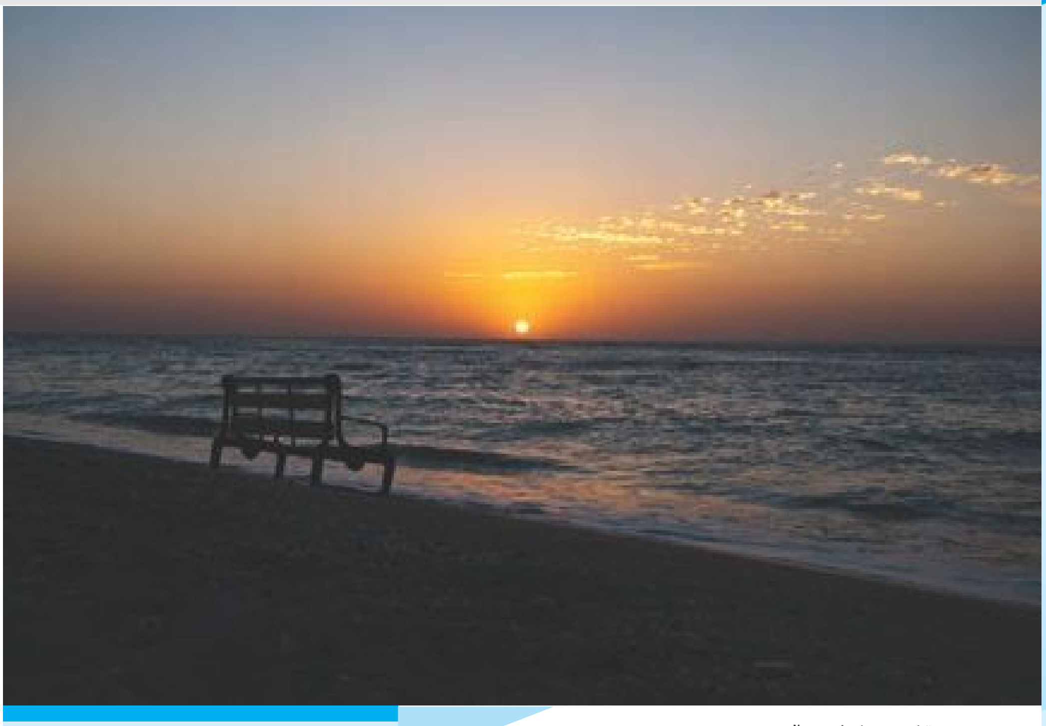
فصل ۳

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت



عکاس: سیدمهدی حسینی

جزیره قشم، روستای شیب‌دراز

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهدهٔ دریا، حس می‌کند که بخشی از بی‌نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهدهٔ طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشایندی را در ما برمی‌انگیزد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان شب نیز آن باشد که هیچ انتهایی برای آن دیده نمی‌شود!

درس اوّل

حد بی‌نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش‌نیازها باید ارائه گردد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x-a)$:

فعالیت

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^2} - 5x + 1 & x-3 \\ \cline{2-2} -(\boxed{2x^2} - 6x) & 2x + \boxed{1} \\ \hline \quad \cancel{x} + 1 & \\ -(\boxed{x} - 3) & \\ \hline \quad\quad 4 & \end{array}$$

۱ الف) چندجمله‌ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x-3)$ تقسیم کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید :

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم $R = 4$.

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید. $f(3) = 2(3)^2 - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$

ت) $f(3)$ و R چه رابطه‌ای با هم دارند؟ برابرند

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید : $2x^2 - 5x + 1 = (x-3)(2x + \boxed{1}) + 4$

۲ الف) اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج‌قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقیماندهٔ آن عدد ثابت R باشد :

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \cline{2-2} & Q(x) \\ \hline R & \end{array}$$

رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است :

$$f(x) = (x-a)\,Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x = a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطهٔ فوق خواهیم داشت :

$$f(a) = \underbrace{(a-a)\,Q(a)}_{0} + R \Rightarrow f(a) = R$$

ب) از رابطهٔ اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می‌شود که :

قضیه : در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

نتیجهٔ حاضر را می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

کار در کلاس

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

۱ در چندجمله‌ای $۳x^۲-۵x-۲ = f(x)$، مقدار $f(۲)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۲-۵x-۲ & x-۲ \\ \hline -(۳x^۲-۶x) & ۳x+۱ \\ \quad x-۲ & \\ -(x-۲) & \\ R=۰ & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم داریم : $f(x)=۳x^۲-۵x-۲=(x-۲)(۳x+۱)$

همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به‌صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده‌است.

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

۲ چندجمله‌ای $g(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ را در نظر بگیرید.

$g(-۱)=۲(-۱)^۳+(-۱)^۲+۱=-۲+۱+۱=۰$

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+۱)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟ بلی

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید :

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳+x^۲+۱ & x+۱ \\ \hline -(۲x^۳+۲x^۲) & ۲x^۲-x+۱ \\ -x^۲+۱ & \\ -(-x^۲-x) & \\ x+۱ & \\ -(x+۱) & \\ ۰ & \end{array}$$

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

$g(x)=(x+۱)(۲x^۲-x+۱)$

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر دوجمله‌ای $x+۲$ بخش‌پذیر است.

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

$f(-۲)=۲(-۲)^۳+۵(-۲)^۲-۳(-۲)-۱۰$

$=-۱۶+۲۰+۶-۱۰=۰ \Rightarrow R=۰$

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایهٔ قبل آشنا هستیم :

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به‌طوری که $m \neq ۰$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

مثال[۱] :

$$\lim_{x\to ۵}\frac{x^۲-۳x+۲}{x+۱}=\frac{۱۲}{۶}=۲$$

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a)=g(a)=۰$، در این صورت دیگر قضیهٔ بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a)=۰$ و $g(a)=۰$، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال : مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}$ را محاسبه کنید.

حل : صورت و مخرج کسر به ازای $x=۱$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x-۱)$ بخش‌پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(x-۱)}(x+۲)}=\frac{۱+۱}{۱+۲}=\frac{۲}{۳}$$

۱ــ در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجهٔ صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با فرجهٔ حداکثر ۳ مورد بحث هستند. بنابراین تابع‌های شامل قدر مطلق، جزء صحیح و نسبت‌های مثلثاتی مدنظر نیستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال : حد تابع $f(x)=\dfrac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}$ را در نقطهٔ $x=-۲$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x=-۲$ برابر صفرند. باید عامل $(x+۲)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل‌ضرب عامل‌های اوّل تجزیه کنیم. اما برای تجزیهٔ صورت، آن را بر $(x+۲)$ تقسیم می‌کنیم :

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{۲x^۳}+۳x^۲+۴ & x+۲ \\ \cline{2-2}
-(\cancel{۲x^۳}+۴x^۲) & ۲x^۲-x+۲ \\ \cline{1-1}
\quad \cancel{-x^۲}+۴ & \\
\quad -(\cancel{-x^۲}-۲x) & \\ \cline{1-1}
\qquad \cancel{۲x}+\cancel{۴} & \\
\qquad -(\cancel{۲x}+\cancel{۴}) & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad ۰ &
\end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم می‌توان نوشت $۲x^۳+۳x^۲+۴=(x+۲)(۲x^۲-x+۲)$. بنابراین :

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=\lim_{x\to -۲}\frac{\cancel{(x+۲)}(۲x^۲-x+۲)}{\cancel{(x+۲)}(x^۲-۲x+۴)}=\frac{۸+۲+۲}{۴+۴+۴}=۱$$

تذکر : گاهی صورت یا مخرج تابع $\dfrac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$. در این حالت برای محاسبه حد $\dfrac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

مثال : حد تابع $g(x)=\dfrac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ را در نقطهٔ به طول $x=۵$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطهٔ ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $۲+\sqrt{x-۱}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\lim_{x\to ۵} g(x)=\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}\times\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}=\lim_{x\to ۵}\frac{۴-(x-۱)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{-\cancel{(x-۵)}}{\cancel{(x-۵)}(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-۱}{۲+۲}=\frac{-۱}{۴}$$

مثال : حد تابع $h(x)=\dfrac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ را در $x=۸$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : هم حد صورت و هم حد مخرج در $x=۸$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x\to ۸} h(x)=\lim_{x\to ۸}\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim_{x\to ۸}\frac{x\,\cancel{(x-۸)}(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{\cancel{x-۸}}=۸(۴+۴+۴)=۹۶$$

کار در کلاس

$\rightarrow \frac{+1-1}{-1+\sqrt{1}} = \frac{0}{0}$

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+3x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9}$

ت) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

ث) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$

ج) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}$

ت) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+\sqrt{2x+3}} \times \frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-\sqrt{2x+3}}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \frac{\boxed{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}^{A}}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{A}{(x+1)(x-3)}$

$= \frac{(-2)(-1-\sqrt{1})}{(-1-3)} = \frac{4}{-4} = -1$

صورت و مخرج صفر شود

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{(3)(2)} = \frac{1}{6}$

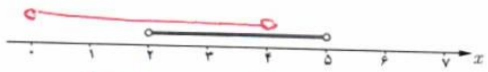
حد نامتناهی

تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطه مثل a، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ‌تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطهٔ a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می‌کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.
به‌عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a\ ,\ b)$ آنگاه بازهٔ (a, b) یک همسایگی x_0 می‌باشد.

بله

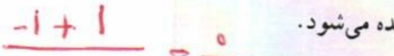
مثال : بازهٔ (۵ , ۲) یک همسایگی ۳ است. آیا بازهٔ (۴ , ۰) هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



$\Rightarrow (1, 4)$

همسایگی محذوف : اگر بازهٔ (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\ ,\ b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود.

$\frac{-1+1}{1-3+2} = \frac{0}{0}$



مثال : مجموعهٔ $(\frac{5}{2}\ ,\ 4) - \{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می‌باشد.

ج) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{(x+1)(x+2)} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$

$= \frac{1}{(1)(1+1+1)} = \frac{1}{3}$

حل کار در کلاس ۵۳/۱

الف) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x^2+3x} \Rightarrow \frac{9-9}{9-9} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ حد صورت و مخرج صفر می‌شود

$\lim_{x \to -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \frac{-3-3}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$

ب) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-6x+1}{2x^2+x-1} = \frac{4(\frac{1}{2})^2-6(\frac{1}{2})+1}{2(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-1} = \frac{1-3+1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(4x-2)}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(2x+2)} = \frac{4(\frac{1}{2})-2}{2(\frac{1}{2})+2} = \frac{0}{3} = 0$

$$\begin{array}{l|l} 4x^2-6x+1 & x-\frac{1}{2} \\ \hline (6x^2-2x) & 4x-2 \\ -2x+1 & \\ (-2x+1) & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+x-1 & x-\frac{1}{2} \\ \hline (2x^2-x) & 2x+2 \\ 2x-1 & \\ (2x-1) & \\ 0 & \end{array}$$

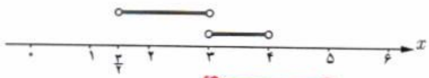
پ) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9} \Rightarrow \frac{9-15+6}{54-117+72-9} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(2x^2-7x+3)} = \frac{3-2}{18-21+3} = \frac{1}{0}$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-13x^2+24x-9 & x-3 \\ \hline -(2x^3-6x^2) & 2x^2-7x+3 \\ -7x^2+24x-9 & \\ -(-7x^2+21x) & \\ 3x-9 & \\ 3x-9 & \end{array}$$

> **همسایگی چپ و راست :** اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_\circ , x_\circ + r)$ یک همسایگی راست $x_\circ$ نامیده می‌شود. همچنین، $(x_\circ - r , x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می‌نامیم.

مثال : بازهٔ $(۳ , ۴)$ یک همسایگی راست ۳ و بازهٔ $(\frac{۳}{۲} , ۳)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.



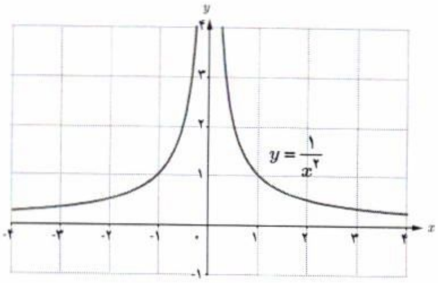
(۳و۵) ⇒ راست
(۱و۳) ⇒ چپ

فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x \to \circ} \frac{۱}{x^۲}$ را در صورت وجود به‌دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ در هر نقطهٔ غیرصفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f = \mathbb{R} - \{\circ\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	۰/۲-	۰/۱-	۰/۰۱-	۰/۰۰۰۱-	$\to \circ \leftarrow$	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲
$f(x) = \frac{۱}{x^۲}$	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	$\to ? \leftarrow$	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰	۲۵

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار $x^۲$ نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{۱}{x^۲}$، به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار[۱] تابع $y = \frac{۱}{x^۲}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازهٔ کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقدارهای بزرگ‌شونده $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim\limits_{x \to \circ} \frac{۱}{x^۲}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to \circ} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$.



تذکر : همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim\limits_{x \to \circ} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{۱}{x^۲}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این‌گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

۱ــ رسم نمودار تابع‌های گویا جزو اهداف کتاب حاضر نمی‌باشند.

تعریف ۱ : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

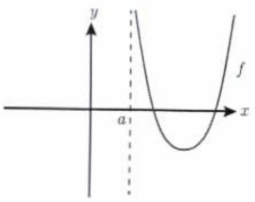
رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

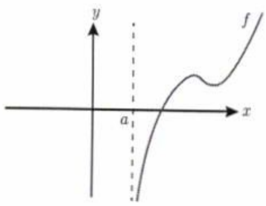
حدهای یک طرفهٔ نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳ : فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

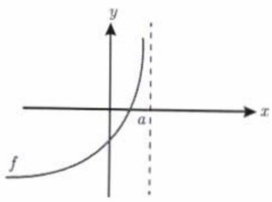
به نمودار مربوط به $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک‌طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



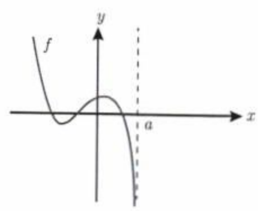
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

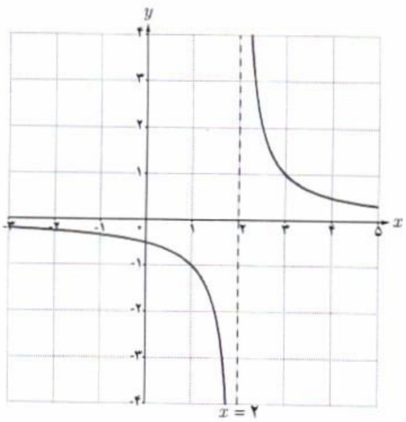


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

مثال : حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ را در $x=۲$ به دست آورید.



حل : نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=۲$ دقت نمایید. وقتی $x \to ۲^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\frac{۱}{x-۲}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود. بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۲}=+\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x \to ۲^-$، مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{۱}{x-۲}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۱}{x-۲}=-\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیهٔ زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ در این صورت :

الف) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیهٔ قبل، برای حالتی که $x\to a^+$ و یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$ را محاسبه کنید[۱].

حل : مخرج در نزدیکی $\frac{۱}{۲}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{۱}{۲}$ برابر ۳- است.
پس بنابر قسمت (پ) قضیهٔ قبل داریم :

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}=-\infty$$

مهم (۱ــ در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که به‌صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشند. بنابراین حالت‌هایی مثل $\infty\times ۰$ و $\infty-\infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سؤالات ارزشیابی الزامی است.)

الف) $\frac{۲(۵)}{۵^- - ۵} = \frac{۱۰}{۰^-} = -\infty$ | ث) $\frac{[-\frac{۱}{۳}]}{|۳(-\frac{۱}{۳})+۱|} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$

پ) $\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۲} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$

کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵}$

ب) $\lim_{x\to ۵^+} \frac{۲x}{x-۵} \Rightarrow \frac{۲(۵)}{۵^+-۵} = \frac{۱۰}{۰^+} = +\infty$

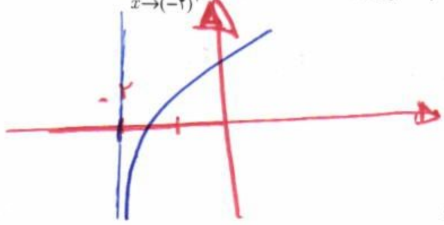
پ) $\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۲}$

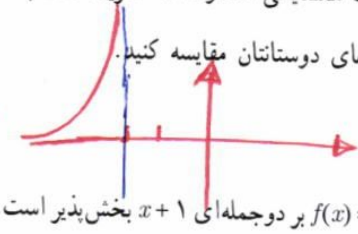
ت) $\lim_{x\to ۳} \frac{۲}{|x-۳|} = \frac{۲}{|۳-۳|} = \frac{۲}{۰} = +\infty$

ث) $\lim_{x\to -\frac{۱}{۳}} \frac{[x]}{|۳x+۱|}$

ج) $\lim_{x\to ۰} \frac{x+۱}{\sin^۲ x} = \frac{۰+۱}{\sin^۲ ۰} = \frac{۱}{۰} = +\infty$

۲ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = +\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.





تمرین

۱ الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ بر دوجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}$ ب) $\lim_{x\to ۵} \frac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}$ پ) $\lim_{x\to -۴} \frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}$

۳ حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}$ ب) $\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}$ پ) $\lim_{x\to -۸} \frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}$

۴ حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{|x|} = \frac{-۱}{۰} = -\infty$

پ) $\lim_{x\to ۱^-} \frac{۱}{x-۱} = \frac{۱}{۱^- - ۱} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$

ت) $\lim_{x\to -۶} \frac{۹}{(x+۶)^۲} = \frac{۹}{۰^+} = +\infty$

ث) $\lim_{x\to ۳} \frac{-۱}{(x-۳)^۴} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$

ج) $\lim_{x\to \frac{-۱}{۲}} \frac{۴x+۱}{(۲x+۱)^۲} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$

چ) $\lim_{x\to ۳^+} \frac{۱-۵x}{x^۲-۹} = \frac{۱-۱۵}{۹^+-۹} = \frac{-۱۴}{۰^+} = -\infty$

ح) $\lim_{x\to(-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲-۴}$

خ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x} = \frac{۱}{۰} = \infty$

د) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x$

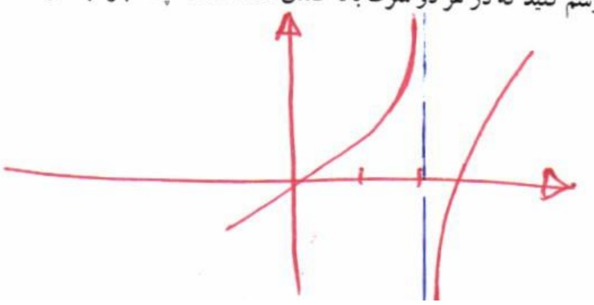
ذ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x$

ر) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳}$

۵ الف) عبارت $\lim_{x\to ۲^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim_{x\to ۲^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟



تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

تمرین صفحه ۵۷ ← ۵۷/۱

تمرین ۱

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -2+1+1 = 0 \Rightarrow R=0$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \hline -x^2+1 & \\ -(-x^2-x) & \\ \hline x+1 & \\ x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

تمرین ۲

الف)

$$\frac{2(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}}{4(\frac{1}{2})^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(2x)}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(4x+2)} = \frac{1}{(2+2)} = \frac{1}{4}$$

ب)

$$\frac{125-100-20-5}{25-25} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x^2+x-1)}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \frac{25+5-1}{5+5} = \frac{29}{10}$$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

ب)

$$\frac{16-12-4}{-64+64-4+4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to -4} \frac{\cancel{(x+4)}(x-1)}{\cancel{(x+4)}(x^2+1)} = \frac{-5}{17}$$

از روش های تقسیم یا هورنر می توان استفاده کرد

تمرین ۳

الف)

$$\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x-\sqrt{2x-1}}{x(x-1)} \times \frac{x+\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{2x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{2x-1})} = \frac{0}{1(1+1)} = 0$$

ب)

$$\frac{9-9}{2-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{4-x-1}$$

$$-1\,\cancel{(3-x)}$$

$$= \frac{6(4)}{-1} = -24$$

حل تمرین ۵۷/۲

۳/۵۷

ب) $\frac{-16+16}{-2+2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to -8} \frac{2(x+8)}{\sqrt[3]{x}+2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$

$= \lim_{x\to -8} \frac{2\cancel{(x+8)}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{(x+8)}} = \frac{2(4-4+4)}{1} = 8$

۴/۵۷

ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

ج) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

د) $\lim_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^--3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

الف) یعنی حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کمتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، از هر عدد مثبتی (مثبت دلخواه) بزرگتر می‌شود

ب) حد تابع f وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، از هر عدد منفی دلخواه، کوچکتر می‌شود.

درس دوم

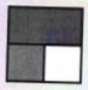
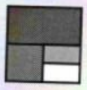
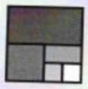
حد در بی‌نهایت

حد در بی‌نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شد، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحلهٔ اوّل، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحلهٔ دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۲^۲}$	$\frac{۷}{۸}=۱-\frac{۱}{۲^۳}$	$\frac{۱۵}{۱۶}=۱-\frac{۱}{۲^۴}$	...

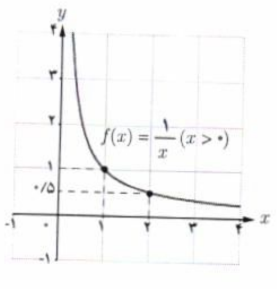
$۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}}=۱-\frac{۱}{۱۰۲۸}=\frac{۱۰۲۷}{۱۰۲۸}$

الف) در مرحلهٔ دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

$۱-\frac{۱}{۲^n}$

ب) در مرحلهٔ nام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحلهٔ nام چه می‌توان گفت؟



مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $(۰\ ,\ +\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\to +\infty$
$f(x)=\frac{۱}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\to ?$ ۰

از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار x، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصلهٔ $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ باشد، لازم است x بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰ انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصلهٔ $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۱ باشد؟
با این شرایط می‌گوییم حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. به‌طور کلی می‌توان گفت:

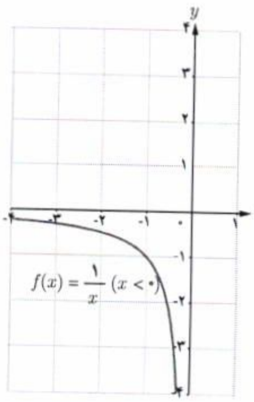
> اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

> فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظه نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ که در بازهٔ $(-\infty,0)$ رسم شده است، دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

x	$-\infty \leftarrow$	...	-1000000	-100000	-1000	-100
$f(x)=\frac{1}{x}$	۰ ؟ $\leftarrow$	...	$-0/000001$	$-/00001$	$-/001$	$-0/01$



ب) $\dfrac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{3x}{x}\right)} = \dfrac{1}{0-3} = -\dfrac{1}{3}$

در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیهٔ زیر مفیدند.

قضیه ۱ : فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این‌صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$.

قضیه ۲ : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=m$. در این صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\pm\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l\pm m$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l.m$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}=\dfrac{l}{m}\quad (m\neq 0)$

تذکر : قضیهٔ ۲ برای وقتی که $x\to-\infty$ نیز برقرار است.

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}$ را به دست آورید.

حل : برای محاسبهٔ این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x\to+\infty$، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2\neq 0$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7x^2-4x+1}{x^2}}{\frac{3x^2+5x-6}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(7-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2})}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}7-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}}=\frac{7-0+0}{3+0-0}=\frac{7}{3}$$

۱ الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{3x}{x}+\frac{2}{x})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{x}-\frac{1}{x})}=\dfrac{3+0}{1+0}=3$

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1-5t^2}{t^2+3t}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2-3x}$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1-5t^2}{t^2+3t}=\dfrac{\lim\limits_{t\to-\infty}(\frac{1}{t^2}-\frac{5t^2}{t^2})}{\lim\limits_{t\to-\infty}(\frac{t^2}{t^2}+\frac{3t}{t^2})}=\dfrac{0-5}{1+0}=-5$

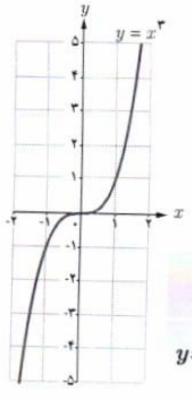
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{x+2}=-1$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x^2-2x}{x^2}=100$

حد نامتناهی در بی‌نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، مقدار آنها یعنی $f(x)$ می‌تواند به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این‌گونه تابع‌ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مثال : تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\to +\infty$
$y=x^3$	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰	$\to +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می‌دهند که با افزایش مقدار x، مقدار x^3 هم افزایش می‌یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می‌توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$. در حالت کلی داریم :

تعریف : فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a \,,\, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می‌شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می‌توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$. در حالت کلی می‌توان گفت :

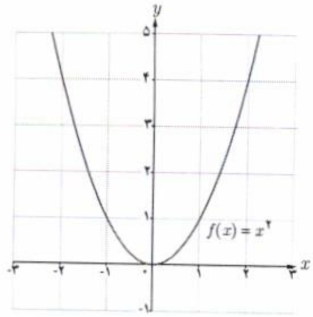
تعریف : فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty \,,\, b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱ : رابطه‌های $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.

تذکر ۲ : رابطه‌هایی مانند $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ را حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم. همچنان‌که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت‌هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چراکه $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

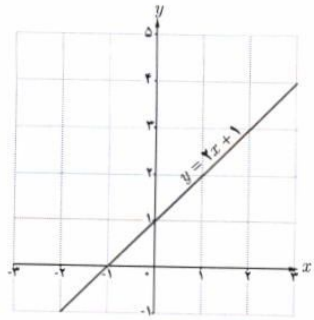
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



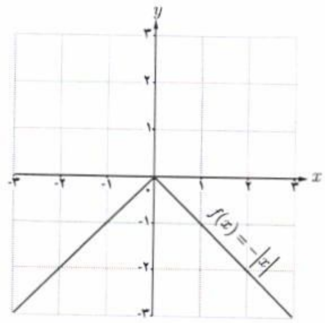
الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



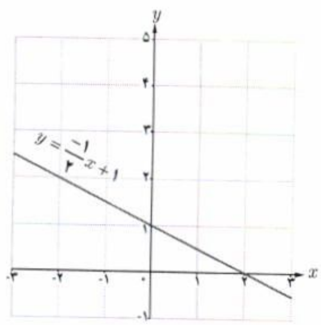
ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty$



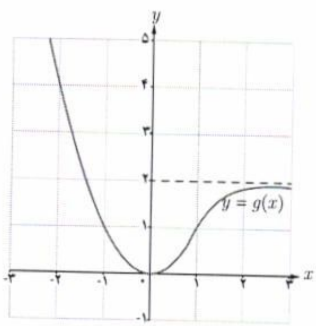
پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



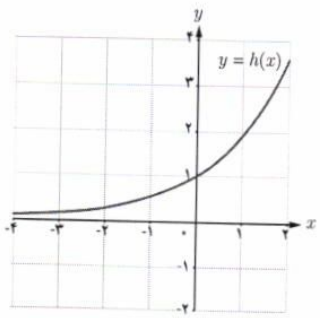
ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = -\infty$



ث) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$



ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

از قضیهٔ زیر برای محاسبهٔ حد تابع یک‌جمله‌ای $f(x) = ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه : فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

مثال : حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x-۳+۵x^۲)$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳+۴x^۲-۵x-۹)$

حل :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x-۳+۵x^۲)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^۲(\frac{۲}{x}-\frac{۳}{x^۲}+۵)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{۲}{x}$ و $\frac{۳}{x^۲}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین :

$$\lim_{x\to+\infty}x^۲(\frac{۲}{x}-\frac{۳}{x^۲}+۵)=\lim_{x\to+\infty}x^۲(۰-۰+۵)=\lim_{x\to+\infty}۵x^۲=+\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۳+۴x^۲-۵x-۹)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^۳(-۲+\frac{۴}{x}-\frac{۵}{x^۲}-\frac{۹}{x^۳})=\lim\limits_{x\to-\infty}x^۳(-۲+۰)$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-۲x^۳)=+\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جملهٔ با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی :

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت :

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبه حد توابع گویا، زمانی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۱۲x^۵+۷x^۳-۲x-۹}{۳x^۲-۸x+۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۱۲x^۵}{۳x^۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-۴x^۳)=+\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳-۵x+۴}{۷x^۳-۱۱x^۲-۶x}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x+۴}{x^۳+x-۸}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}$

(الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳}{۷x^۳}=\frac{۲}{۷}$ و (ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x}{x^۳}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵}{x^۲}=\frac{۵}{+\infty}=۰$

تمرین

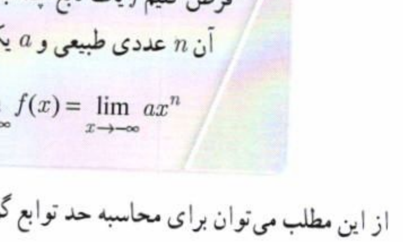
۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۰$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۰$, $\lim\limits_{x\to۰}f(x)=$ حد ندارد

ب) $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=۱$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-۱$

(الف)

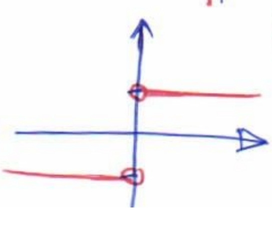


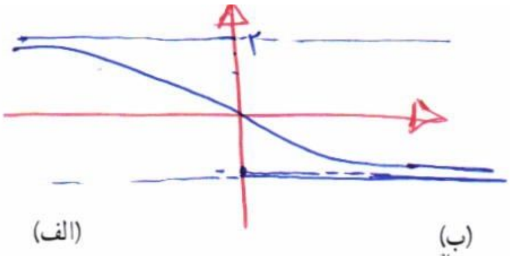
$\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=-\infty$

(پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۷}{۲x^۳}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-۲x^۴)=-۲(+\infty)=-\infty$

(ب)

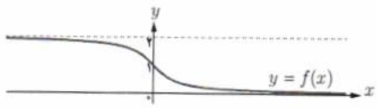




رسم تمرین ۵

۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

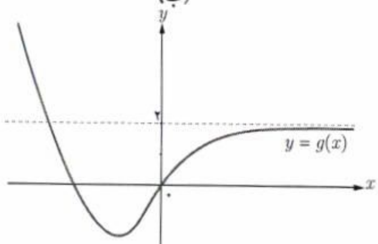
(الف)



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۲$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۰$

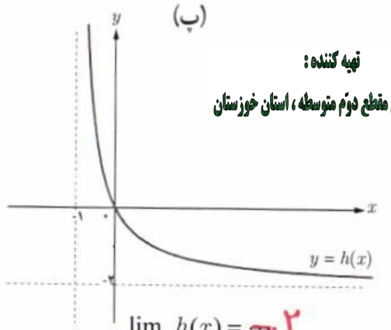
(ب)



$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = ۲$

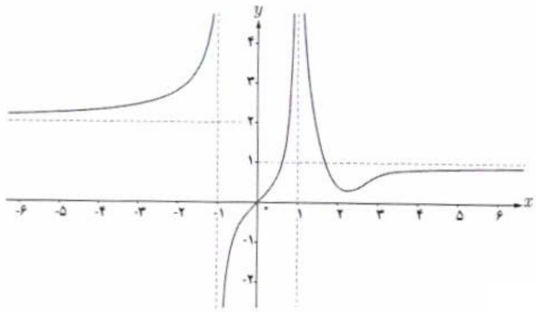
(پ)



$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -۲$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x) = +\infty$

۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(۹+\frac{۷}{x^۳}) = ۹+۰ = ۹$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳) = -(+\infty) = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲x-۳} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲x} = \frac{۱}{-\infty} = ۰$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵} = \frac{۳+۰}{۰-۵} = -\frac{۳}{۵}$

ث) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳x+۱} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۳x} = \frac{۲}{۳}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲$

چ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵}{x^۲} = ۲(-\infty)^۳ = -\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۲+x}{۳-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

خ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳}{۲x^۳} = -۳$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{۴} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۴} = ۲(+\infty) = +\infty$

۵ الف) هر یک از رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -۱$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ۲$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

(الف) $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه می‌توان به ۱- نزدیک کرد، مشروط به آنکه x به اندازه کافی بزرگ اختیار شود.

(ب) $f(x)$ را به اندازه کافی می‌توان به عدد ۲ نزدیک کرد، مشروط به آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.