

فصل چهارم : درس اول توان صحیح:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \quad 4^3 = 64 \quad (-5)^3 = -125$$

در سال گذشته با اعداد تواندار آشنا شدیم ، مانند:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

***نکته:** هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر یک است .

****** آیا می توانیم یک عدد با توان منفی داشته باشیم ؟ مثلاً حاصل 3^{-5} برابر چند است؟

به جدول زیر توجه کنید: حاصل هر خانه از سطر اول برابر همان عدد است که در زیر آن نوشته شده است .

در سطر اول از سمت چپ ، از توان اعداد تواندار در هر مرحله یک واحد کم می شود و در سطر دوم از سمت چپ اعداد بر ۳ تقسیم می شوند.

3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}	3^{-4}	3^{-5}
۸۱	۲۷	۹	۳	۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$	$\frac{1}{243} = \frac{1}{3^5}$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} \quad 3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} \quad 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

همچنین می توانیم بنویسیم :

« اگر عددی غیر از صفر ، توان صحیح منفی داشته باشد ، می توانیم پایه را معکوس کنیم و توان را با علامت مثبت بنویسیم .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{و} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a, b \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

و به زبان ریاضی می نویسیم

به مثال های زیر توجه کنید :

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \quad \text{و} \quad (-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49} \quad \text{و} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{125}} = \frac{125}{8} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

***نکته:** ترتیب انجام عملیات های ریاضی در محاسبات توانی :

(۱) پرانتز یا گروه (۲) توان یا جذر (۳) ضرب یا تقسیم (۴) جمع یا تفریق

مثال: حاصل عبارت داده شده را بدست آورید ؟

$$27 \left[\left(\frac{15}{36} \times \frac{12}{18} \right)^2 \div \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right]^2 = 3^3 \left[\frac{5^2}{3^2 \times 6^2} \times \frac{6^2}{5^2} \right]^2 = 3^3 \times \left(\frac{1}{3^2} \right)^2 = 3^3 \times \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

جواب:

$$27 = 3^3 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5^2}{6^2}$$

نمونه سوالات امتحانی خرداد ماه ۹۸ :

۱- حاصل عبارت $۳^{-۱} + ۴^{-۱}$ برابر کدام گزینه است ؟ (آذربایجان غربی)

$$۳^{-۱} + ۴^{-۱} = \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} = \frac{۴+۳}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲} \quad \text{جواب}$$

$$\frac{1}{۴} \quad (\text{د})$$

$$\frac{1}{۳} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{۷}{۱۲} \quad (\text{ب})$$

$$۷^{-۱} \quad (\text{الف})$$

$$۲^{-۳} + ۴^{-۱} = \frac{1}{۲^۳} + \frac{1}{۴} = \frac{1}{۸} + \frac{1}{۴} = \frac{۱+۲}{۸} = \frac{۳}{۸}$$

۲- حاصل عبارت روبرو را بدست آورید. (یزد)

$$۲^{-۱} \dots ۲^{-۲}$$

$$۵^۲ \dots (۰/۲)^{-۲}$$

۳- در جای خالی علامت ($< = >$) قرار دهید. (ایلام)

$$۲^{-۱} = \frac{1}{۲} \quad \text{و} \quad ۲^{-۲} = \frac{1}{۲^۲} = \frac{1}{۴} \rightarrow \frac{1}{۲} > \frac{1}{۴}$$

جواب :

$$۵^۲ = ۲۵ \quad \text{و} \quad (۰/۲)^{-۲} = \left(\frac{۲}{۱۰}\right)^{-۲} = \left(\frac{۱۰}{۲}\right)^۲ = ۵^۲ = ۲۵ \rightarrow ۵^۲ = (۰/۲)^{-۲}$$

۴- حاصل عبارت زیر را بنویسید. (تهران)

$$\frac{۲^۰}{۳} - ۳^{-۲} = \frac{1}{۳} - \frac{1}{۳^۲} = \frac{1}{۳} - \frac{1}{۹} = \frac{۳-۱}{۹} = \frac{۲}{۹}$$

***** فرزندم با توجه به مطالب بالا ، حالا شما حل کنید .

$$۴^{-۳} = \frac{1}{4^3} = \left(\frac{۲}{۷}\right)^{-۴} = \frac{1}{\dots} =$$

$$(۰/۳)^{-۴} = (-۶)^{-۲} =$$

$$۳^۴ \times ۳^۵ = ۳^{۴+۵} = ۳^۹$$

** در سالهای گذشته ضرب و تقسیم عبارات تواندار با پایه یا توان مساوی را یاد گرفتیم .

$$۶^۴ \times ۳^۴ = ۱۸^۴$$

(الف) در ضرب اعداد تواندار با پایه های مساوی ، یکی از پایه ها را نوشته و توانها را جمع می کنیم .

$$۲^۸ \div ۲^۵ = ۲^{۸-۵} = ۲^۳$$

(ب) در ضرب اعداد تواندار با توانهای مساوی ، پایه ها را ضرب کرده و یکی از توانها را می نویسیم .

$$۳^۷ \div ۸^۷ = \left(\frac{۳}{۸}\right)^۷$$

(ج) در تقسیم اعداد تواندار با پایه های مساوی، یکی از پایه ها را نوشته و توانها را کم می کنیم .

$$(۳^۴)^۵ = ۳^{۴ \times ۵} = ۳^{۲۰}$$

(د) در تقسیم اعداد تواندار با توانهای مساوی، پایه ها را بر هم تقسیم کرده و یکی از توانها را می نویسیم .

(ه) اگر عددی تواندار درون پرانتز مجدداً به توان برسد ، پایه را نوشته و توانها را در هم ضرب می کنیم .

*** این قوانین برای اعداد تواندار با توانهای صحیح منفی هم کاربرد دارد.

$$3^{-4} \times 3^5 = 3^{-4+5} = 3^1$$

$$6^{-4} \times 3^{-4} = 18^{-4}$$

$$2^{-8} \div 2^{-5} = 2^{-8-(-5)} = 2^{-3}$$

$$3^{-7} \div 8^{-7} = \left(\frac{3}{8}\right)^{-7}$$

$$(3^{-4})^5 = 3^{-4 \times 5} = 3^{-20} = \frac{1}{3^{20}}$$

مثال : پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید .

$$1) 5^{-3} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{125} \quad \checkmark \\ 5^{-3} = \frac{1+151}{5^3} = \frac{1}{125} \end{cases}$$

$$2) 3^{-1} \times 2^{-1} \rightarrow \begin{cases} 5^{-1} \\ 6^{-1} \quad \checkmark \end{cases}$$

$$3) 5^{-1} + 6^{-1} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad \checkmark \\ 11^{-1} \\ 5^{-1} + 6^{-1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$3^{-1} \times 2^{-1} = (3 \times 2)^{-1} = 6^{-1}$$

مثال : جرم یک اتم حدود 10^{-26} گرم است . جرم یک وزنه ی ۱۰۰۰ کیلو گرمی چند برابر جرم این اتم است ؟

جواب : هر کیلوگرم ۱۰۰۰ گرم است یعنی : $1000 = 10^3$ پس : $10^3 \times 10^3 = 10^6$

$$10^6 \div 10^{-26} = 10^{6-(-26)} = 10^{42}$$

***نکته : برای مقایسه ی اعداد تواندار (با توان عدد طبیعی) یکی از دو کار زیر را انجام دهیم تا راحت تر بتوانیم آنها را مقایسه کنیم .

الف) پایه ها برابر شوند . هر عددی با پایه ی بزرگتر از یک که توان بیشتری باشد، بزرگتر است .

مثال : اعداد تواندار روبرو را از کوچک به بزرگ از سمت چپ به راست مرتب کنید . 2^6 و 8^5 و 16^3 و 4^2

جواب : تمام پایه ها با تجزیه شدن ، به ۲ تبدیل می شوند .

$$2^6 \text{ و } 4^2 = (2^2)^2 = 2^4 \text{ و } 16^3 = (2^4)^3 = 2^{12} \text{ و } 8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$$

$$2^4 < 2^6 < 2^{12} < 2^{15} \quad \text{یا} \quad 4^2 < 2^6 < 16^3 < 8^5$$

***نکته:** اگر توانها برابر باشند و پایه عددی بین صفر و یک باشد . هر چه عدد به صفر نزدیکتر باشد حاصل عبارت کوچکتر است .

$$0./2^5 = 0./00032 < \left(\frac{5}{10}\right)^5 = 0./3125 < \left(\frac{8}{10}\right)^5 = 0./32768$$

ب) توان ها برابر شوند . هر عدد (با پایه ی بزرگتر از یک) که پایه ی بزرگتری داشته باشد . بزرگتر است .

$$8^{30} \quad 6^{45} \quad 2^{60}$$

مثال: اعداد تواندار داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$$(8^2)^{15} \quad (6^3)^{15} \quad (2^4)^{15}$$

جواب: تمام توانها بر ۱۵ بخش پذیرند (ب م م توانها ۱۵ است) پس می نویسیم :

$$64^{15} \quad 216^{15} \quad 16^{15}$$

اعداد درون پرانتز را به توان رسانده و می نویسیم :

در نهایت با توجه به اینکه توانها برابرند از کوچکترین پایه شروع به مرتب کردن می کنیم .

$$16^{15} < 64^{15} < 216^{15}$$

***نکته:** اعداد تواندار با پایه ی منفی :

با توجه به توان مثبت ، دارای حاصل مثبت و با توان منفی ، دارای حاصل منفی هستند. (به شرطی که پایه درون پرانتز باشد و توان بیرون پرانتز)

مثال: اعداد داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$$(-2)^8 = 2^8 = 256 \quad (-1)^{13} = -1^{13} = -1 \quad (-3)^5 = -3^5 = -243 \quad (-2)^8 \quad (-1)^{13} \quad (-3)^5$$

$$(-3)^5 < (-1)^{13} < (-2)^8$$

معادلات توانی

****** در حل اینگونه معادلات باید یکی از دو کار زیر را انجام داد :

- اگر مجهول مساله در توان قرار بگیرد ، برای بدست آوردن مقدار مجهول ؛ ابتدا باید دو طرف تساوی را به صورت یک عدد تواندار بنویسیم که **دو حالت** به وجود می آید .

$$(3^8)^{2x} = 81$$

$$3^{24x} = 3^4$$

- الف) **پایه ها مساوی باشند** که توانها نیز با هم برابر خواهند شد و

$$24x = 4$$

$$x = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

با حل یک معادله ی معمولی به جواب می رسیم .

- ب) **پایه ها مساوی نباشند** که در این حالت باید توانها را برابر جداگانه صفر قرار دهیم .

$$5^{2a-4} = 3^{5b+15}$$

$$2a - 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4}{2} = 2$$

$$5b + 15 = 0 \rightarrow 5b = -15 \rightarrow b = -\frac{15}{5} = -3$$

نمونه سوالات نهایی خرداد ماه ۹۸

۱) حاصل عبارات زیر را به صورت عددی تواندار با توان مثبت بنویسید .

$$(\frac{5}{2})^{-3} \times 125^4 = 5^{-6} \times (5^3)^4 = 5^{-6} \times 5^{12} = 5^6 \quad \text{کرمان :}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \times \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{11} \quad \text{اردبیل :}$$

$$\frac{3^4 \times 9^3}{3^{-2}} = \frac{3^4 \times (3^2)^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 3^4 \times 3^6 \times 3^2 = 3^{12} \quad \text{قم :}$$

$$\frac{16^{-2} \times 2^{-1}}{8^{-4} \times 4^2} = \frac{(2^4)^{-2} \times 2^{-1}}{(2^3)^{-4} \times (2^2)^2} = \frac{2^{-8} \times 2^{-1}}{2^{-12} \times 2^4} = \frac{2^{-9}}{2^{-8}} = \frac{2^8}{2^9} = \frac{1}{2} \quad \text{ایلام :}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} \times \left(\frac{10}{6}\right)^2 = \quad \text{**** فرزندم با توجه به سوالات حل شده ی بالا ، حالا شما حل کنید .}$$

$$64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} =$$

$$\frac{15^4 \div 15^{-4}}{3^7 \times 3} =$$

****** فرزندم : با توجه به توضیحات و نمونه سوالات حل شده انتظار دارم که**

صفحه ی ۶۰ تا صفحه ی ۶۴ از کتاب درسی را ابتدا با دقت مطالعه کرده و سپس پاسخ فعالیت ها ، کاردکلاس ها و تمرین را

بنویسید .

شناسایی اعداد اعشاری مثبت ، بزرگتر یا کوچکتر از یک : اگر عدد قبل از اعشار صفر بود، یعنی عدد داده شده کوچکتر از یک است . مثل : $0/03$ و $0/021$ و $0/00076$ و $0/58632$ و .. در همه ی این مثالها، عدد قبل از اعشار صفر است ، پس این اعداد کوچکتر از یک می باشند . اگر عدد قبل از اعشار ، عددی غیر از صفر بود، یعنی عدد داده شده بزرگتر از یک می باشد .

مثل : $255/3$ و $21/3558$ و $5/86$. در این مثالها، عدد قبل از اعشار یک عدد غیر صفر است، پس این اعداد بزرگتر از

یک هستند.

درس دوم : نماد علمی

احمد مشغول نوشتن یک مقاله علمی در مورد کهکشانها بود او می دانست که سرعت نور برابر با 300000000 متر بر ثانیه است. همچنین می دانست که در فضا برای محاسبات سرعت ، از سرعت نور استفاده می کنند. در مساله ی مورد نظر احمد باید مسافت طی شده ی نور در مدت 100 ساعت را باید محاسبه می کرد . او مشغول نوشتن شد و احساس می کرد که تعداد صفر های اعداد بدست آمده خیلی زیاد شدند و هر لحظه باید آنها را بشمارد تا دچار اشتباه نشود . و سرانجام بعد از صرف کلی وقت توانست محاسباتش را به پایان برساند .

او نوشت : ثانیه $360000 = 100 \times 3600 = 100$ ساعت ثانیه $3600 = 60$ دقیقه $1 = 60$ ساعت

مسافتی که شهاب سنگ در مدت 100 ساعت طی می کند. ثانیه/متر $1080000000000 = 360000 \times 300000000$

رضا که تا این لحظه فقط نظاره گر کارهای احمد بود ، گفت چرا این همه صفر نوشتی ؟ و نگاهی به مساله و اعداد انداخت . ناگهان به احمد گفت : بیا از صفر ها راحت شویم . احمد گفت : آخه مگر برای حذف صفر ها مجاز هستیم ؟

رضا گفت : خیر ، اما میدانیم که جدول ارزش مکانی اعداد بر حسب دسته های 10 تایی بنا شده اند، پس میتوان نوشت :

$$10 = 10^1 \text{ و } 100 = 10^2 \text{ و } 1000 = 10^3 \text{ و } \dots$$

لذا می شود اعداد بزرگ با این همه صفر را به صورت عددی اعشاری مثبت با یک رقم صحیح مخالف صفر در توانی از 10 نمایش بدهیم.

احمد گفت این را از کجا یاد گرفتی ؟ رضا گفت : آخه دیروز همین درس را آقا معلم داشت برایمان توضیح می داد .

حالا اعداد مساله را بر اساس مطلب بالا بنویسیم و نوشت :

$$10^5 \times \frac{3}{6} = 360000 = 100 \times 3600 = 100 \text{ ساعت} \quad 10^3 \times \frac{3}{6} = 3600 = 60 \text{ دقیقه} \quad 1 = 60 \text{ ساعت}$$

$$3 \times 10^8 = 300000000 = \text{سرعت نور}$$

$$\text{متر بر ثانیه} \quad 10^{14} \times \frac{1}{0.8} = 1.3 \times 10^{13} = \frac{10}{8} \times 10^5 \times \frac{3}{6} \times 10^8 = 3 \times 10^8$$

احمد گفت: چقدر ضرب ها راحتتر محاسبه شدند . البته از قوانین توان ها هم استفاده شد . حالا راه حلت را توضیح بده تا من هم یاد بگیرم .

رضا گفت که: هر عدد گویا را می توانیم به صورت یک عدد اعشاری مثبت ، با یک رقم صحیح غیر از صفر در توانی از 10 نمایش داد . مثلا 3600 را به صورت $\frac{3}{6}$ نوشت و به تعداد ارقام عدد داده شده غیر از 3 ، توانی برای 10 نوشت .

$$3600 = \frac{3}{6} \times 10^3 \quad \text{یعنی:}$$

در نماد علمی، کلیه اعداد به شکل: $a \times 10^n$ نوشته می‌شوند. که در آن توان n یک عدد صحیح، و ضریب a یک عدد مثبت حقیقی است

$$a \times 10^n, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \text{ و } 1 \leq a < 10$$

میتوان گفت که: نماد علمی روشی است برای نوشتن اعدادی که خیلی بزرگ یا خیلی کوچک هستند و نمی‌توان به سادگی آن‌ها را در نماد دهمی نوشت.

نماد علمی تعدادی ویژگی‌های کاربردی دارد و استفاده از آن در ماشین حساب‌ها و توسط دانشمندان، ریاضی‌دانان، متخصصین سلامت و مهندسان رایج است. همچنین انجام محاسبات ریاضی با نماد علمی راحت تر می‌باشد.

از جمله کاربردهای نماد علمی می‌توان در محاسبات فضایی، محاسبات مهندسی، پزشکی و ... اشاره کرد که در انتهای درس چند مثال از کاربرد نماد علمی در علوم مختلف را برایتان حل شده است.

برای نوشتن اعداد به صورت نماد علمی دو حالت داریم:

حالت اول: عددی که به ما داده شده، اعشار ندارد.

* * عدد 37532000000 رو با نماد علمی بنویسید.

$$3/7532000000$$

قدم اول: بعد از اولین رقم از سمت راست، یک اعشار بزنید.

قدم دوم: اکنون بعد از اعشاری که زدید، تعداد ارقام اعداد را بشمارید. تعداد ارقام بعد از ممیز = ۱۱ عدد

$$3/7532$$

قدم سوم: عدد ممیز زده را بدون صفرها بنویسید.

قدم چهارم: عدد $3/7532$ را در 10^{11} ضرب کنیم و عدد 11 را که در قدم دوم بدست آمده را به عنوان توان برای 10 بنویسیم.

$$37532000000 = 3/7532 \times 10^{11}$$

حالت دوم: عدد داده شده دارای اعشار باشد.

الف) عدد از یک بزرگتر است؟ بله خیر

مثال: عدد 0.000000000003258 را به صورت نماد علمی بنویسید.

قدم اول: تعیین کنید که عدد داده شده بزرگتر از یک یا کوچکتر از یک است. **کوچکتر از یک است**

قدم دوم: از سمت چپ عدد شروع به حرکت کنید، به اولین رقم غیر صفر که رسیدید بعدش یک اعشار بزنیم.

چون عدد داده شده خودش یک ممیز داشت، از ممیز عدد داده شده تا ممیزی که خودمان نوشتیم تعداد ارقام را بشماریم.

$$0.000000000003258$$

دوازده رقم

قدم سوم: در این مرحله عدد $3/258$ را در 10 ضرب کرده و برای توان 10 ، تعداد ارقامی که شماره‌ده ایم را با

علامت منفی بنویسیم.

$$0.000000000003258 = 3/258 \times 10^{-12}$$

ب) عدد بزرگتر از یک

مثال: عدد داده شده را با نماد علمی بنویسید.

$$۲۹۸۲۵۴۳۸۵۲/۰۲۱$$

$$\underbrace{۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲/۰۲۱}_{\text{نه رقم}}$$

قدم اول: از سمت چپ بعد از اولین رقم (مخالف صفر) یک ممیز بنویسید.

قدم دوم: تعداد ارقام بین ممیز عدد تا ممیزی که جدید زده ایم را بشمارید.

قدم دوم: عدد $۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲۰۲۱$ را در ۱۰ ضرب کنید. و تعداد ارقام شمارش شده ی بین دو ممیز (۹) را برای توان ۱۰ بنویسید.

$$۲۹۸۲۵۴۳۸۵۲/۰۲۱ = ۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲۰۲۱ \times ۱۰^{-۹}$$

سوالات آزمون نهایی خرداد ۹۸

(۱) شعاع خورشید ۶۹۵۰۰۰ کیلو متر است. این عدد را با نماد علمی بنویسید. (قم ۹۸)

جواب: عدد از یک بزرگتر است. پس از سمت چپ اولین عدد غیر صفر را مشخص کرده و جلوی آن ممیز نوشته و می نویسیم.

$$۶۹۵۰۰۰ = ۶/۹۵ \times ۱۰^۵$$

(۲) فاصله ی مریخ تا زمین ۹۷۱۰۰۰۰۰ کیلومتر است. این عدد را با نماد علمی بنویسید. (تهران ۹۸)

$$۹۷۱۰۰۰۰۰ = ۹/۷۱ \times ۱۰^۷$$

جواب:

(۳) قطر خورشید $۱/۴ \times ۱۰^۹$ متر و قطر زمین حدوداً $۱/۳ \times ۱۰^۷$ متر است. قطر خورشید چند برابر قطر زمین است؟

$$\frac{\text{قطر خورشید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{۱/۴ \times ۱۰^۹}{۱/۳ \times ۱۰^۷} = ۱/۰۸ \times ۱۰^۲ = ۱۰۸$$

جواب:

(۴) نمایش اعداد زیر را با نماد علمی بنویسید.

$$۷۸۴۰۰۰۰۰ = ۷/۸۴ \times ۱۰^۷$$

کرمان:

$$۱۳۹۸/۰۳۰۱ = ۱/۳۹۸۰۳۰۱ \times ۱۰^۳$$

اردبیل:

$$۹۸۰۰۰۰۰۰ = ۹/۸ \times ۱۰^۸$$

سیستان و بلوچستان:

$$۵۳۵۳۵۳ \times ۱۰^{-۷} = ۵/۳۵۳۵۳ \times ۱۰^۵ \times ۱۰^{-۷} = ۵/۳۵۳۵۳ \times ۱۰^{-۲}$$

سمنان:

(۵) نمایش اعشاری اعداد داده شده را بنویسید. (تالیفی)

جواب: چون توان ۱۰ منفی است این عدد از یک کوچکتر است پس: از عدد توان بدون در نظر گرفتن علامت، یک واحد کم

می کنیم و بعد از ممیز تا عدد ۲ به تعداد عدد حاصله صفر می نویسیم. ($۸-۱=۷$)

$$۲/۷۵ \times ۱۰^{-۸} = ۰/۰۰۰۰۰۰۰۲۷۵$$

هشت رقم

جواب: چون توان ۱۰ مثبت است این عدد از یک بزرگتر است پس: به تعداد ارقام بعد از ممیز از توان ۱۰ کم می کنیم و به

اندازه ی عدد بدست آمده جلوی عدد ۴ ، صفر می نویسیم. ($۶-۳=۳$)

$$۳/۰۲۴ \times ۱۰^۶ = ۳۰۲۴۰۰۰$$

شش رقم

۶) حاصل عبارات زیر را به دست آورید. (تالیفی)

$$6 \times 10^8 \times \frac{3}{5} \times 10^{-6} = \left(6 \times \frac{3}{5}\right) \times (10^8 \times 10^{-6}) = 22/2 \times 10^2 = 2/22 \times 10 \times 10^2 = 2/22 \times 10^3$$

۷) عبارات درست را با و عبارات نادرست را با مشخص کنید. (عبارات نادرست را به صورت درست بنویسید.) (تالیفی)

(۱) $2/68 \times 10^3 = 268000$ (۲) $5/8 \times 10^{-6} = 0/0000058$ (۳) $3/17 \times 10^{-4} = 0/0000317$ (۴) $9/8547 \times 10^5 = 985470$

$5/8 \times 10^{-6} = 0/0000058$ درست (۲) $2/68 \times 10^3 = 2680$ نادرست (۱)

$9/8547 \times 10^5 = 985470$ درست (۴) $3/17 \times 10^{-4} = 0/0000317$ نادرست (۳)

۸) اعداد داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. (تالیفی)

$1/5 \times 10^{-3}$ ، $1/7 \times 10^{-2}$ ، $4/35 \times 10^{-2}$ ، $2/8 \times 10^{-2}$

ابتدا با توجه به توانهای عدد ۱۰ به مقایسه می پردازیم، در صورتی که توانها برابر بودند، سراغ قسمت اعشاری رفته و آنها را با هم مقایسه می کنیم. با توجه به توانهای عدد ۱۰ داریم: $-3 < -2$ ، چون سه عدد دارای توان -2 هستند اکنون باید اعداد اعشاری را مقایسه کنیم:

$$1/7 < 2/8 < 4/35$$

$1/5 \times 10^{-3} < 1/7 \times 10^{-2} < 2/8 \times 10^{-2} < 4/35 \times 10^{-2}$ و در نهایت داریم:

*** فرزندم: حالا با توجه به توضیحات و نمونه سوالات حل شده انتظار دارم که صفحه ی ۶۵ تا صفحه ی ۶۷ از کتاب درسی را ابتدا با دقت مطالعه کرده و سپس پاسخ فعالیت ها، کاردرکلاس ها و تمرین را بنویسید.

موفق باشید و سربلند.

محسن رضائی دبیر ریاضی دبیرستان امام صادق (ع) شهرستان اهواز ناحیه ی ۳

جزوه فصل چهارم

پایه نهم

موضوع : ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

گردآورنده: آقای اعتمادنژاد

شهریور ۹۹





موضوع: جمع و تفریق رادیکال‌ها

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

همانطور که در سال گذشته خواندید برای ضرب و تقسیم رادیکال‌ها باید فرجه‌ها مثل هم باشند.

نکته ۱:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad (a \text{ و } b \text{ مثبت (اعداد حسابی)})$$

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

مثال: ضرب و تقسیم کنید.

$$\text{الف) } \sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{7 \times 2} = \sqrt{14}$$

$$\text{ب) } \sqrt{150} \div \sqrt{5} = \sqrt{\frac{150}{5}} = \sqrt{30}$$

نکته: گاهی اوقات پس از ضرب و تقسیم می‌توان جذر گرفت.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{27} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

نکته ۲: همین مطلب (نکته ۱) برای فرجه ۳ نیز استفاده می‌شود.

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \quad a \text{ و } b \text{ عدد حقیقی}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0)$$

مثال:

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{128} \div \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

نکته ۳:

اما برای جمع و تفریق تساوی‌های زیر همیشه برقرار نیستند.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \neq \sqrt[3]{a+b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a-b}$$

سوال: آیا تساوی زیر درست است؟ چرا؟

$$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{25}$$

حل: خیر، زیرا:

$$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{25} \Rightarrow \underbrace{2/2 + 4/4}_{6/8} = 5 \Rightarrow 6/8 \neq 5$$

سوال ۱: حاصل هر عبارت را بدست آورید؟

الف) $-5\sqrt{3} \times 2\sqrt{5} = (-5 \times 2)(\sqrt{3} \times \sqrt{5}) = -10\sqrt{15}$

ب) $7\sqrt[3]{-2} \times 9\sqrt[3]{4} = (7 \times 9)(\sqrt[3]{-2 \times 4}) = 63\sqrt[3]{-8} = 63 \times (-2) = -126$

پ) $15\sqrt{50} \div 3\sqrt{2} = (15 \div 3)\sqrt{\frac{50}{2}} = 5\sqrt{25} = 5 \times 5 = 25$

ت) $42\sqrt[3]{250} \div 14\sqrt[3]{2} = (42 \div 14)\sqrt[3]{\frac{250}{2}} = 3\sqrt[3]{125} = 3 \times 5 = 15$

سوال ۲: آیا تساوی $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$ درست است؟ خیر بلی

سوال ۳: اگر مساحت یک مکعب $24a^2$ باشد حجم آن بر حسب a چیست؟

الف) $8a^3$ ب) $8a^2$ پ) $64a^3$ ت) $16a^3$

حل: $24a^2 \div 6 = 4a^2 \rightarrow \sqrt{4a^2} = 2a \rightarrow 2a \cdot 2a \cdot 2a = 8a^3$

۹) حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (خ ۹۶ گیلان)

$$\sqrt[2]{\sqrt{5} \times 4 \sqrt{25}} = (2 \times 4) \sqrt{5 \times 25} = 8 \sqrt{125} = 8 \times 5 = 40$$

۲) حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (خ ۹۶ یزد)

$$\frac{\sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{54 \times 20}{5}} = \sqrt[3]{54 \times 4} = \sqrt[3]{216} = 6$$



جمع و تفریق رادیکال‌ها:

نکته ۱: ساده کردن یک عبارت رادیکالی را در سال گذشته خواندید. مثال:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

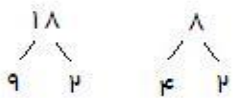
نکته ۲: برای جمع و تفریق عبارات رادیکالی در صورتی که رادیکال‌ها مثل هم باشند از فاکتورگیری کمک می‌گیریم:

الف) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (5 + 2)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
 ب) $18\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (18 - 2)\sqrt{7} = 16\sqrt{7}$

نکته ۳: گاهی اوقات برای جمع و تفریق عبارات رادیکالی باید ابتدا تجزیه کنیم:

$$\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{4 \times 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

جذر دارد جذر دارد



نکته ۴: اگر قبل از رادیکال عددی داشتیم بعد از جذر گرفتن ضرب می‌کنیم:

$$5\sqrt{27} - 2\sqrt{12} = 5\sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{4 \times 3} = 5 \times 3\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 15\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

نکته: برای جمع و تفریق رادیکال‌ها

(۱) قسمت رادیکالی دو عدد بعد از ساده کردن یکسان باشند.

(۲) فرجه رادیکال‌ها باید مثل هم باشند. مثال:

$${}^2\sqrt{5} + {}^2\sqrt{2} \rightarrow \text{نمی‌توان جمع کرد}$$

تمرین:

(۱) حاصل را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\begin{aligned} \sqrt{90} + \sqrt{160} - \sqrt{40} &= \sqrt{9 \times 10} + \sqrt{16 \times 10} - \sqrt{4 \times 10} \\ &= 3\sqrt{10} + 4\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = (3 + 4 - 2)\sqrt{10} = 5\sqrt{10} \end{aligned}$$

(۲) حاصل را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\begin{aligned} -2\sqrt{54} + 5\sqrt{16} - 2\sqrt{27 \times 2} + 5\sqrt{8 \times 2} &= -2 \times 3\sqrt{2} + 5 \times 2\sqrt{2} \\ &= -6\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

(۳) الف) مساحت مربعی به ضلع $5\sqrt{2}$ را بدست آورید.

یک ضلع ضربدر خودش = مساحت مربع

$$5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = (5 \times 5)(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 25 \times \sqrt{4} = 25 \times 2 = 50$$

ب) محیط مربع بالا را محاسبه کنید.

۴) حاصل را به ساده ترین صورت بدست آورید.

$$\sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{324 + 1 + 36}{81}} = \sqrt{\frac{361}{81}} = \frac{19}{9}$$

سوالات امتحان نهایی فصل ۴

۱) عبارت زیر را ساده کنید. (خ ۹۶ کردستان)

$$7\sqrt{20} - \sqrt{45} = 7\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5} = 7 \times 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$$

۲) حاصل را به ساده ترین صورت بدست آورید. (تهران خ ۹۶)

$$3\sqrt{45} - \sqrt{5} = 3\sqrt{9 \times 5} - \sqrt{5} = 3 \times 3\sqrt{5} - 1\sqrt{5} \\ = (9 - 1)\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

۳) حاصل عبارت مقابل را ساده کنید.

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = \sqrt{36 \times 2} - \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ = (6 - 4 + 1)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$



گویا کردن مخرج کسره‌های رادیکالی

محاسبه کدام یک از عبارتهای زیر راحت تر است؟

$$\text{الف) } \frac{2}{5} + \frac{3}{7}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{7}}$$

نکته: برای گویا کردن مخرج

الف) وقتی فرجه رادیکال ۲ باشد کافی است صورت و مخرج کسر را در رادیکال مخرج ضرب کنیم.

مثال: مخرج عبارت زیر را گویا کنید.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5 \times \sqrt{5}}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

ب) اگر فرجه رادیکال ۳ باشد گویا کردن مخرج دو حالت دارد:

۱) عدد زیر رادیکال توان یک داشته باشد که در این حالت صورت و مخرج کسر را در رادیکال با توان دو ضرب می‌کنیم.

$$\frac{-17}{\sqrt[3]{2}} = \frac{-17 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2 \times \sqrt[3]{2^2}}} = \frac{-17 \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-17 \sqrt[3]{4}}{2}$$

۲) عدد زیر رادیکال توان دو داشته باشد که در این حالت صورت و مخرج کسر را در رادیکال مخرج با توان یک ضرب می‌کنیم.

$$\frac{4}{\sqrt[2]{7^2}} = \frac{4 \times \sqrt[2]{7}}{\sqrt[2]{7^2 \times \sqrt[2]{7}}} = \frac{4 \times \sqrt[2]{7}}{\sqrt[2]{343}} = \frac{4 \times \sqrt[2]{7}}{7}$$

(۱) مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{5}{\sqrt[2]{a}} = \frac{-5 \times \sqrt{a}}{\sqrt[2]{a} \times \sqrt{a}} = \frac{-5\sqrt{a}}{2a}$$

(۲) برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[2]{x}}$ باید صورت و مخرج را در ضرب شوند.

الف) $\sqrt{x^2}$ (ب) x (پ) \sqrt{x} (ت) $\sqrt[2]{x}$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{x}} = \frac{1 \times \sqrt{x^2}}{\sqrt[2]{x} \times \sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt[2]{x^3}} = \frac{\sqrt{x^2}}{2x}$$

حل:

(۳) ساده شده عبارت $\frac{15}{\sqrt[2]{5}}$ پس از گویا کردن مخرج کدام است؟

الف) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (پ) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (ت) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

سوالات امتحان نهایی

(۱) مخرج کسر را گویا کنید. (خ ۹۶ مازندران)

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[2]{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt[2]{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2 \times 5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

(۲) مخرج کسر را گویا کنید. (خ ۹۶ کهگیلویه و بویراحمد)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \times \sqrt[2]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[2]{2^2}} = \frac{\sqrt[2]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[2]{4}}{2}$$

(۳) مخرج کسر را گویا کنید. (مولف)

$$\frac{-5}{\sqrt[3]{4a}} = \frac{-5 \times \sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{2^2 a} \times \sqrt[3]{2a^2}} = \frac{-5 \times \sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{2^3 a^3}} = \frac{-5 \times \sqrt[3]{2a^2}}{2a}$$