

هو الحق

ایستگاه مطالعه

درسنامه ، نکات و تمرینات فصل اول ریاضی نهم به قلم : زکی پور - خیریت - مرداسی - عزیزی

مقدمه



گئورگ کانتور (۱۸۴۵_۱۹۱۸)

ریاضیدان آلمانی

خالق نظریه مجموعه ها

برخی مفاهیم با اینکه قابل تعریف نیستند (بنداشت) ولی ما آنها را درک میکنیم و میشناسیم؛ از جمله مفاهیم که در ریاضیات قابل تعریف نبوده اند و با آن آشنا شده اید مفهوم نقطه و خط بوده است. در فصل اول ریاضیات نهم با یکی دیگر از مفاهیم غیر قابل تعریف ریاضی با نام مجموعه آشنا خواهید شد.



دانش آموزان عزیز، یک شخص به اسم آقا علی که دانش آموز باهوشی هستند سعی میکند جایی که توضیحات فهمیدنش سخت می باشد از من سوال بپرسد که بیشتر توضیحش بدهم. اگر میخواهید دقیقاً مطالب را یاد بگیرید به سوالات آقا علی دقت کنید و جایی که انتظار می رود آقا علی مثال بزند شما هم یک مثال بزنید.

درس اول: معرفی مجموعه

توضیح مجموعه: برای بیان و نمایش دسته یا گروهی از اشیا، حروف، اعداد و ... که متمایز (غیر تکراری) و کاملاً مشخص هستند، از مجموعه استفاده میکنیم.

آقا علی: ببخشید آقا من فهمیدم متمایز بودن یعنی مثلاً عدد تکراری توی مجموعه نباشه ، ولی اینکه میگویم کاملاً مشخص باشه یعنی چی؟



پاسخ: علی جان یک عبارت زمانی مشخص کننده ی مجموعه است که کاملاً گویا و شفاف باشد یعنی به طور دقیق مشخص کند چه چیزهایی در مجموعه قرار دارند و چه چیزهایی در آن مجموعه قرار ندارند. حالا علی جان به مثال های زیر دقت کنید:

مثال ۱: عبارت «شمارنده های عدد ۱۶» یک مجموعه را مشخص میکند چون کاملاً مشخص که اعداد ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ در مجموعه قرار میگیرند و عددی مثل ۳ در مجموعه نخواهد بود.

مثال ۲: عبارت « اعداد بسیار کوچک» مجموعه نیست، چون این عبارت کاملاً مشخص نمیکند چه عددهایی در مجموعه قرار دارند. ممکن است یک نفر عدد ۱ را کوچک بداند و شخص دیگری عدد ۰/۰۰۰۰۱/.

حالا علی جان شما مثالی بگو:



مثال ۳ از آقا علی:

آقا عبارت «چهار عدد مرکب کوچکتر از ۱۰» یک مجموعه را مشخص میکند چون کاملاً مشخص است اعداد ۴ و ۶ و ۸ و ۹ در این مجموعه قرار دارند.

ایستگاه حل سوال

۱. با دلیل مشخص کنید کدام عبارت مجموعه است و کدام عبارت مجموعه نیست؟

(الف) چهار میوه خوشمزه

پاسخ: مجموعه نیست. چون انتخاب چهار میوه کاملاً سلیقه ایست و دقیقاً مشخص نمیکند چه میوه ای در مجموعه است.



(ب) سه فصل از سال

پاسخ: مجموعه نیست. چون هر سال چهار فصل دارد، در نتیجه دقیقاً مشخص نیست چه فصل های در مجموعه هستند.

(پ) کل حالت های پرتاب یک تاس استاندارد

پاسخ: مجموعه است. چون کاملاً مشخص است که اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ در مجموعه هستند.

(ت) پنج شاعر معروف ایرانی

پاسخ: مجموعه نیست. چون کاملاً مشخص نیست چه شاعرانی در این مجموعه قرار میگیرند.



۲. کدام عبارت مشخص کننده یک مجموعه است؟ دلیل خود را بیان کنید.

(الف) سه اعداد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه نیست. چون اعداد اول کمتر از ۱۰ عبارتند از: ۲ و ۳ و ۵ و ۷، پس دقیقاً مشخص نیست کدام سه تا از این اعداد در مجموعه قرار دارند.

(ب) پنج عدد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه نیست. چون تعداد اعداد اول کمتر از ۴ تا می باشد پس نمیتوان پنج عدد متمایز اول از آنها انتخاب کرد.

(پ) اعداد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه است. کاملاً مشخص است که اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ در این مجموعه هستند.

(ت) شمارنده های اول عدد ۱۲

پاسخ: مجموعه است. چون کاملاً مشخص است شمارنده های اول عدد ۱۲ اعداد ۲ و ۳ میباشند.

(ث) مضارب اول ۱۱

پاسخ: مجموعه است. چون کاملاً مشخص است. تنها مضرب اول عدد یازده خود ۱۱ است که در مجموعه قرار می گیرد.

۳. عباراتی که یک مجموعه را مشخص می کنند را با «✓» و عباراتی که یک مجموعه را مشخص نمی کند را با «X» مشخص کنید.

(الف) سه عدد زوج متوالی. (ب) اعداد حسابی کوچکتر از ۱.

(پ) جواب معادله $2x - 1 = 3$ (ت) اعداد صحیح بزرگتر از -۱

پاسخ: الف X (چون اعضاء نامشخص هستند) ب ✓ پ ✓ ت ✓

ایستگاه مطالعه

نمایش های مختلف مجموعه: مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری میکنیم و به صورت های زیر نمایش می دهیم.

۱. استفاده از یک جفت آکولاد: به این نوع نمایش ، نمایش تفصیلی مجموعه میگویند.

بطور مثال اگر A مجموعه ی شمارنده های عدد ۱۰ باشد، نمایش تفصیلی A به صورت زیر است:

$$A = \{1, 2, 5, 10\}$$

۲. نمایش هندسی (نمودار ون): اعضای مجموعه را داخل یک دایره یا اشکال هندسی قرار می دهیم. دقت شود بین

اعضا در این روش «و» قرار نمی دهیم. به طور مثال اگر B مجموعه ی مضرب های طبیعی و یک رقمی عدد ۳ باشد

نمایش هندسی آن بصورت زیر است:



۳. نمایش ریاضی: با استفاده از علائم ریاضی رابطه ی جبری برای مجموعه تعریف میشود. این نوع نمایش را در

ایستگاه های مطالعه بعدی بررسی خواهیم کرد.

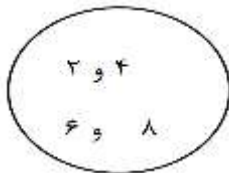
آقا علی: آقا اجازه از کجا بفهمیم از کدوم نمایش برای جواب باید استفاده کنیم؟



آفرین علی جان سوال خوبی پرسیدی. این سه روش معادل هستند و هیچ تفاوتی نداره که شما از چه روشی استفاده کنی ، مگر اینکه در صورت سوال روش خاصی عنوان گردد. به طور مثال اگر بخواهیم مجموعه ی اعدادی که نه اول هستند و نه مرکب را به صورت مجموعه نمایش دهیم از دو روش تفصیلی و هندسی (نمودار ون) استفاده می کنیم.

$$\{1\} \text{ یا } 1$$

حالا علی جان شما یک مثال بزنید.

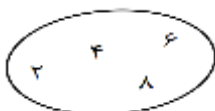


آقا علی: آقا اجازه «مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۱۰»؛

به روش تفصیلی میشه: $\{2, 4, 6, 8\}$ نمودار ون هم



علی جان خیلی خوب نوشتی فقط یک اشتباه کوچیک داره ما در نمودار ون بین اعضا " و " قرار نمیدیم بلکه اعضا را با فاصله از هم مینویسیم یعنی بایستی اینطور نمایش میدادی:



عضو مجموعه: هر کدام از اعداد، اشیاء، افراد و ... که درون یک مجموعه قرار می گیرند را عضوی از مجموعه می گویند. برای مثال اگر مجموعه ی A به صورت $A = \{a \text{ و } ۳ \text{ و } ۲\}$ را در نظر بگیریم. برای مثال می گوییم a عضوی از مجموعه ی A است و می نویسیم $a \in A$ و همچنین برای عددی مثل ۴ که عضو مجموعه ی A نیست می نویسیم: $۴ \notin A$



آقا علی: آقا اجازه این نکته را داریم: نماد عضو بودن: \in و نماد عضو نبودن: \notin

به نحوه ی استفاده از نماد عضویت دقت کنید. اگر بنویسیم $A \in ۳$ ، با توجه به این که این عبارت را " A عضو ۳ است" می خوانیم، بی معنی و عبارتی نادرست است و عبارت درست به صورت $۳ \in A$ است.



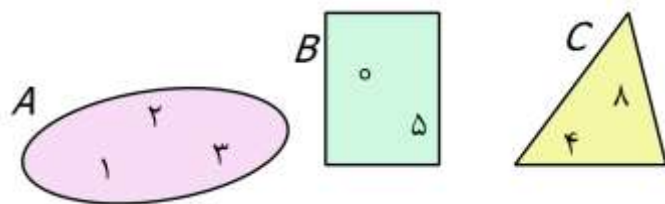
آقا علی: آقا اجازه مثلا اگر مجموعه ی A شمارنده های عدد ۱۸ باشد، مجموعه ی A به صورت زیر است:

$$A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۶ \text{ و } ۹ \text{ و } ۱۸\} \text{ و داریم: } ۶ \in A \text{ و } ۱۲ \notin A \text{ و } ۲ \notin A \text{ و } ۱ \in A$$

علی جان همه ی پاسخ ها درست بود به جز $۲ \notin A$ چون در A عضو ۲ وجود دارد پس باید $۲ \in A$ می نوشتی.

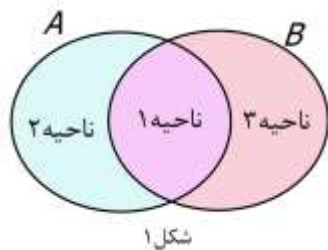
توجه: با بیان چند مثال می خواهیم با نحوه ی کشیدن نمودار ون برای تعدادی مجموعه آشنا شویم.

مثال (۱) مجموعه های $A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳\}$ و $B = \{۵ \text{ و } ۵\}$ و $C = \{۴ \text{ و } ۸\}$ را با نمودار ون نمایش دهید. دقت کنیم سه مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند. در این حالت سه نمودار کاملا مجزا (جدا از هم) ترسیم می کنیم.



مثال (۲) مجموعه های $A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳\}$ و $B = \{۱ \text{ و } ۵ \text{ و } ۲\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.

اگر خوب دقت کنید اعداد ۱ و ۲ هم عضو A هستند و هم عضو B پس مجبوریم قسمتی از دو نمودار را درون هم ترسیم کنیم.



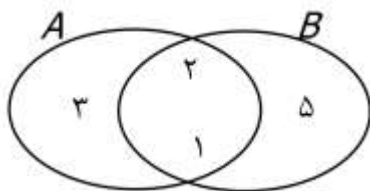
به شکل ۱ دقت کنید. برای قرار دادن اعداد در نمودار به صورت زیر عمل می کنیم:

در ناحیه شماره ۱ اعدادی را قرار می دهیم که هم در A باشند و هم در B

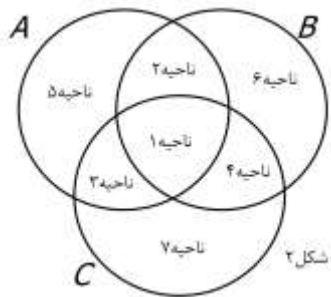
در ناحیه ی ۲ اعدادی را می نویسیم که فقط در A هستند.

در ناحیه ی ۳ اعدادی را می نویسیم که فقط در B هستند.

پس اعضاء را در نمودار طبق شکل مقابل می نویسیم



مثال ۳) مجموعه های $A = \{a \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵\}$ و $B = \{b \text{ و } ۲ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷\}$ و $C = \{c \text{ و } ۲ \text{ و } ۷ \text{ و } ۴\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.



با توجه به شکل ۲ برای کامل کردن نمودار ون برای سه مجموعه به ترتیب شماره ناحیه ها عمل میکنیم.

ناحیه ۱: اعضای که در سه مجموعه مشترک هستند.

ناحیه ۲: اعضای که هم در A و هم در B هستند، ولی در C قرار ندارند.

ناحیه ۳: اعضای که هم در A و هم در C هستند ولی در B نیستند.

ناحیه ۴: اعضای که هم در B و هم در C هستند ولی در A نیستند.

ناحیه ۵: اعضای که فقط در A هستند.

ناحیه ۶: اعضای که فقط در B هستند.

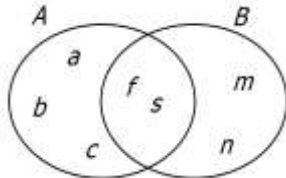
ناحیه ۷: اعضای که فقط در C هستند.

برای پاسخ به مثال ۳: در ناحیه ۱: عدد ۲ در ناحیه ۲: عدد ۵ در ناحیه ۳: عضو قرار نمیگیرد.

در ناحیه ۴: عدد ۷ در ناحیه ۵: عضوهای a و ۳ در ناحیه ۶: عضو b در ناحیه ۷: عضوهای c و ۴ (شکل ۲)

ایستگاه حل سوال

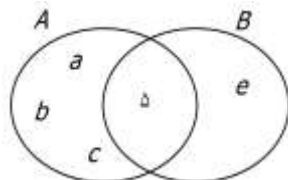
۱) اعضای مجموعه های A, B را با اعضایشان با توجه به نمودار ون داده شده مشخص کنید.



پاسخ: $A = \{a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } f \text{ و } s\}$ و $B = \{s \text{ و } f \text{ و } m \text{ و } n\}$



۲) با توجه به نمودار ون مقابل در جای خالی علامت \in یا \notin قرار دهید.



$b \dots A$ $d \dots B$ $a \dots B$ $b \dots A$

پاسخ:

$d \in A$ $d \in B$ $a \notin B$ $b \in A$



۳) با توجه به مجموعه $A = \left\{-1 \text{ و } ۳ \text{ و } -(-۲)^۴ \text{ و } \frac{-۹}{۳}\right\}$ در جای خالی علامت \in یا \notin قرار دهید.

$۱ \dots A$ $-۱۶ \dots A$ $۳ \dots A$ $۱۶ \dots A$ $۰ \dots A$

پاسخ: ابتدا در صورت امکان اعضاء را ساده میکنیم سپس به سوال جواب میدهیم در نتیجه داریم:

$$A = \left\{-1 \text{ و } \cancel{۳} \text{ و } -(-۲)^4 \text{ و } \cancel{\frac{-۹}{۳}}\right\} = \{-1 \text{ و } ۱ \text{ و } -۱۶ \text{ و } -۳\}$$

پس: $۱ \in A$ $-۱۶ \in A$ $۳ \notin A$ $۱۶ \notin A$ $۰ \notin A$



نکته: در یک مجموعه با جابه جا کردن اعضا، مجموعه ی جدیدی ایجاد نمیشود.

به طور مثال مجموعه های $\{۲ و ۳ و ۵\}$ با $\{۳ و ۲ و ۵\}$ و $\{۵ و ۳ و ۲\}$ همگی یکسان هستند و یک مجموعه را مشخص میکنند.

نکته: اگر در یک مجموعه عضو تکراری وجود داشته باشد، اعضای تکراری را حذف میکنیم و آن عضو را فقط یکبار مینویسیم.

بطور مثال مجموعه ی $\{۲ و ۳ و ۵ و ۲ و ۳ و ۵\}$ عضو ۲ دوبار و ۳ سه بار تکرار شده اند که تکرارهایشان را حذف میکنیم و مجموعه را به حالت استاندارد $\{۲ و ۳ و ۵\}$ مینویسیم.

تعداد اعضای یک مجموعه (عدد اصلی مجموعه)

به تعداد عضوهای یک مجموعه، عدد اصلی آن مجموعه میگویند. عدد اصلی یک مجموعه مثل B را با نماد $n(B)$ نمایش می دهیم.

مثال ۱: $A = \{۱ و ۳ و ۵ و ۷\}$ بنابراین $n(A) = ۴$



آقا علی: آقا اجازه اگر مجموعه عضوهای تکراری داشت و عدد اصلی مجموعه رو پرسیده بود اقا باید بشماریمشون یا طبق نکته اول مجموعه رو استاندارد کنیم بعد تعداد اعضای مجموعه رو مشخص کنیم؟

علی جان ابتدا اعضای تکراری رو حذف میکنیم بعد عدد اصلی مجموعه رو تعیین میکنیم.

به این مثال دقت کن: $n(A) = ۳ \rightarrow A = \{۲ و ۵ و ۶\}$ $A = \{۲ و ۶ و ۵ و ۶ و ۲ و ۶\}$

سوال ۱: اعضای هر مجموعه را مشخص کنید و تعداد اعضای هر کدام را تعیین کنید.

الف) مجموعه ی اعداد اول بین ۲۰ و ۳۵

ب) مجموعه ی اعداد فرد بین ۵ و ۱۶

ج) مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک دو عدد ۳۰ و ۱۸

پاسخ:

الف) $n(A) = ۳ \leftarrow A = \{۲۳ و ۲۹ و ۳۱\}$

ب) $n(B) = ۵ \leftarrow B = \{۷ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۵\}$

ج) مقسوم علیه های عدد ۳۰: ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۳۰

مقسوم علیه های عدد ۱۸: ۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۹ و ۱۸

مجموعه مقسوم علیه های مشترک دو عدد عبارت است از: $C = \{۱ و ۲ و ۳ و ۶\}$ بنابراین $n(C) = ۴$



مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه ی تهی می گوئیم.
مجموعه تهی را با $\{\}$ یا \emptyset نمایش می دهیم. دقت کنید مجموعه های $\{0\}$ یا $\{\emptyset\}$ مجموعه ی تهی نیستند.
توجه: با توجه به تعریف مجموعه تهی $n(\emptyset)=0$ یعنی عدد اصلی مجموعه تهی صفر است.

مثال: الف) مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر از یک، تهی است.

ب) مجموعه ی مضارب اول عدد ۴، چون ۴ عددی مرکب است پس مضرب اولی ندارد این مجموعه تهی است.

ج) مجموعه ی اعداد صحیح بین ۰ و -۱، تهی است.

بیشتر بدانیم

مجموعه یکانی: مجموعه هایی که فقط یک عضو دارند را یکانی می گوئیم.

مثال: مجموعه ی مضرب های اول عدد ۷. زیرا هر عدد اول فقط یک مضرب اول که خودش دارد پس این مجموعه یکانی و تنها عضو آن خود ۷ است.

مجموعه ی اعداد صحیح بین ۱ و -۱ تنها عدد صحیح بین این دو عدد ۰ میباشد پس این مجموعه نیز یکانی است.
مجموعه ی $\{\emptyset\}$ این مجموعه نیز یکانی است و تنها عضو آن \emptyset میباشد.

گاهی تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد است. به شرط آنکه بین این اعضا نظم وجود داشته باشد، میتوانیم ابتدا تعدادی از آنها را نوشته و بعد سه نقطه را قرار دهیم (...). و سپس آخرین عضو مجموعه را بنویسیم.

$$A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } 1000\}$$

اگر تعداد عضوهای یک مجموعه قابل شمارش باشند، یعنی جایی به پایان برسد (حتی اگر خیلی زیاد باشد) به آن مجموعه منتهای می گوئیم. مجموعه A یک مجموعه ی منتهای با ۱۰۰۰ عضو می باشد.

در صورتی که مجموعه دارای بی شمار عضو باشد یعنی عضوهای آن تمام نشود آن را مجموعه نامتناهی می گوئیم.

$$B = \{3 \text{ و } 6 \text{ و } 9 \text{ و } \dots\} \text{ مانند مجموعه مضارب طبیعی عدد } 3$$

ایستگاه حل سوال



۱. مجموعه $\{\emptyset \text{ و } 0\}$ چند عضو دارد؟ پاسخ: ۲ عضو

۲. مجموعه $\{0 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } \dots\}$ چند عضو دارد؟ پاسخ: ۱۱ عضو

۳. در مورد تعداد اعضای مجموعه $\{0 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } \dots\}$ چه می توان گفت؟

پاسخ: این مجموعه نامتناهی است پس بی شمار عضو دارد.



برای یادگیری بیشتر و مرور مطالب تمرینات صفحه ی ۵ کتاب درسی را حل کنید.