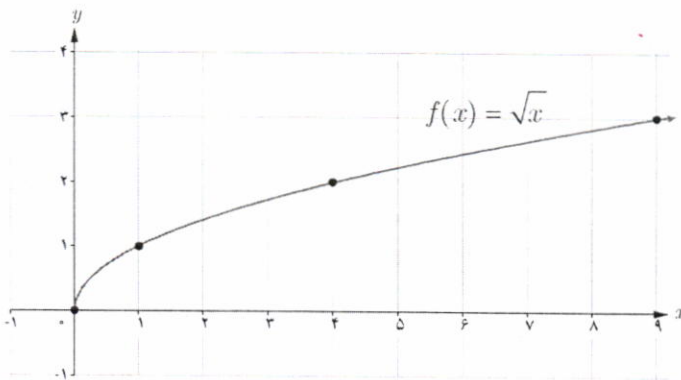
$d$	۱	۲	۳	۴
$S = 356\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	۶۰۵٫۲	۷۱۲

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها **یک**... ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع **است**.

پ) کدام یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟ **۵**

مطالعهٔ توابع رادیکالی مانند  $S = 356\sqrt{d}$  به دلیل نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم. همان‌طور که هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنهٔ این نوع توابع ممکن است همهٔ اعداد حقیقی نباشد. ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطهٔ  $f(x) = \sqrt{x}$  است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی و نمودار آن به صورت زیر است.



نویسه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن دلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

## خواندنی

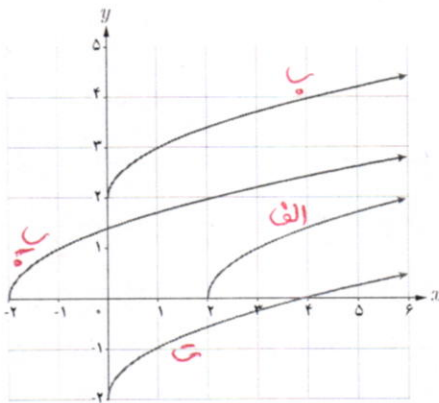
سونامی (آبلرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در بی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشانی و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و حدود ۲۰۰ هزار نفر را به کام مرگ کشانید.



در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟





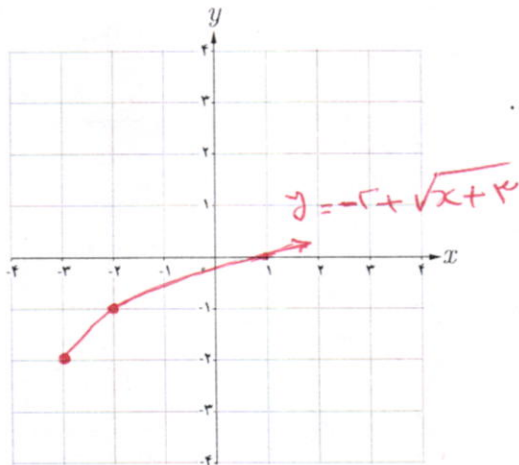
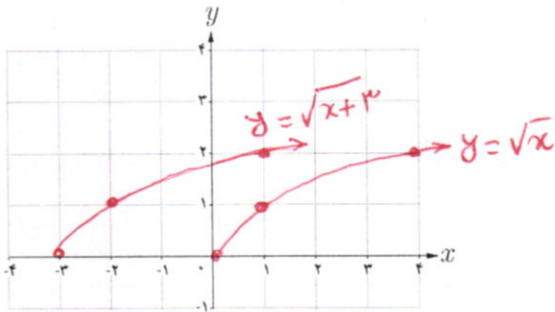
۱ در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنه آنها را تعیین کنید.

الف)  $g(x) = \sqrt{x-2}$   $D_g = [-2, +\infty)$     ب)  $h(x) = \sqrt{x+2}$   $D_h = [-2, +\infty)$   
 ب)  $k(x) = \sqrt{x+2}$   $D_k = [-2, +\infty)$     ت)  $l(x) = \sqrt{x-2}$   $D_l = [-2, +\infty)$

۲ می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطه  $y = -2 + \sqrt{x+3}$  را رسم کنیم.

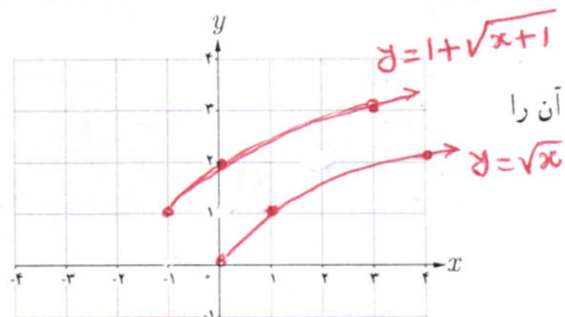
الف) (مرحله اول) نمودار تابع با ضابطه  $y = \sqrt{x}$  در صفحه قبل را در نظر بگیرید.

ب) (مرحله دوم) حال، نمودار تابع با ضابطه  $y = \sqrt{x+3}$  را رسم کنید.



ب) (مرحله سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطه  $y = -2 + \sqrt{x+3}$  را رسم کنید.

با توجه به شکل می‌بینید که دامنه این تابع  $[-3, +\infty)$  است.



۳ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$  را رسم کنید؛ سپس دامنه آن را بیابید.

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)



## توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

## فعالیت

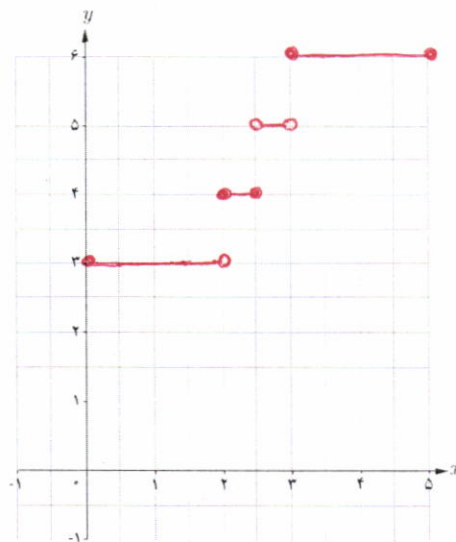
هزینه پارکینگ خودرو

در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود:  
الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x < 2.5 \\ 5 & 2.5 \leq x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

هزینه (هزار تومان)	زمان	
۳	تا کمتر از ۲ ساعت	از هنگام ورود
۴	تا ۲/۵ ساعت	از ۲ ساعت
۵	تا کمتر از ۳ ساعت	از بیشتر از ۲/۵ ساعت
۶	تا ۵ ساعت	از ۳ ساعت

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

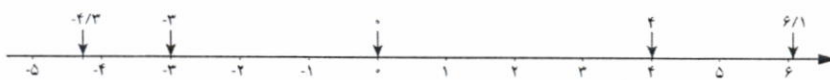


به توابعی مانند تابع هزینه پارکینگ، توابع پله‌ای می‌گویند. توابع پله‌ای در تجارت یا خرید و فروش نقش تعیین کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است.

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطه این تابع به صورت  $f(x) = [x]$  نشان داده می‌شود.

برای مثال داریم:

$$[-3] = -3 \quad [-4/3] = -5 \quad [0] = 0 \quad [6/1] = 6 \quad [4] = 4$$



نویسه کننده:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir



### خواندنی

برای قیمت‌گذاری یک محصول تولیدی خاص، قیمت مواد اولیه تعیین‌کننده است؛ اما بالا و پایین رفتن‌های جزئی قیمت مواد اولیه، قیمت یک محصول را تغییر نمی‌دهد. بنابراین به اعداد بازه‌ای از قیمت‌های مواد اولیه، تنها یک قیمت نهایی محصول را نسبت می‌دهند. به این ترتیب، تابع مورد نظر یک تابع پله‌ای است.

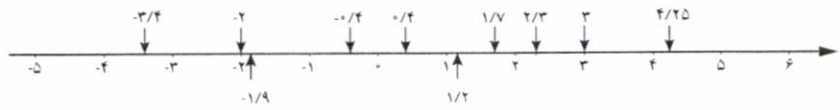
### خواندنی

با مراجعه به وب‌گاه رسمی سامانه محاسبه نرخ مرسولات پستی شرکت ملی پست (<http://parcelprice.post.ir>) می‌توانید دو شهر را انتخاب کنید. سپس تابع پله‌ای هزینه ارسال یک بسته را برحسب وزن - قیمت مشاهده کنید.

همان‌طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

### کار در کلاس

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به دست آورید.



$$\begin{aligned} [-3/4] &= -1 & [-2] &= -2 & [-1/9] &= -1 & [0/4] &= 0 & [-0/4] &= -1 \\ [4/25] &= 1 & [3] &= 3 & [2/3] &= 2 & [1/7] &= 1 & [1/2] &= 1 \end{aligned}$$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

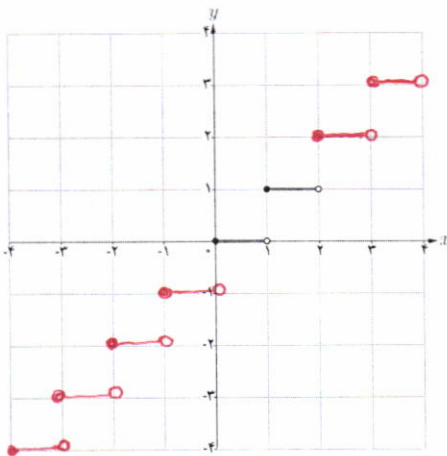
$$\left[ \frac{41}{37} \right] = 1 \qquad \left[ -\frac{13}{51} \right] = -1$$

### فعالیت

۱ اگر  $[x]=2$ ، آنگاه  $x$  برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

$$[x]=2 \iff 2 \leq x < 3 \qquad \text{بازه } [2, 3)$$

۲ برای رسم نمودار یک تابع جزء صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر  $0 \leq x < 1$ ، آنگاه  $[x]=0$ ؛ پس مقدار تابع  $f(x)=[x]$  برای همه اعداد عضو بازه  $(0, 1)$  برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطه  $f(x)=[x]$  رسم شده است. نمودار این تابع را در بازه  $[-4, 4]$  تکمیل کنید.



۳ الف) به دلخواه نقطه‌ای مانند  $a$  را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید.

ب) نقطه  $a+3$  را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط  $[a]$  و  $[a+3]$  را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین  $[a]$  و  $[a+3]$  برقرار است؟

ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«اگر  $a$  عددی حقیقی و  $n$  عددی صحیح باشد، آنگاه  $[a+n]=[a]+n$ »



$$[a]=1 \qquad [a+3]=4$$

$$[a+3]=[a]+3$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

ملاحظه کنید

۱ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  و با دامنه  $D_f = [-5, 5] - \{0\}$  را رسم کنید.

۲ دامنه تابع گویای با ضابطه  $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$  را به دست آورید.

۳ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف)  $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$  ،  $g(x) = \frac{|x|}{x}$       ب)  $f(x) = x-2$  ،  $g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

۴ تابعی گویا بنویسید که دامنه اش برابر  $\mathbb{R} - \{-1\}$  شود. پاسخ خود را با جواب دوستانان مقایسه کنید.

۵ نمودار تابع با ضابطه  $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$  را رسم کنید.

۶ حاصل عبارت‌های مقابل را حساب کنید.       $[-2309/54]$        $[-103/003]$        $[300/4002]$

۷ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

۸ تابع با ضابطه  $f(x) = [x] + 2$  و دامنه  $D_f = [-3, 3]$  را رسم کنید.



### خواندنی

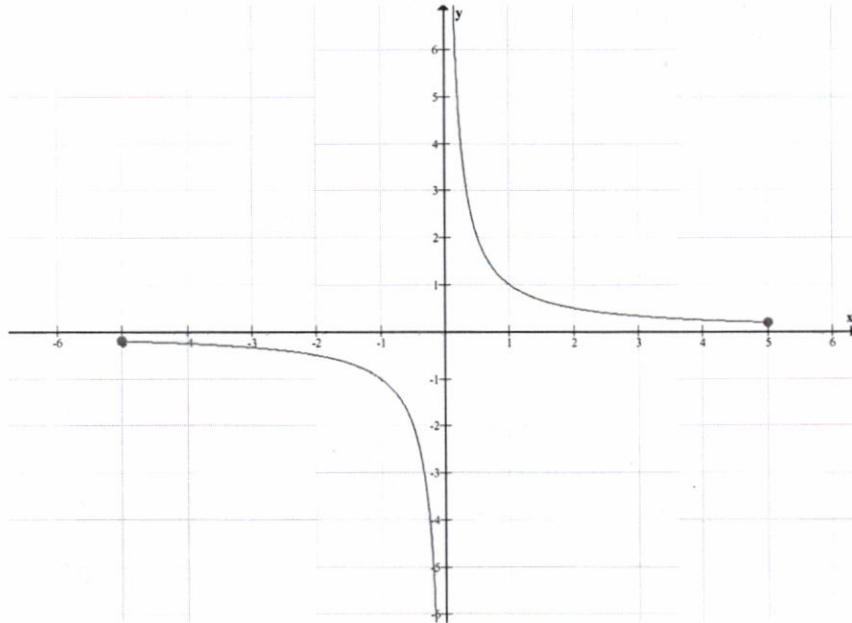
تابع  $f(x) = \sqrt{x} + 50$  به‌طور تقریبی قد متوسط کودکان را برحسب سالی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. در این تابع  $x$  نشان‌دهنده ماه‌های پس از تولد است. قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً چقدر است؟ در چه سنی قد متوسط یک کودک تقریباً یک متر می‌شود؟

۱- کودکان حاضر در تصویر، فرزندان شهدای مدافع حرم هستند.



## حل تمرین صفحه ی ۵۶ (ریاضی ۲)

۱: با انتخاب چند نقطه در دامنه ی تعیین شده، می توان نمودار را رسم نمود.



۲:

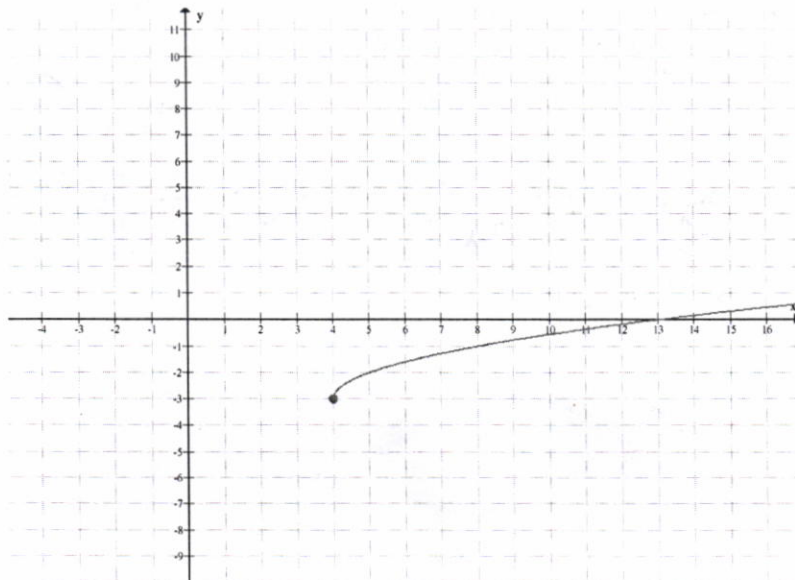
$$x - 3 = 0 \rightarrow D_f = R - \{3\}$$

۳: الف: دو تابع داده شده، مساویند. ( دو شرط تعریف توابع مساوی را دارند.)

ب: دو تابع داده شده، دامنه های مساوی ندارند، لذا مساوی نیستند.

۴: سؤال، جواب های متعدد دارد. مثلاً  $f(x) = \frac{2}{x+1}$

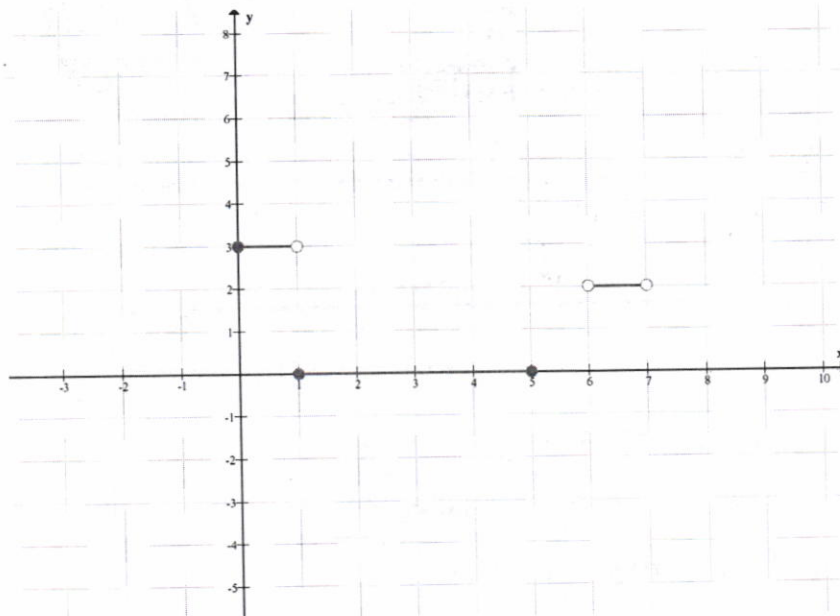
۵: به کمک انتقال نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  می توان نمودار این تابع را رسم کرد.



: ۶

$$[300/4002] = 300 \quad \text{و} \quad [-103/003] = -104 \quad \text{و} \quad [-2309/54] = -2310$$

: ۷



: ۸

$$x \in [-3, -2) \xrightarrow{[x] = -3} y = -3 + 2 = -1$$

$$x \in [-2, -1) \xrightarrow{[x] = -2} y = -2 + 2 = 0$$

$$x \in [-1, 0) \xrightarrow{[x] = -1} y = -1 + 2 = 1$$

$$x \in [0, 1) \xrightarrow{[x] = 0} y = 0 + 2 = 2$$

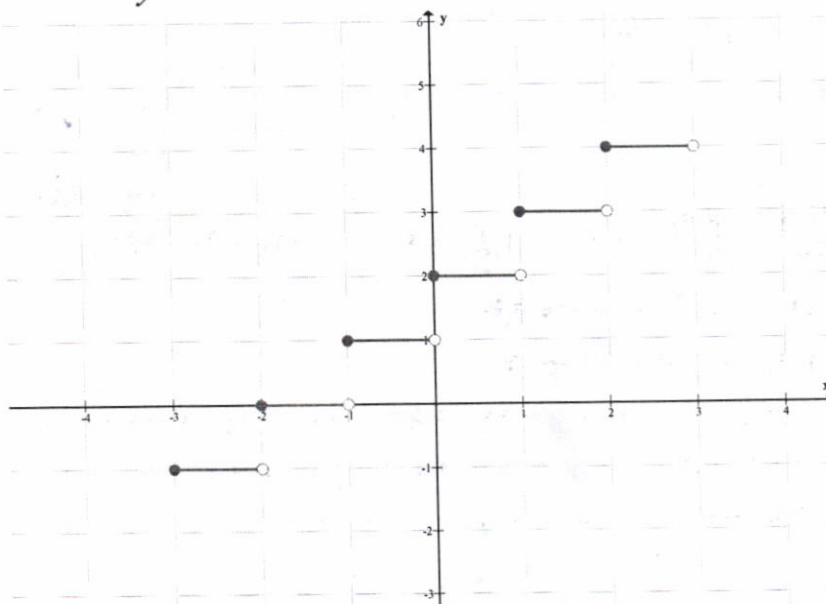
$$x \in [1, 2) \xrightarrow{[x] = 1} y = 1 + 2 = 3$$

$$x \in [2, 3) \xrightarrow{[x] = 2} y = 2 + 2 = 4$$

نویسه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)



۵۹,۲



وارون یک تابع

کار در کلاس

الف) هر مایل تقریباً  $\frac{1}{6}$  کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام یک از رابطه‌های سمت چپ است.

$$f(x) = \frac{1}{5}x \quad \longleftrightarrow \quad \text{این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است.}$$

$$g(x) = \frac{5}{1}x \quad \longleftrightarrow \quad \text{این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است.}$$



ب) تندی  $3^\circ$  مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟  
 $f(30) = \frac{1}{5} \times 30 = 6 \text{ km/h}$   
 هر تابع با ضابطه  $y=f(x)$  بیان می‌کند که متغیر  $y$  چه ارتباطی با متغیر  $x$  دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  را به دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار  $y$  به مقدار  $x$  رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب  $(a,b)$  می‌توان زوج مرتب  $(b,a)$  را به دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همه زوج‌های مرتب تابع  $f$  را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع  $f$  می‌گوییم و با  $f^{-1}$  نشان می‌دهیم.

برای مثال وارون تابع  $f = \{(6,4), (5,3), (2,1)\}$  برابر با  $f^{-1} = \{(4,6), (3,5), (1,2)\}$  است.

کار در کلاس

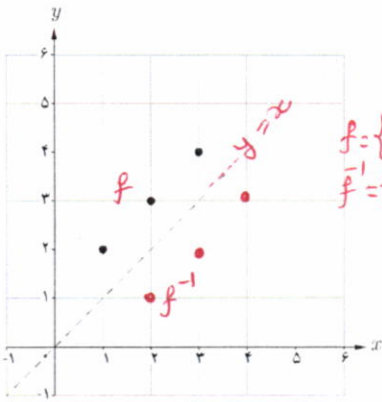
وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s = \{(4,1), (1,4), (3,3), (2,5)\}$	$s^{-1} = \{(1,4), (4,1), (3,3), (5,2)\}$
$t = \{(5,1), (1,4), (4,3), (2,3)\}$	$t^{-1} = \{(1,5), (4,1), (3,4), (3,2)\}$
$u = \{(2,3), (5,2), (4,1), (3,4)\}$	$u^{-1} = \{(3,2), (2,5), (1,4), (4,3)\}$

خواندنی

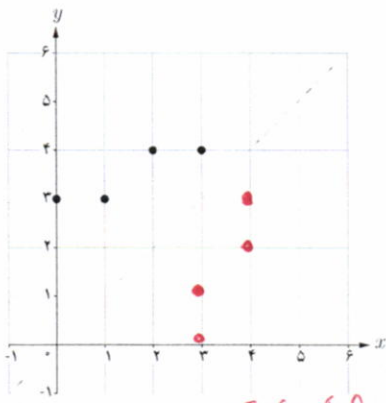
سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال  $1420$  جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به  $100$  میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهید شد.

فعالیت

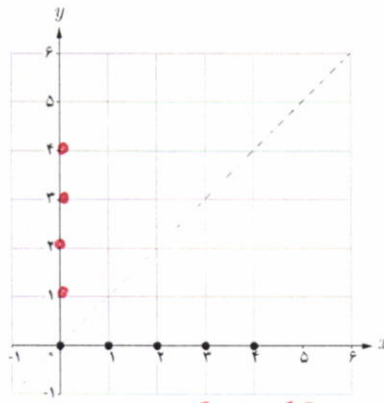


۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع  $f$  رسم شده است.  
 الف) تابع  $f$  را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.  $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$   
 ب) تابع  $f^{-1}$  را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.  $f^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$   
 پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار  $f^{-1}$  را رسم کنید.  
 ت) نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  چه ارتباطی با هم دارند؟  
 «نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به خط  $y=x$  ... قرینه یکدیگرند».

۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید. **نقطه موازی محور عرضها بنود آنرا فقط در یک نقطه قطع کند.**



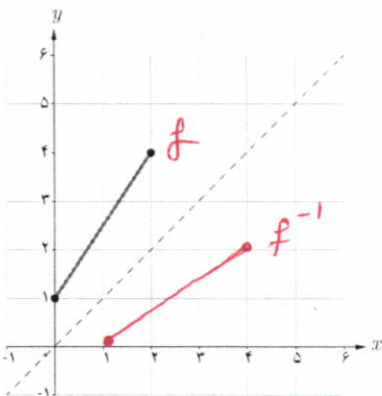
$f$  تابع است.  
 $f^{-1}$  تابع نیست.



$f$  تابع است.  
 $f^{-1}$  تابع نیست.

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به خط  $y=x$  رسم کنیم.



۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

$(2,4) \rightsquigarrow (4,2)$   
 $(1,1) \rightsquigarrow (1,1)$

نویسه کننده:

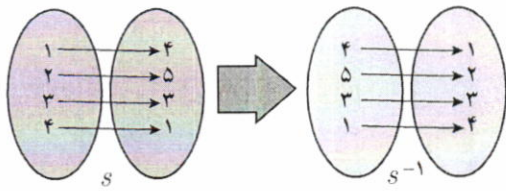
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

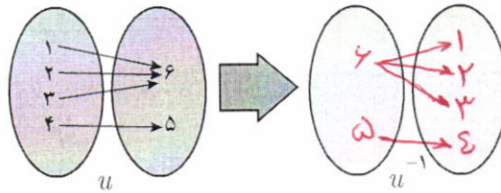
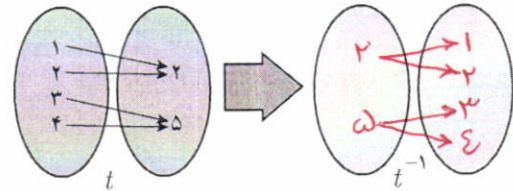


تابع یک به یک

فعالیت



الف) به نمونه داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.



ب) در جدول مقابل گزینه‌های درست را انتخاب کنید.

- بله  خیر  $s^{-1}$  یک تابع است.
- بله  خیر  $t^{-1}$  یک تابع است.
- بله  خیر  $u^{-1}$  یک تابع است.

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع  $f$ ، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع  $f$  مؤلفه‌های  $\dots$  تکراری وجود نداشته باشد.

به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گوییم.

تذکر: وارون هر تابع یک به یک، خود یک تابع است.

ت) تابع  $f = \{(1, 2), (-2, 4), (2, -1), (-1, 2)\}$  را در نظر بگیرید. بدون محاسبه  $f^{-1}$ ، تعیین کنید که این تابع یک به یک است یا خیر؟

۲) نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا  $f$  و  $g$  هر دو تابع اند؟ بله

پ) در مورد تابع بودن  $f^{-1}$  و  $g^{-1}$  چه می‌توان گفت؟

ت) کدام یک از دو تابع  $f$  و  $g$  یک به یک هستند؟  $f$

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

- با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین ~~نمی‌شود~~.
- با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین ~~نمی‌شود~~.

هر شخص گروه خونی مشابه دیگری  
می‌تواند داشته باشد ولی  
اثر انگشت وی منحصر او  
است.

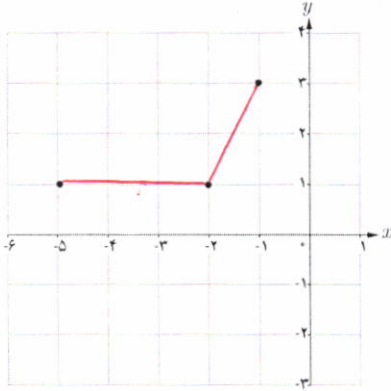
نهیفته کننده:

گروه ریاضی دوره بی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

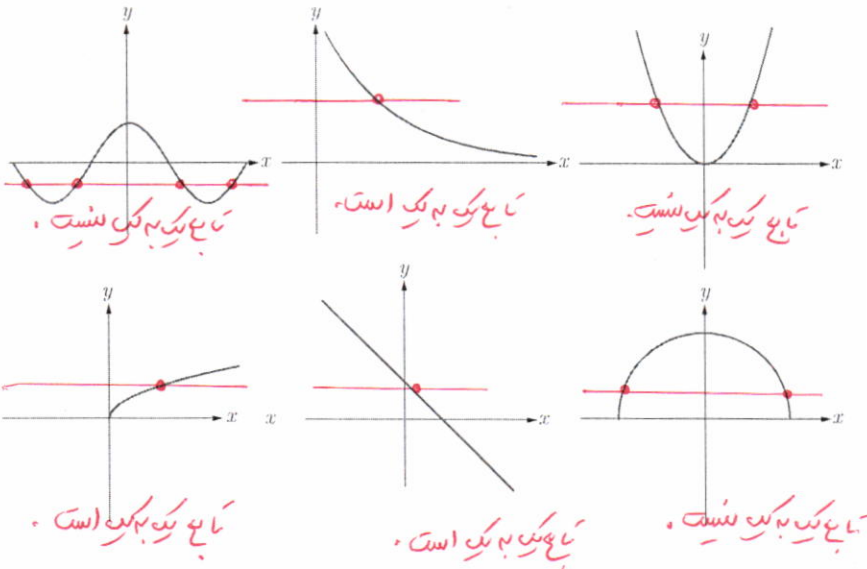
## فعالیت

- ۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.  
 الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک به یک است؟ **خیر**  
 ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟



اگر هر خط موازی محور **طول** ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن گاه آن تابع یک به یک است.

- ۲ کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



## خواندنی

قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجسته ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت شست برای مهر کردن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی‌ها نیز با الهام گرفتن از شرقی‌ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.



## نویه کننده:

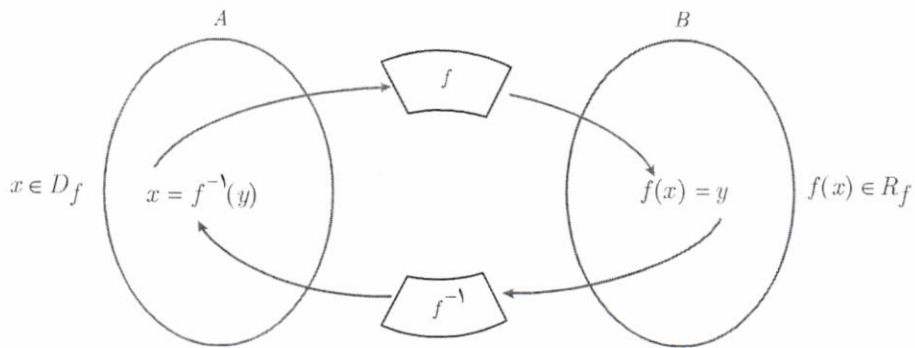
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن دانشمندان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)



به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

اگر  $f$  تابعی یک به یک باشد و  $f^{-1}$  تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط  $f$  و  $f^{-1}$  را نشان می‌دهد. ( $R_f$  نماد برد تابع  $f$  است).

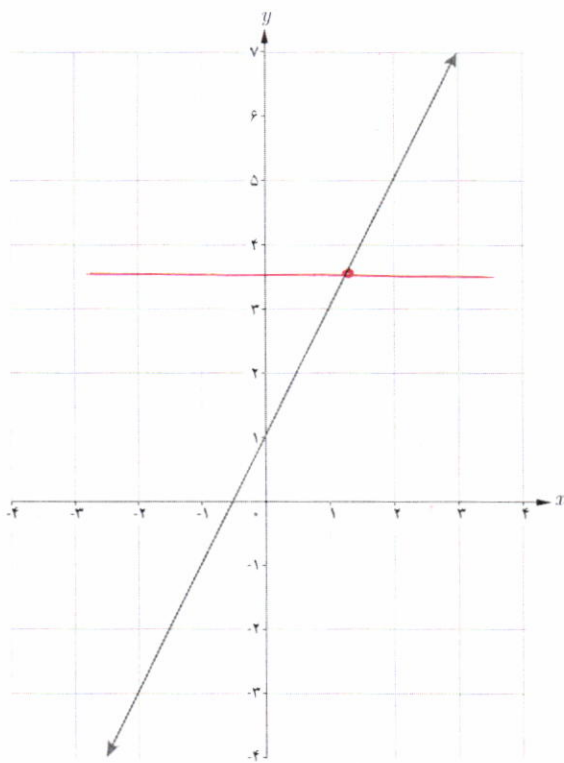


فعالیت

تابع با ضابطه  $f(x) = 2x + 1$  را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار  $f$  توضیح دهید که چرا  $f$  یک به یک است.

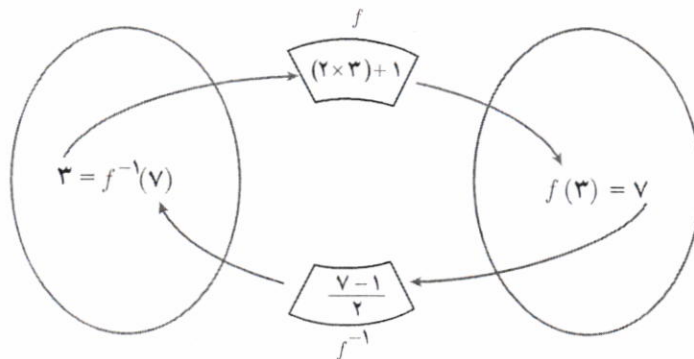
موازی محور طولها نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند.



ب) نمودار زیر را توضیح دهید:

$(3, 7) \in f$  و  $(7, 3) \in f^{-1}$

به عبارت دیگر  $f(3) = 7$  و  $f^{-1}(7) = 3$



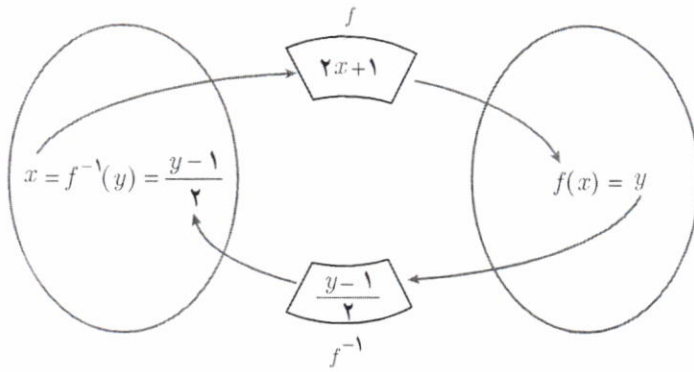
$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+1} 2x + 1$$

$f(x) = 2x + 1$

$$\frac{x-1}{2} \xrightarrow{\div 2} x-1 \xrightarrow{-1} x$$

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = 2x + 1$ ، داریم:



ت) بنابراین می توان نوشت:

$$f(x) = 2x + 1 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \quad (y \in R_f)$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه  $f^{-1}$  همان برد  $f$  است. بنابراین یک نمایش مناسب برای  $f^{-1}$  به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

به طور کلی:

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند  $f$ ، در معادله

$y = f(x)$  را بر حسب  $y$  محاسبه می کنیم. سپس با جابه جا کردن  $y$  و  $x$ ،

ضابطه تابع  $f^{-1}(x)$  را به دست می آوریم.

وارون تابع با ضابطه  $f(x) = 2x + 1$ ، چنین محاسبه می شود:

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x = y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

نویسه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطلقان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

کار در کلاس

۱) هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = x + 5$

$$f^{-1}(x) = x - 5$$

زیرا یک به یک است.

ب)  $g(x) = 4x$

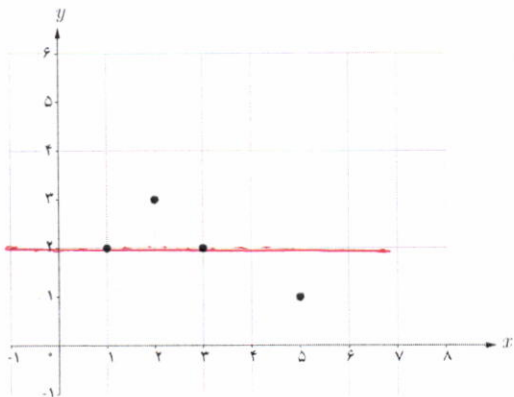
$g^{-1}(x) = \frac{x}{4}$

پ)  $u(x) = 2x + 3$

$u^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

ت)  $v(x) = \frac{2}{3}x - 4$

$v^{-1}(x) = \frac{3}{2}(x+4)$



۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک به یک نیست؟

خط  $y=2$  نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

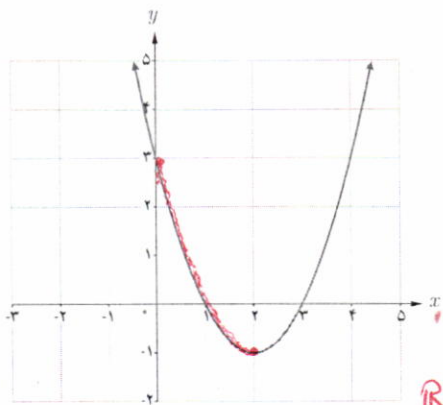
ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید.

مسئله در جواب دارد.

با نقطه  $(3, 2)$  را حذف کنیم یا  $(1, 2)$

در هر حالت تابع یک به یک به دست می‌آید.

کار در کلاس



الف) به نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  در شکل مقابل، دقت کنید.

با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک به یک ساخت؟

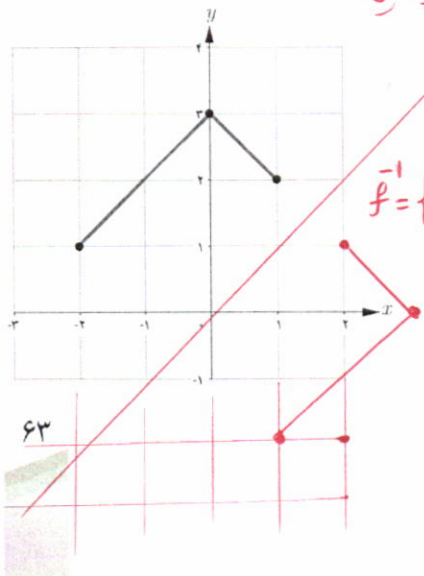
$[1, 4)$

$[0, 2]$

ب) آیا هر تابع درجه ۲، تابعی یک به یک است؟ چرا؟

خیر، تابع درجه ۲ با دامنه  $\mathbb{R}$  یک به یک نیست و هر خط موازی محور طولها می‌تواند نمودار آن را در دو نقطه قطع کند. یعنی یک به یک نیست.

تمرین



۱ وارون تابع  $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$  را به دست آورید.

$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$

۲ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

تابع یک به یک نیست.



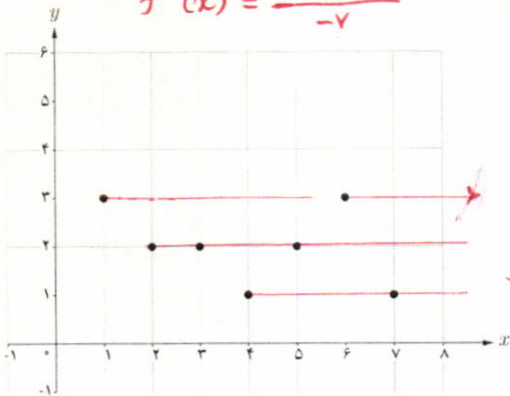
۳ ضابطه وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.  $f^{-1}(x) = \frac{5}{3}(x-4)$

پ)  $f(x) = \frac{-7x+3}{5}$   
 $f^{-1}(x) = \frac{5x-3}{-7}$

ب)  $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$

الف)  $f(x) = 5x - 2$   
 $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$

۴ می خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می تواند باقی بماند؟

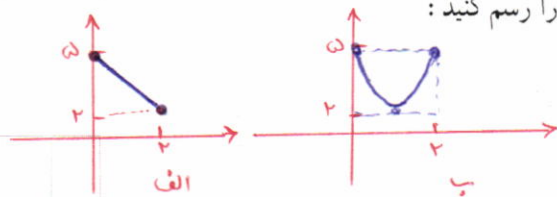


۱ نقطه حذف  
 ۲ نقطه حذف  
 ۳ نقطه حذف } → نقطه حذف

۵ نمودار تابعی با دامنه  $[0, 2]$  و برد  $[2, 5]$  را رسم کنید:

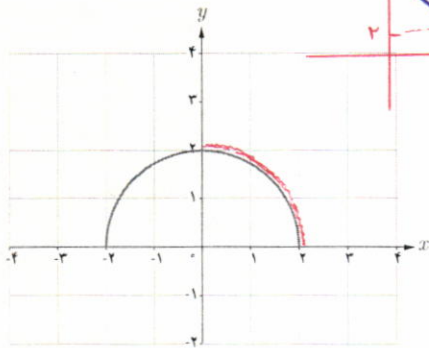
الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشد.

ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.

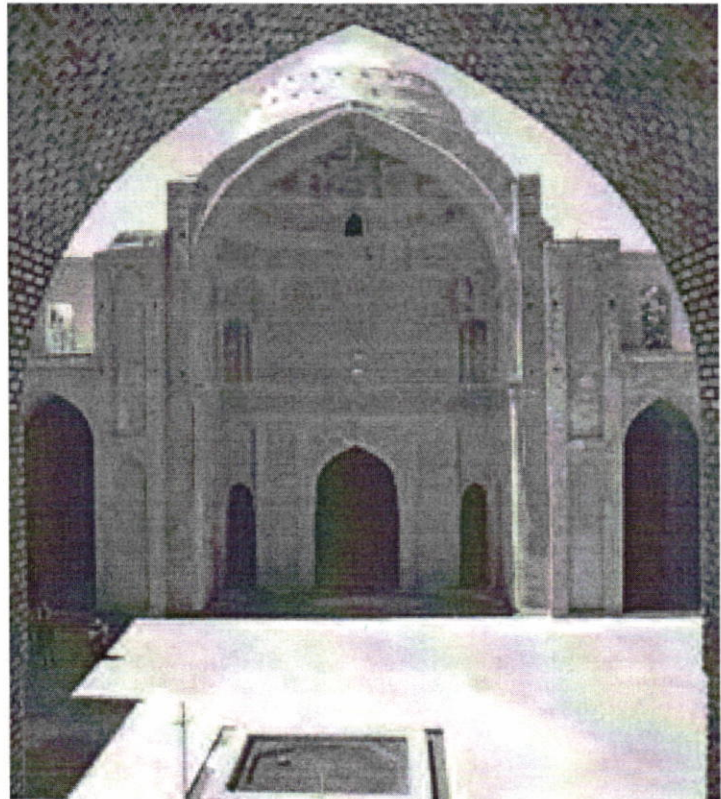


۶ با حذف بخشی از نمودار نیم دایره داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را

مشخص کنید.



نمودار در بازه  $[0, 2]$  تابع یک به یک می شود.



مسجد جامع ورامین (تهران)

اعمال جبری روی توابع

اگر  $f$  و  $g$  به ترتیب دو تابع با دامنه‌های  $D_f$  و  $D_g$  باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف دامنه	تعریف ضابطه	نام عمل
$D_{f+g} = D_f \cap D_g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	جمع
$D_{f-g} = D_f \cap D_g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	تفریق
$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	ضرب*
$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	تقسیم

فعالیت

اگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $g(x) = x - 2$ ، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها  $\left(\frac{f}{g}\right)$  را به دست آورید و دامنه هر یک را مشخص کنید.  
حل:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 1) + (x - 2) = 3x - 3$$

$$(f-g)(x) = (2x - 1) - (x - 2) = x + 1$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x - 1) \cdot (x - 2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

نویسه کننده:

گروه ریاضی دوره بی‌نوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

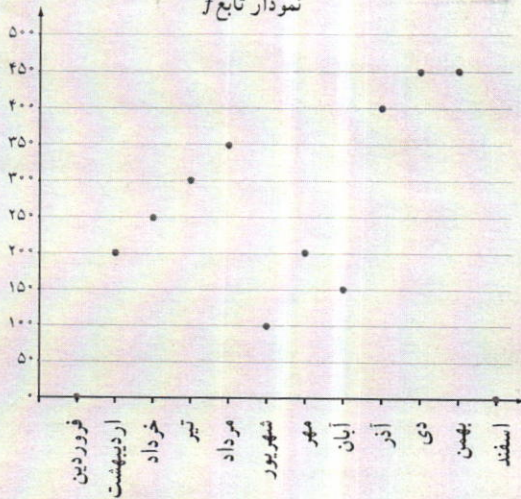
[khusmath1394@chmail.ir](mailto:khusmath1394@chmail.ir)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 1}{x - 2}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x \mid x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

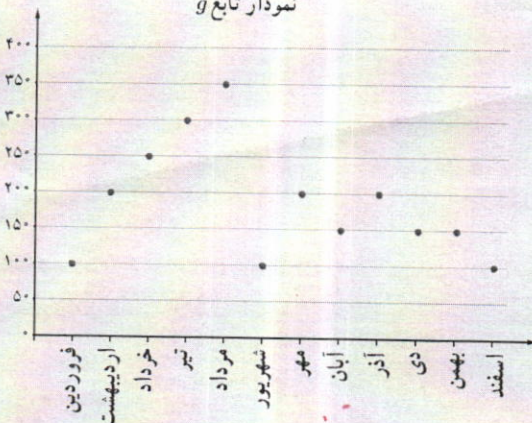
\* ضرب دو تابع  $f$  و  $g$  را با نمادهای  $f \times g$  و یا  $fg$  هم نشان می‌دهند.



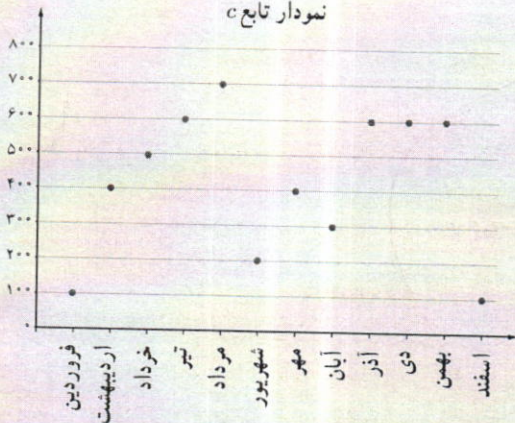
نمودار تابع  $f$ 

## خواندنی

علی در یک کارگاه خانگی، محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز خود را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزار و یراق خریداری می‌کند. وی پس از تولید محصولاتی هنری، آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید او را در یک سال نشان می‌دهد. نمودار تابع  $f$  نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان چرم خریداری شده است؛ برای مثال با توجه به شکل،  $f(300) = 300$ . پس این هنرمند در چهارمین ماه سال، ۳۰۰ هزار تومان چرم خریده است.

نمودار تابع  $g$ 

نمودار تابع  $g$  نشان می‌دهد که این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و یراق خریده است.

نمودار تابع  $c$ 

پس در واقع هزینه‌ای که علی در کارگاه خود دارد، شامل دو بخش است؛ هزینه چرم و هزینه ابزار و یراق. به زبان ساده، «هزینه» او شامل قیمت همه مواد و لوازم خریداری شده است. در شکل روبه‌رو نمودار تابع هزینه خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با  $c$  نشان می‌دهیم. الف) بر روی شکل، درستی مقادیر تابع  $c$  را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

ب) آیا برای هر  $x$  در دامنه تابع  $c$ ،  $c(x) = f(x) + g(x)$  درست است؟ همچنان که می‌بینید برای به‌دست آوردن مقادیر تابع  $c$ ، مقادیر دو تابع  $f$  و  $g$  را با هم جمع می‌کنیم.

تپیه‌کننده:

گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

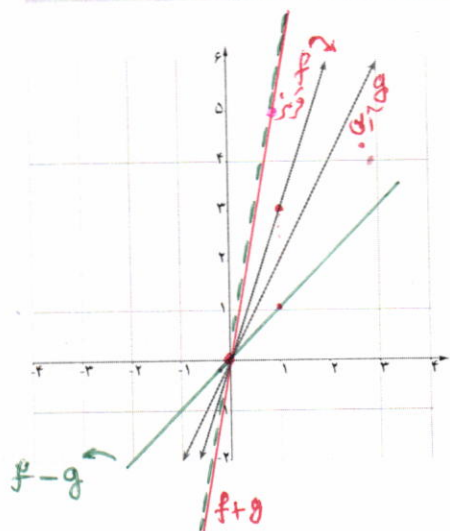


تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = x^2 + 4x - 2$	$\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x) = x^2 + 2x + 4$	$\mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = x^3 - 18x - 3$	$\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 3}$	$\mathbb{R} - \{3\}$

۱ برای دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  و  $g(x) = x - 3$  جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x) = \sqrt{x} + x$	$[0, +\infty)$
$u-v$	$(u-v)(x) = \sqrt{x} - x + 2$	$[0, +\infty)$
$u \cdot v$	$(u \cdot v)(x) = x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1$	$[0, +\infty)$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$	$[0, +\infty) - \{1\}$

۲ برای دو تابع با ضابطه‌های  $u(x) = \sqrt{x} + 1$  و  $v(x) = x - 1$  جدول داده شده را کامل کنید.



مطابق شکل، دو تابع  $f$  و  $g$  به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند. الف) ضابطه دو تابع  $f$  و  $g$  را به دست آورید.

$$g(x) = \dots 2x$$

$$f(x) = \dots 3x$$

ب) ضابطه دو تابع  $f+g$  و  $f-g$  را به دست آورید.

$$(f+g)(x) = \dots 3x + 2x = 5x \quad (f-g)(x) = \dots 3x - 2x = x$$

$x$	۰	۱
$f(x)$	۰	۳
$g(x)$	۰	۲
$(f+g)(x)$	۰	۵
$(f-g)(x)$	۰	۱

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع  $f+g$  و  $f-g$  را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟

$$f(x) = ax + b \quad \text{توابع خطی}$$

$$g(x) = cx + d$$

$$(f+g)(x) = (a+c)x + (b+d) \quad \text{تابع خطی}$$

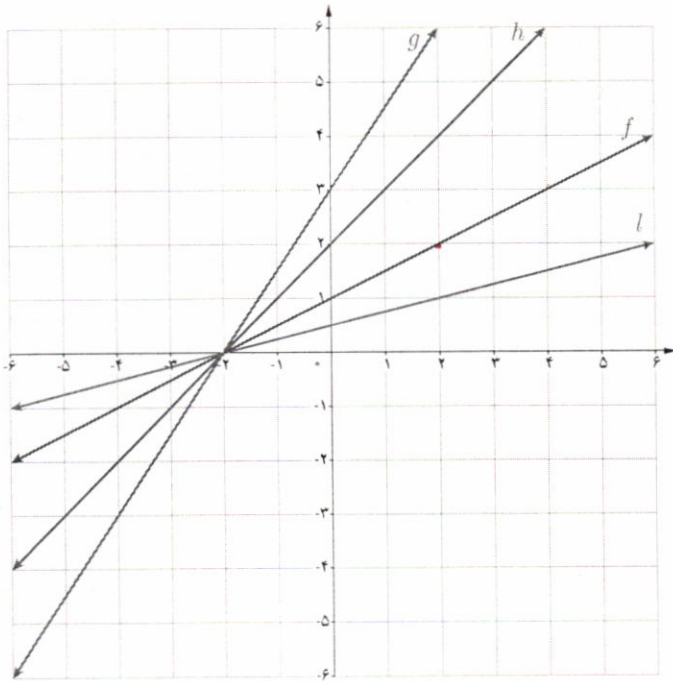
$$(f-g)(x) = (a-c)x + (b-d) \quad \text{تابع خطی}$$

فعالیت

با توجه به شکل دیده می شود که  $l(x) = \frac{1}{3}f(x)$ . جاهای خالی را پر کنید.

$g(x) = \dots ۳ \dots f(x)$

$h(x) = \dots ۲ \dots f(x)$



ابتدا جدول تکثیر می دهیم.

x	0	۲	-۶	-۲
f(x)	۱	۲	-۲	۰
g(x)	۳	۶	-۶	۰
h(x)	۲	۴	-۴	۰
L(x)	1/3	1	-1	۰

$g(x) = ۳f(x)$   
 $h(x) = ۲f(x)$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می شود که:

اگر  $k$  عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = kf(x)$  کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x)$  را  $k$  برابر کنیم.

کار در کلاس

۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x)$  در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  را رسم کنید.

نویسه کننده:

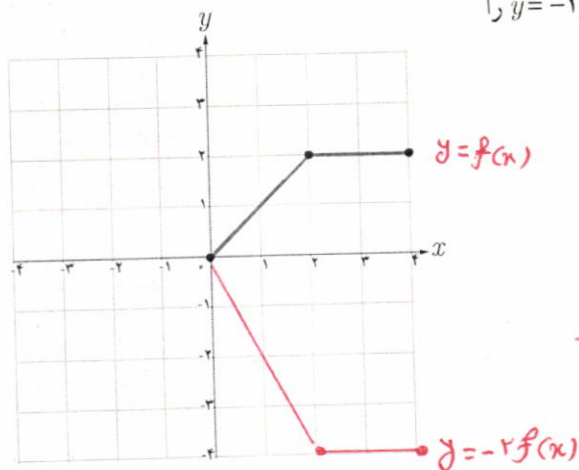
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  کافی است قرینه نمودار تابع ضابطه  $y = f(x)$  را نسبت به محور **طولها** رسم کنیم.

۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $f$  داده شده است. نمودار تابع با ضابطه  $y = -2f(x)$  را رسم کنید.



$x$	0	2	4
$f(x)$	0	2	2
$-2f(x)$	0	-4	-4

تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $g(x) = -|x|$

ب)  $h(x) = -|x-3|$

پ)  $l(x) = 2|x-2|$

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

$f(x) = x^2 - 4$

ب)  $g(x) = x + 2$

$f(x) = |x|$

الف)  $g(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{x-2}{x+5}$

ت)  $g(x) = x^2 + 3x - 1$

$f(x) = \sqrt{x}$

ب)  $g(x) = -\sqrt{x}$

$f = \{(2,5), (3,4), (0,-2)\}$

ث)  $g = \{(-1,2), (0,3), (2,4), (3,0)\}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

ب)  $t(x) = -3\sqrt{x}$

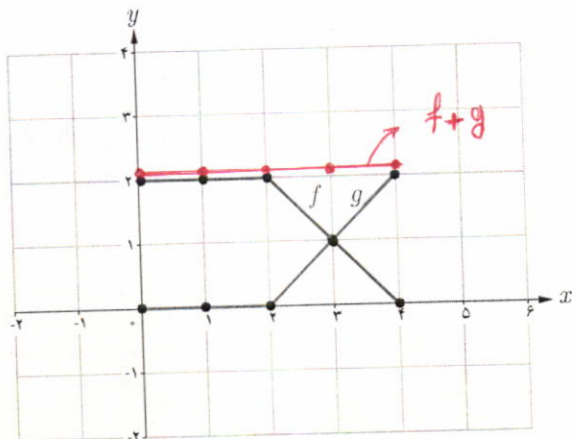
ب)  $s(x) = -\sqrt{x-2}$

الف)  $r(x) = 2\sqrt{x}$

ث)  $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$

ت)  $u(x) = 1 - \sqrt{x}$

۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.

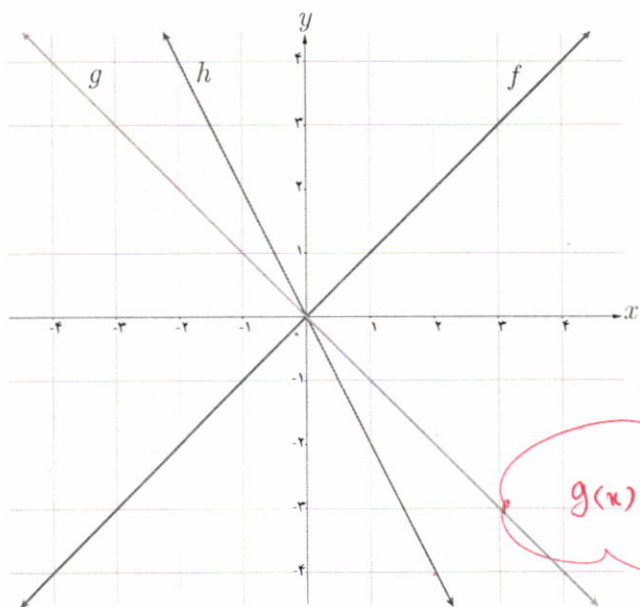


نهیہ کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطلقان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir





۵) با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟

$x$	۰	۱	۲	-۱
$f(x)$	۰	۱	۲	-۱
$g(x)$	۰	-۱	-۲	۱
$h(x)$	۰	-۲	-۴	۲

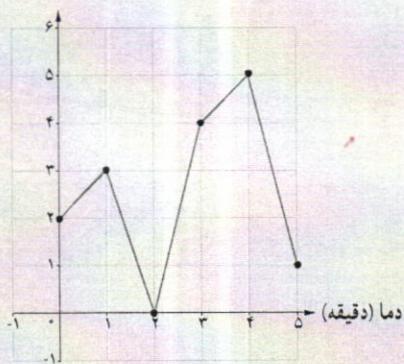
$g(x) = f(x) + h(x)$

پایه جدول

خواندنی

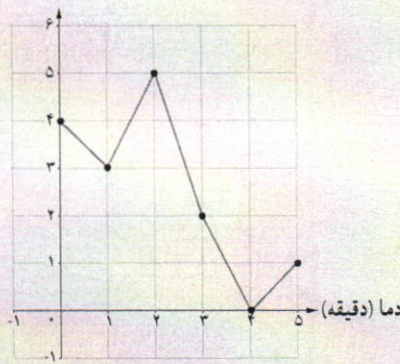
یک اجاق دارای دو منبع گرمایی قابل تنظیم است که می‌توانند هم‌زمان، به‌طور مستقل و جدا از هم گرما تولید کنند. نمودار دمایی که این دو منبع گرمایی تولید می‌کنند، به‌صورت زیر است. این نمودارها نشان می‌دهد که در عرض ۵ دقیقه، چگونه مقدار دما افزایش و یا کاهش می‌یابد. با توجه به نمودارهای زیر بیشترین و کمترین دمایی که در این اجاق تولید می‌شود چه مقدار است؟

درجه گرمایی



نمودار منبع اول

درجه گرمایی



نمودار منبع دوم

نویسه کننده:

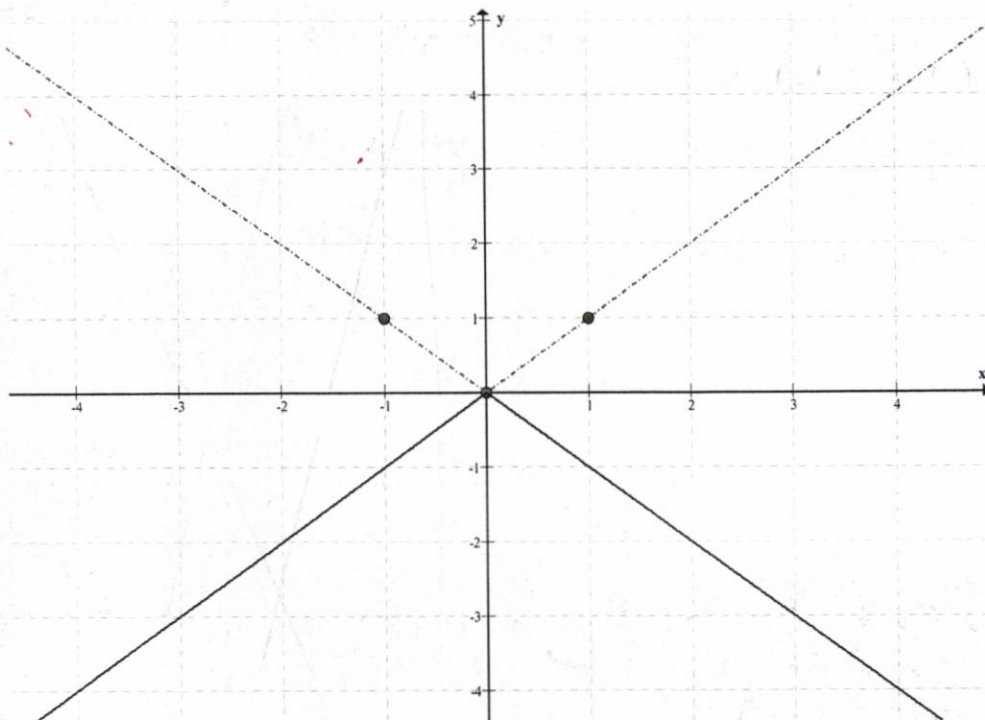
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطالان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

## حل تمرین های صفحه ی ۶۹ (ریاضی ۲)

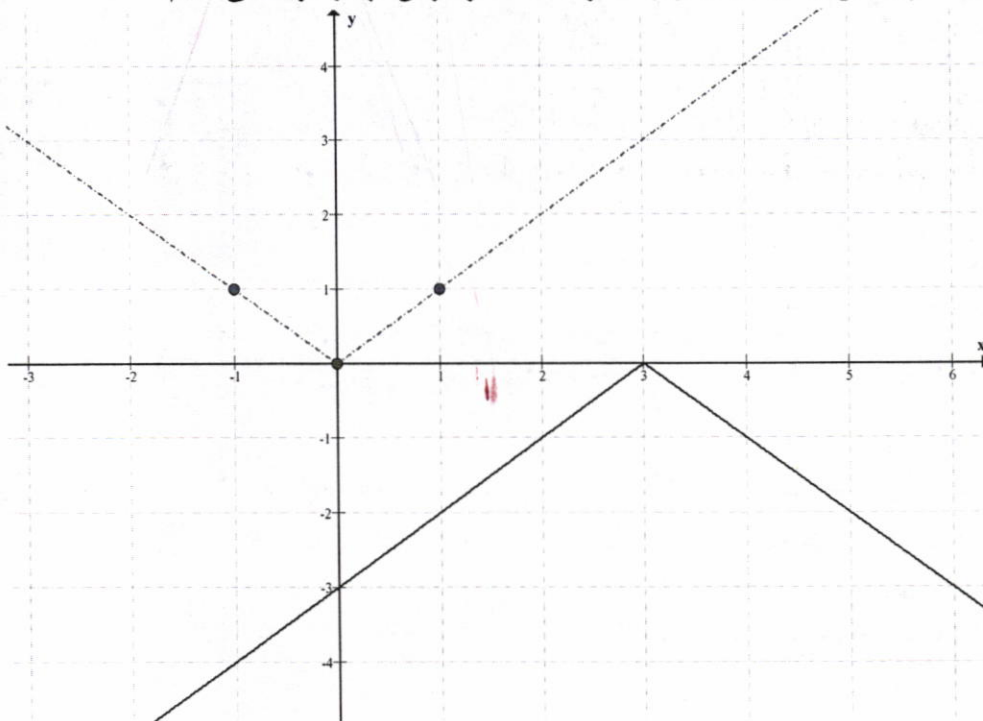
۱: ابتدا نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را رسم می کنیم. سپس به کمک آن نمودار هر تابع را رسم می نماییم.  
الف)  $g(x) = -|x|$

عرض تمام نقاط تابع  $f(x) = |x|$  را قرینه می کنیم.



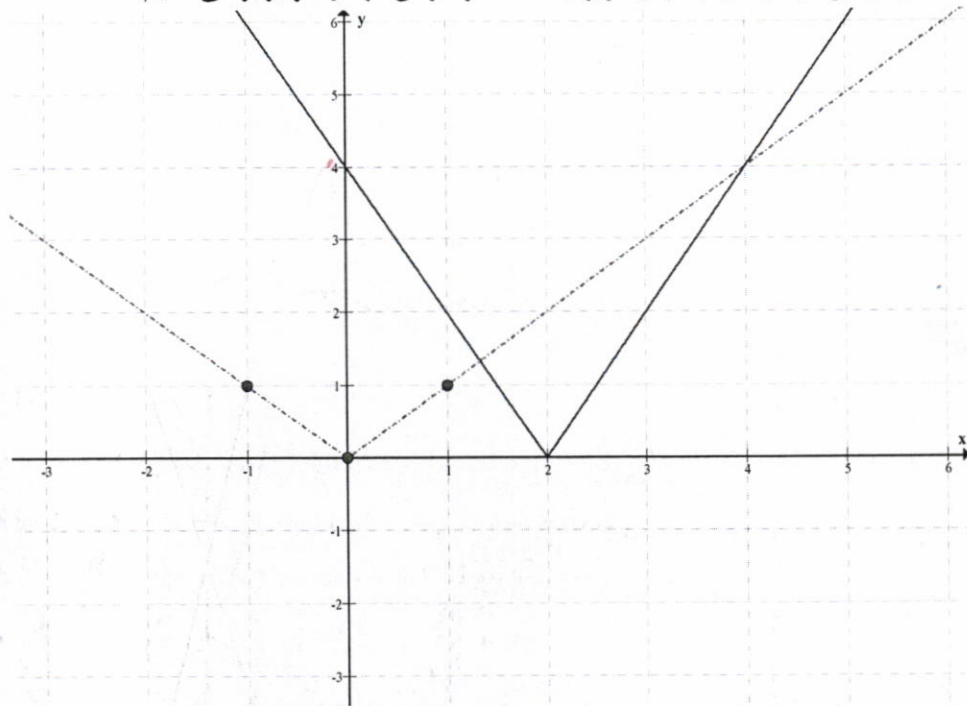
ب)  $g(x) = -|x - 3|$

طول نقاط نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را سه واحد اضافه و عرض آنها را قرینه می کنیم.



پ)  $g(x) = 2|x - 2|$

طول نقاط نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را دو واحد اضافه و عرض آنها را دو برابر می کنیم.



: ۲

(الف)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) =  x  + \frac{1}{x}$	$R - \{0\}$
تفریق	$(f - g)(x) =  x  - \frac{1}{x}$	$R - \{0\}$
ضرب	$(f \times g)(x) =  x  \times \frac{1}{x} = \frac{ x }{x}$	$R - \{0\}$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{ x }{\frac{1}{x}} = x x $	$R - \{0\}$



(ب)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) = (x^2 - 4) + (x + 2) = x^2 + x - 2$	$R$
تفریق	$(f - g)(x) = (x^2 - 4) - (x + 2) = x^2 - x - 6$	$R$
ضرب	$(f \times g)(x) = (x^2 - 4) \times (x + 2) = x^3 - 2x^2 - 4x - 8$	$R$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2$	$R - \{-2\}$

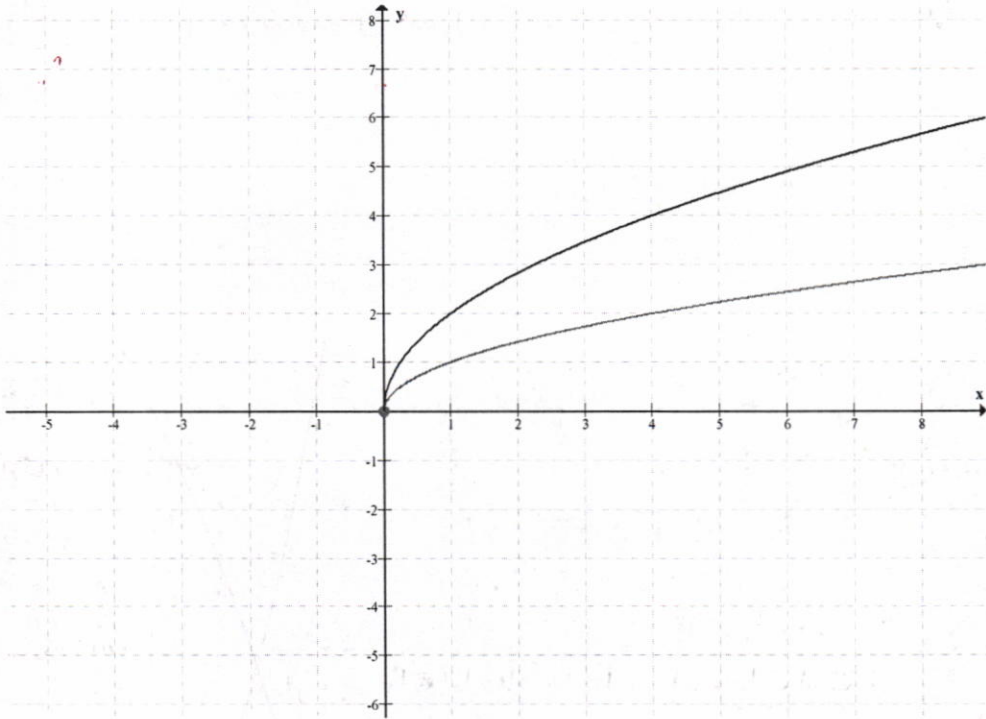
(پ)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0$	$[0, +\infty)$
تفریق	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$
ضرب	$(f \times g)(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = -x$	$[0, +\infty)$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1$	$(0, +\infty)$

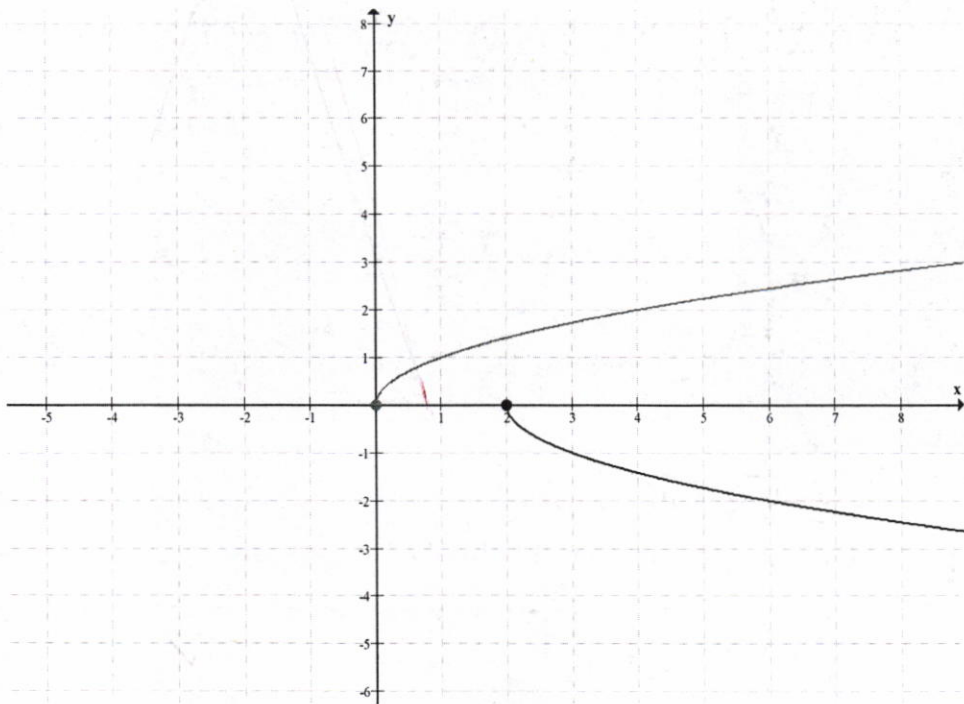
(ت)

عمل	ضابطه	دامنه
جمع	$(f + g)(x) = \left(\frac{x - 2}{x + 5}\right) + (x^2 + 3x - 10)$	$R - \{-5\}$
تفریق	$(f - g)(x) = \left(\frac{x - 2}{x + 5}\right) - (x^2 + 3x - 10)$	$R - \{-5\}$
ضرب	$(f \times g)(x) = \left(\frac{x - 2}{x + 5}\right) \times (x^2 + 3x - 10)$	$R - \{-5\}$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x - 2}{x + 5}}{x^2 + 3x - 10} = \frac{x - 2}{(x + 5)(x^2 + 3x - 10)}$	$R - \{2, -5\}$

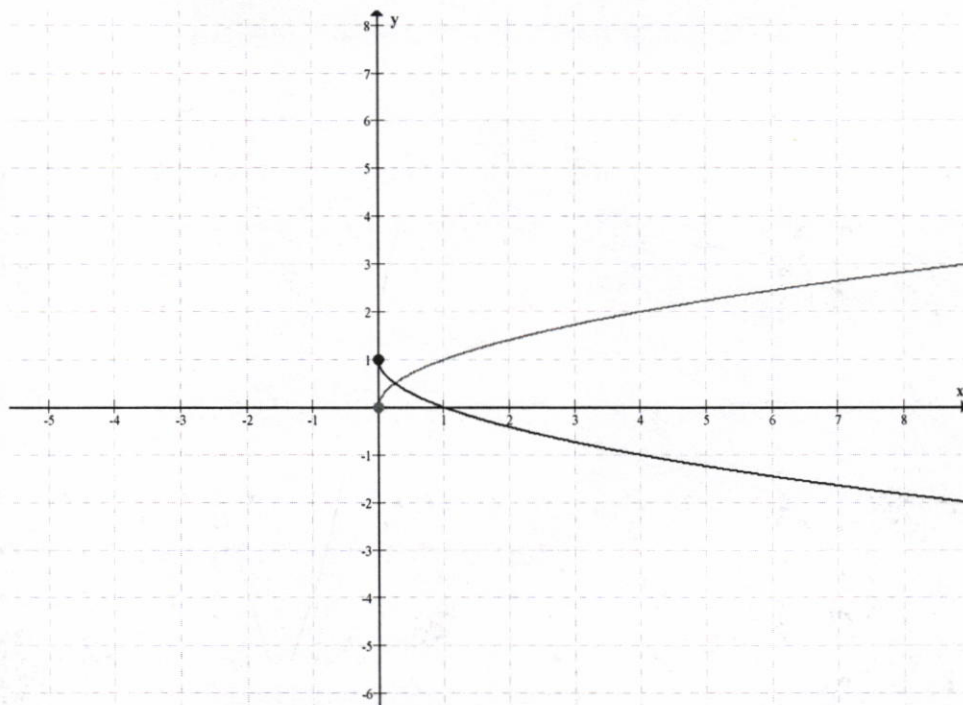
الف)  $r(x) = 2\sqrt{x}$



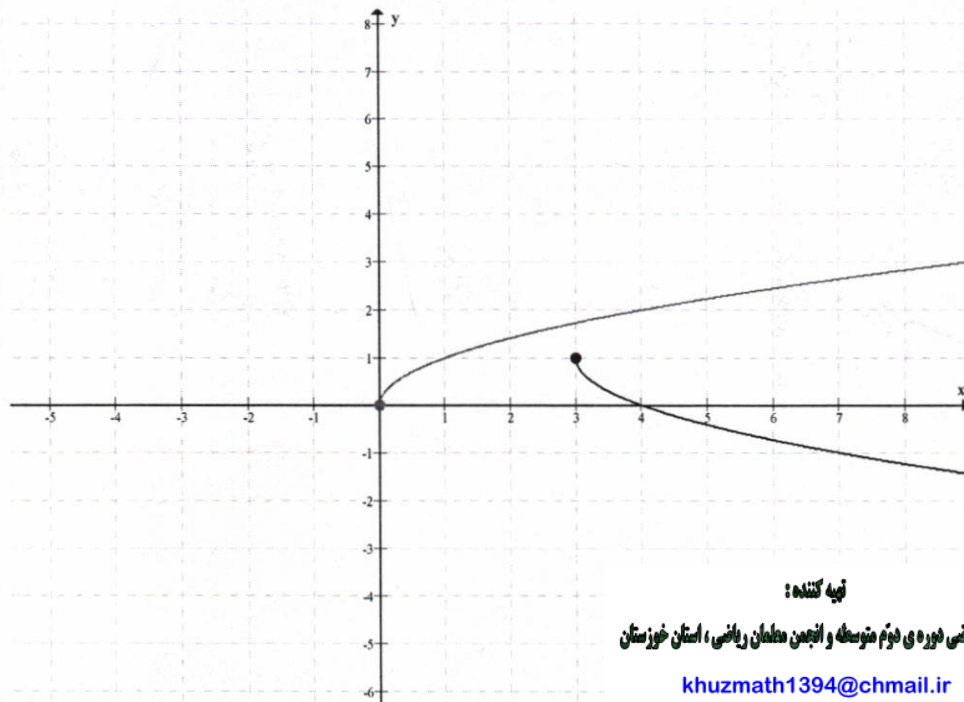
ب)  $s(x) = -2\sqrt{x-2}$



ت)  $u(x) = 1 - \sqrt{x}$



ت)  $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$



تپه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

\*\*\*

۷, ۵