

فصل ۱ - آمار و احتمال

درس ۱ شمارش

درس ۲ احتمال

درس ۳ چرخه آمار در حل مسائل

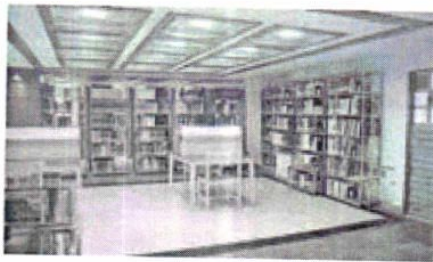
«... و أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا» (آیه ۲۸ / سوره مبارکه جن)
«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را شمارش کرده است»



درس ۱

شمارش

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، $۲۵ + ۳۰ = ۵۵$ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (علیها السلام) است. او می‌تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسد: $۲ + ۳ = ۵$

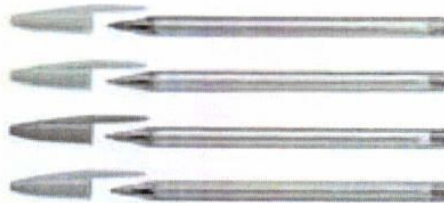
شما برای حل کردن هر دو قسمت، از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به صورت زیر بیان می‌شود.

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را بتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

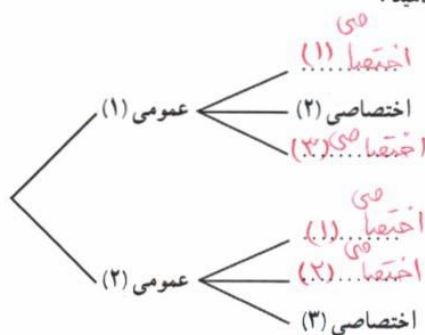
مثال: شما به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ‌های متفاوت و سه روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟
 حل: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیاء می‌تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم:

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} = 5 + 4 + 3 = 12$$



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می‌خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی $3 \times 2 \times 1$ راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

مثال: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام‌داران و هیئت‌امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می‌گیرند. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر مشورت بگیرد؟
 ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

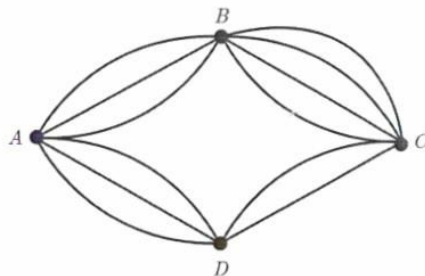
راه حل:

الف) از اصل جمع استفاده می‌کنیم؛ زیرا مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A «یا» یک نفر از گروه B را به $7+8=15$ طریق انتخاب کند.

ب) در این حالت، مدیرعامل می‌تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند «و» به ازای هر انتخاب از A، به ۸ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به $7 \times 8 = 56$ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه‌رو، میان چهار شهر A، B، C، D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان:
 الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟ از A به B سه راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $3 \times 4 = 12$ طریق می‌توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ «یا» $A \rightarrow D \rightarrow C$ را انتخاب کرد (اصل جمع)؛ بنابراین:
 تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های سفر از A به C

$$= 3 \times 4 + 3 \times 2 = 12 + 6 = 18$$

ب) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow C \rightarrow D$ «یا» $B \rightarrow A \rightarrow D$ را انتخاب کرد؛ پس داریم:
 تعداد راه‌های مسافرت از B به D = $4 \times 2 + 2 \times 3 = 17$

نماد فاکتوریل

همان‌طور که برای ضرب یک عدد، مانند a ، در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $a \times a = a^2$ ، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می‌کنیم. برای مثال، $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ و $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$

قرار داد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می‌کنیم.
مثال: حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \overbrace{(3 \times 2 \times 1)}^{3!}}{\underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_{3!}} = 5 \times 4 = 20$

پ) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

ت) $\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} = \frac{6 \times 120 \times 1}{7 \times 6 \times 120 \times 1} = \frac{1}{7}$

جایگشت

چهار شیء متمایز a, b, c, d را در نظر بگیرید. آرایش یا حالت $abcd$ ، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم.»

فعالیت

۱- اگر افراد A, B, C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

$$\frac{3}{A \text{ یا } B \text{ یا } C} \quad \frac{2}{\text{یکی از ۲ نفر باقی مانده}} \quad \frac{1}{\text{۱ نفر باقی مانده}} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

(اول شخص B ، بعد C و آخر A سخنرانی کرده‌اند)

۲- با ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$\frac{5}{\text{تعداد انتخاب‌ها}} \rightarrow \frac{5}{5} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{1} \rightarrow 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

۳- ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیاء یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $(n-1)!$ انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با، $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

$$\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \dots \quad \underline{2} \quad \underline{1}$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن شیء می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{5}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2} \rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.) بنابراین:

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{4}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{1} \rightarrow 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های فرد - تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

$$= 120 - 96 = 24$$

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر

حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم:

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{5}{5} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{1} \rightarrow 5! = 120$

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{4}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{2} \rightarrow 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 192$

$$120 + 192 = 312 = \text{تعداد ۵ رقمی‌های زوج}$$

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۵ رقمی هایی که به ۵ ختم می شوند + ۵ رقمی هایی که به صفر ختم می شوند = تعداد ۵ رقمی های مضرب ۵

تعداد انتخاب ها → $\frac{5}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ اصل ضرب
 صفر

تعداد انتخاب ها → $\frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ اصل ضرب
 ۵

تعداد ۵ رقمی های مضرب ۵ = $120 + 96 = 216$

تبدیل (انتخاب r شیء از بین n شیء، که در آن جابه جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد.)

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست.)

تعداد انتخاب ها → $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ اصل ضرب

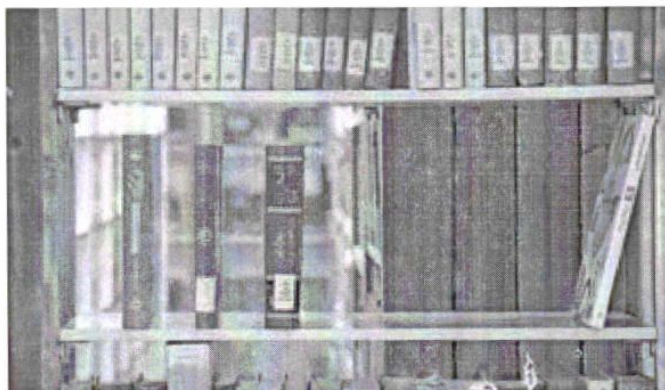
از طرفی: $7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \cdot 1}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!} = 840$

(توجه دارید که با جابه جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت ها، جابه جایی ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

تعداد انتخاب ها → $5 \times 4 \times 3 = 60$ اصل ضرب

از طرفی: $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$



۳. در حالت کلی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n ($r \leq n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد،

برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!}$

$$\begin{aligned} \text{تعداد انتخاب‌ها} &\rightarrow \frac{n}{n} \frac{n-1}{n-1} \frac{n-2}{n-2} \dots \frac{(n-r+2)}{(n-r+2)} \frac{(n-r+1)}{(n-r+1)} \\ \text{طبق اصل ضرب} &\rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)(n-r+1)}{(n-r)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \times (\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-r)}_{(n-r)!})}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

* تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و بنا بر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).
حل: در واقع باید سه رقم را از بین ۱۰ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

$$\text{روش اول: } P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$\text{روش دوم: } \frac{10}{10} \frac{9}{9} \frac{8}{8} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 10 \times 9 \times 8 = 720$$

* ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جابه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد).

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر $3! \dots$ تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۴	۱,۲,۶	۱,۴,۶	۲,۴,۶
جایگست های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۶۴
	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_1 = \{1,2,4\}$	$A_2 = \{1,2,6\}$	$A_3 = \{1,4,6\}$	$A_4 = \{2,4,6\}$

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$

* ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟
حل: در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

روش اول: $\underline{9} \quad \underline{8} \quad \underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5} \longrightarrow 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

روش دوم: $P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120$

۲. به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟
در ساختن تیم با جابه جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی شود بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم:

$$\text{تعداد تیم های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6! \times 3!} = 84$$

۳. مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟
هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می سازد (در مجموعه ها جابه جایی اعضا اهمیت ندارد): بنابراین، داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

۴. در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟
در انتخاب مهره های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده اند. در صورت، ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

تمرین

۱. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟
 $12 + 11 + 10 = 33$

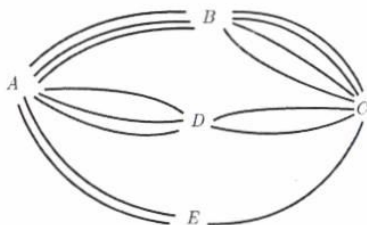
۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:

(الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ $\leftarrow (3 \times 4) + (3 \times 2) + (2 \times 1) = 20$

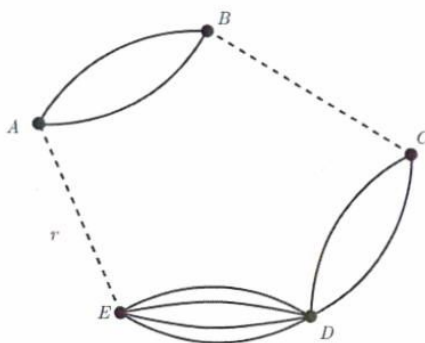
(ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟ \leftarrow

(پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟ $(3 \times 4) + (4 \times 3) = 26$

$$\leftarrow 3 + (2 \times 4 \times 3) = 27$$



۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)
الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟
ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟
پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟
۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟
۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟
۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛ الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از 80000 می توان نوشت؟ پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟ ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟
۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟ ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟
۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:
الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.
ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.
پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.
ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.
۹. مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$ باشد.
۱۰. تعداد راه ها یا جاده ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به 2^0 طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



حل تمرینهای صفحه ۱۱

تمرین ۳:

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

ب) $4 \times 3 \times 1 = 12$

پ) $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

تمرین ۴:

$$p(10, 2) = \frac{10!}{8!} = 90$$

تمرین ۵:

$$7 \times 2 \times 3 = 42$$

تمرین ۶:

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

ب) $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$

پ) $\binom{6}{3} = 20$

ت) $\binom{10}{5} \times \binom{6}{1} = 252 \times 6 = 1512$

کافی است تعداد زیر مجموع های دو عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ را پیدا کنیم.

$$\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

تمرین ۷:

الف) $\binom{12}{3} = 220$

ب) $\binom{12}{2} = 66$

تمرین ۸:

الف) $\binom{5}{3} \times \binom{6}{3} = 10 \times 20 = 200$

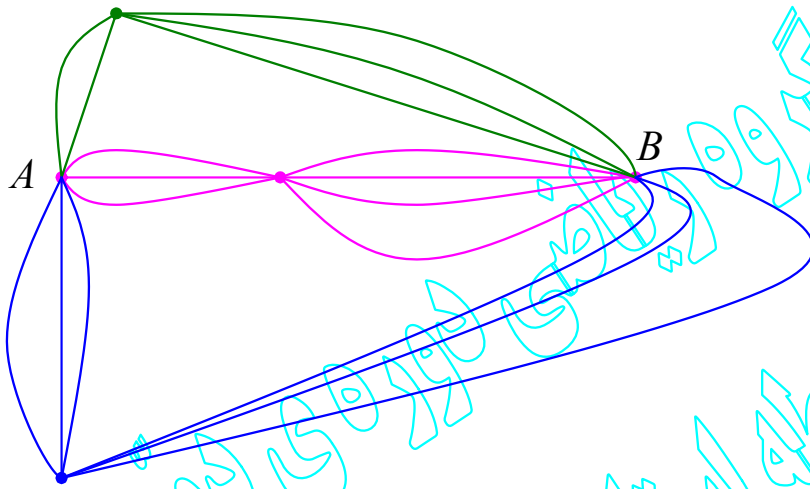
ب) $\binom{12}{2} = ????$

پ)

$$\binom{5}{2} \times \binom{6}{4} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{5}{0} \times \binom{6}{6} = (10 \times 15) + (5 \times 6) + (1 \times 1) = 150 + 30 + 1 = 181$$

$$ت) \binom{5}{2} \times \binom{6}{4} = 10 \times 12 = 120$$

تمرین ۹: به توجه به شکل زیر، تعداد مسیرهای سفر از شهر A به شهر B را به دست آورید.

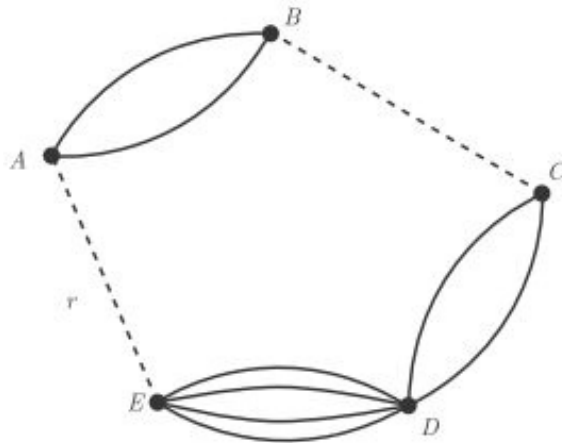


تمرین ۱۰: به نظر می رسد که صورت مسئله اشتباه تایی دارد. حال اگر تغییر زیر را انجام دهیم. می توان

به شکل زیر عمل کرد.



۱۰. تعداد راهها یا جادهها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به 20 طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



اکنون اگر تعداد مسیرهای از B به C را برابر m و همچنین تعداد مسیرهای از E به A را برابر n قرار دهیم. خواهیم داشت.

$$2 \times m \times 2 + n \times 4 = 20 \rightarrow 4m + 4n = 20 \xrightarrow{\div 4} m + n = 5$$

لذا می توان نوشت :

m	۱	۲	۳	۴
n	۴	۳	۲	۱

درس ۲

احتمال

فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیه عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز نرگس مانند هر روز راس ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به‌طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟ هیچ‌کس نمی‌تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، نرگس به موقع به مدرسه می‌رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟ عامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند؛ مانند میزان ترافیک. از طرفی رفت و آمد در خیابان‌ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه عمومی به‌طور معمول منظم نیست و... بنابراین: دو وضعیت وجود دارد: یکی اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد.



پدیده‌هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به‌طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت‌های ممکن در آنها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه‌ای که شامل پنج مهره قرمز و یک مهره سبز است، به‌طور تصادفی مهره‌ای خارج می‌کنیم، می‌دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز یا قرمز است اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به‌طور قطعی مشخص نیست. این‌گونه آزمایش‌ها را آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعا رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

ج) نتیجه قرینه کشی

الف) نتیجه پرتاب سکه
ب) نتیجه پرتاب تاس

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.
به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، از آمایش ها یا پدیده های قطعی می گوئیم.
برای مثال، چنانچه سنگی را به داخل استخر آبی پرتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می دانیم که سنگ به داخل آب فرو می رود یا پیش از پرتاب یک سکه، می دانیم که سکه روی زمین می نشیند. این گونه پدیده ها، آزمایش هایی قطعی هستند.

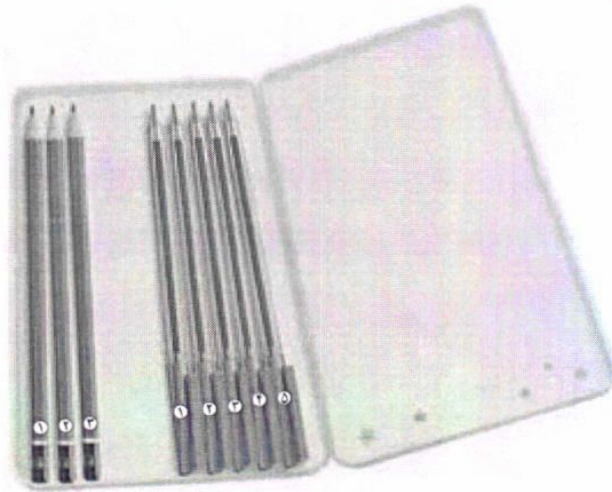
ب) نتیجه استخراج مهره از درون کسسه وقتی که همه مهره ها هم رنگ باشند.

الف) نتیجه رها شدن سیب از درخت

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

کار در کلاس

- کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟
الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛ قطعی
ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛ تصادفی
پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛ قطعی
ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛ تصادفی
ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای پرتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟ تصادفی
- از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.
الف) آیا مجموعه دو عضو { خودکار، مداد } می تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟ خیر
ب) به نظر شما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟
در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره گذاری متمایز می کنیم.
{ خودکار ۱، خودکار ۲، خودکار ۳، خودکار ۴، خودکار ۵، مداد ۱، مداد ۲، مداد ۳، مداد ۴، مداد ۵ }



فضای نمونه

- در پرتاب یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت، مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

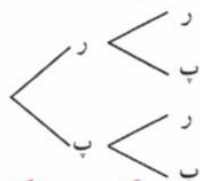


بنابراین، در پرتاب یک تاس، فضای نمونه برابر است با: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فعالیت

- فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.
۱. پرتاب دو سکه باهم.

پرتاب سکه دوم پرتاب سکه اول



$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار)

$$S = \{ررر, ررپ, رپر, پرر, رپپ, پرپ, پپر, پپپ\}$$

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه باهم.

$$S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\}$$

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$S = \{(۴۳۲), (۴۲۳), (۳۴۲), (۳۲۴), (۲۴۳), (۲۳۴)\}$$

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

$$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

۳. در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} = 165$$

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد؛ در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال:

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A \subseteq A$: یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است: $\emptyset \subseteq A$ یعنی $\emptyset \subseteq A$.

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچک‌تر از ۷ ظاهر شود. ب) عدد بزرگ‌تر از ۷ ظاهر شود.

حل:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{ب) } A = \{7\}$$

این مثال باید بعد از تعریف پیشامد بیان شود.

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گویند. از آنجا که $\emptyset \subseteq S$ پس \emptyset یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیرممکن (نشدنی)، همچنین $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $\{ر, پ\} = S$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

$$\{\emptyset, \{ر\}, \{پ\}, \{ر, پ\}\}$$

۲. مریم، ملیکا و سوگند بول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید.

$$S = \{\text{سوگند و ملیکا و مریم}\}$$

اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

$$\{\emptyset, \{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{ملیکا و مریم}\}, \{\text{سوگند و مریم}\}, \{\text{سوگند و ملیکا و مریم}\}$$

۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

$$A = \{3, 2, 5\}$$

الف)

$$B = \{2\}$$

ب)

$\{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{ملیکا و مریم}\}, \{\text{سوگند و مریم}\}, \{\text{سوگند و ملیکا و مریم}\}, \{\emptyset\}$

همه پیشامدها، کافیست برآمد ۲ باشد.

$$C = \{2, 4, 6\}$$

(ب)

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

مثلاً پیشامد $E = \{3, 4, 6\}$ رخ نداده است. زیرا $2 \notin E$

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

$$\{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشند.

$$\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

$$\{\}$$

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

۲۴ اعضای S

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$$

۵. در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار

است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

دوازدهم یازدهم دهم

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

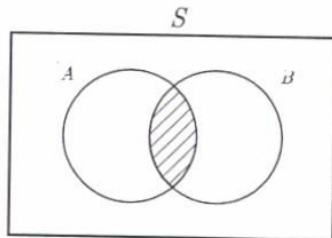
$$n(B) = \binom{6}{2} \binom{9}{1} + \binom{6}{3} \binom{9}{0}$$

$$= 15 \times 9 + 20 \times 1 = 135 + 20 = 155$$

اعمال روی پیشامدها

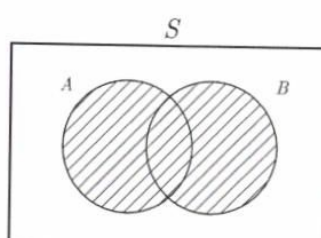
فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B، تفاضل B از A و متمم مجموعه A را به صورت

زیر یادآوری می‌کنیم.



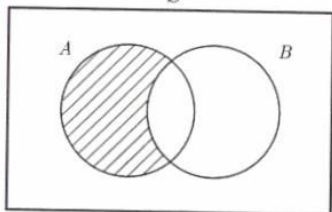
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(شکل ۱)



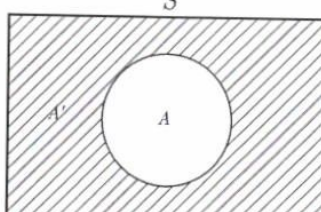
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(شکل ۲)



$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(شکل ۳)



$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

(شکل ۴)

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند :

الف) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را پرتاب می کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$$

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A \cap B$ را محاسبه کنیم.

$$A \cap B = \{(1, 5), (5, 1)\}$$

ب) پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را پرتاب می کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

پیشامد مورد نظر برابر با $A \cup B$ است.

$$A \cup B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1)\}$$

پ) پیشامد $A - B$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

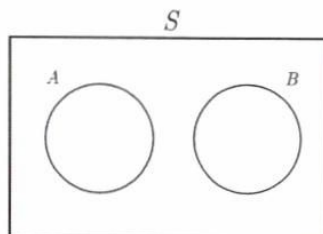
ت) پیشامد A' وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می گوئیم و همواره داریم :

$$A \cup A' = S, \quad A \cap A' = \emptyset$$

مثال : هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$ ، در این صورت پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

حل : چون $A - B = A$ و $B - A = B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای ناتهی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A \cap B = \emptyset$.



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می گوئیم.

برای مثال، در برتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

کار در کلاس

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{2, 3, 5\}$$

زوج
اول

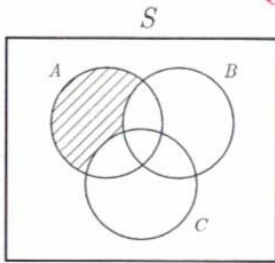
$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

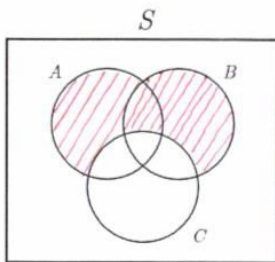
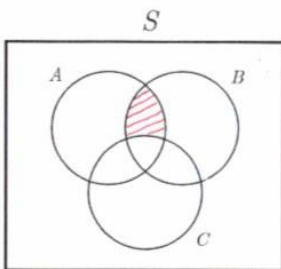
$$A - B = \{4, 6\}$$

$$B - A = \{3, 5\}$$

$$B' = S - B = \{1, 4, 6\}$$



$A - (B \cup C)$



۱. تاسی را برتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

– پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای

زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را

مانند نمونه بنویسید.

– فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.

– پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

– پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

$$S = \{(\text{ب}, \text{ب}, \text{ب}), (\text{ب}, \text{ب}, \text{د}), (\text{ب}, \text{د}, \text{ب}), (\text{ب}, \text{د}, \text{د}), (\text{د}, \text{ب}, \text{ب}), (\text{د}, \text{ب}, \text{د}), (\text{د}, \text{د}, \text{ب}), (\text{د}, \text{د}, \text{د})\}$$

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

(ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

$$A = \{(\text{ب}, \text{ب}, \text{ب}), (\text{د}, \text{د}, \text{د})\}$$

$$B = \{(\text{ب}, \text{ب}, \text{د}), (\text{ب}, \text{د}, \text{ب}), (\text{د}, \text{ب}, \text{ب})\}$$

$$C = \{ (> > >), (> > <), (> < >), (< > >) \}$$

ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای A و B و C به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟ **بله**

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟ **بله**

آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟ **خیر**

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید. در **تاب کی ناس پیشامدها آمدن عدد فرد و آمدن عدد زوج** ناسازگارند.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S \neq \emptyset$ فضای نمونه متناهی یک پدیده تصادفی باشد. اگر n, S برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

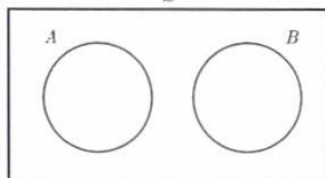
- چنان که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$
- در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1 \Rightarrow P(S) = 1$
- هرگاه $A \subseteq B$ ، در این صورت جاهای خالی را پر کنید. $A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

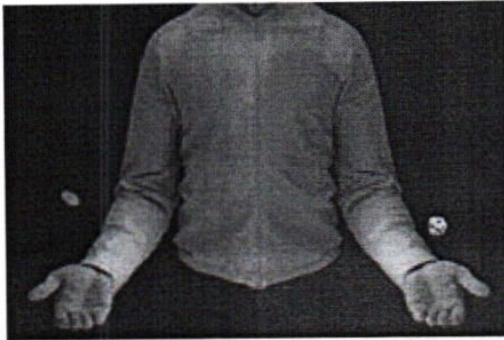
۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

کار در کلاس



۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
الف) تاس زوج بیاید.

می‌دانیم فضای نمونه این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد؛
بنابراین، $n(S) = 12$.

$(۱, پ), (۲, پ), (۳, پ), (۴, پ), (۵, پ), (۶, پ), (۱, ر), (۲, ر), (۳, ر), (۴, ر), (۵, ر), (۶, ر)$

$$S = \{(1, r), (2, r), (3, r), (4, r), (5, r), (6, r), (1, p), (2, p), (3, p), (4, p), (5, p), (6, p)\}$$

پیشامد اینکه تاس زوج بیاید، برابر است با:

$$A = \{(2, r), (4, r), (6, r), (2, p), (4, p), (6, p)\}; n(A) = 6$$

بنابراین، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$B = \{(1, p), (2, p), (3, p), (4, p), (5, p), (6, p)\} \rightarrow P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
ب) سکه پشت بیاید.

$C = \{(1, r), (2, r), (3, r), (4, r), (5, r), (6, r), (1, p), (2, p), (3, p), (4, p), (5, p), (6, p)\}$
ب) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

$$P(C) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

$$D = \{(1, p), (3, p), (5, p)\} \quad P(D) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:



الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبه $n(S)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت پر می‌شوند.

$$n(s) = 12^5 \rightarrow \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر اول} \end{matrix} \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر دوم} \end{matrix} \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر سوم} \end{matrix} \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر چهارم} \end{matrix} \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر پنجم} \end{matrix}$$

برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد A ، به طوری که همه آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبه $n(A)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه های زیر فقط با یک حالت پر شوند.

$$n(A) = 1 \rightarrow \frac{1}{\text{نفر پنجم}} \frac{1}{\text{نفر چهارم}} \frac{1}{\text{نفر سوم}} \frac{1}{\text{نفر دوم}} \frac{1}{\text{نفر اول}}$$

در نتیجه داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$$

(ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

$$P(B) = \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \dots + \frac{1}{12^5} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$$

(پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

$$P(C) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{55}{12^4}$$

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می شود.

$$n(S) = 36$$

الف) احتمال برنده شدن چه شماره ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$n(A) = 6$ این حالت بیشتر از دیگر حالت ها تکرار می شود. لذا احتمال برنده شدن کارت ۷ بیشتر است.

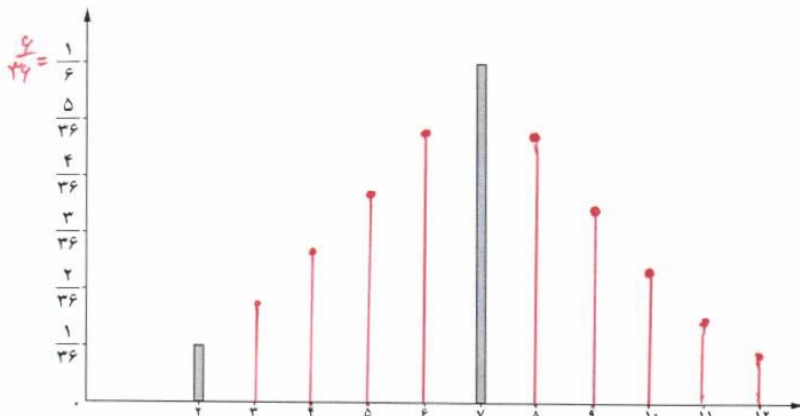
(ب) احتمال برنده شدن کدام شماره ها از همه کمتر است؟

$$B = \{(1,1)\} \quad C = \{(6,6)\}$$

(پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

بله ممکن است چون آرایش گاهی یک دستی امکان آن نیز از بقیه کمتر است.

(ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



بر اساس مجموع ۵

$$E = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

$$P(E) = \frac{4}{36}$$

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	جمع
تعداد پرتاب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۳۶
احتمال	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

فعالیت

- در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از اینج جعبه به طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه:

الف) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد: $P(A)$.

ب) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد: $P(B)$.

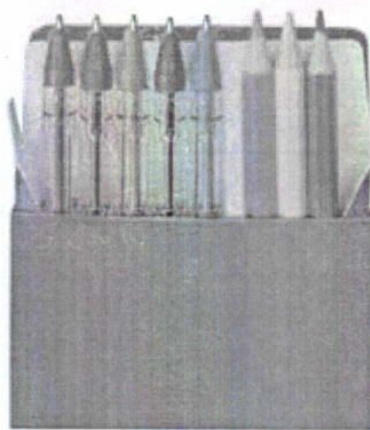
پ) احتمال این را بیابید که شیء انتخاب شده مداد نباشد: $P(A')$.

ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

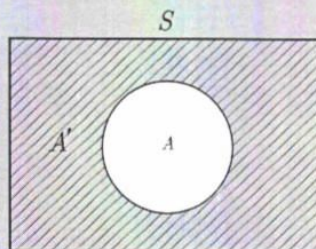
مداد نباید = خودکار نباید

$$P(B) = P(A')$$



$$= \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$$

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = 1$ یا $P(A') = 1 - P(A)$. در این حالت، A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم.



کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد. $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با 10% است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود. $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند. $1 - \frac{32}{49} = \frac{49-32}{49} = \frac{17}{49}$

مثال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به‌طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

الف) احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

ب) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

ث) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

ج) جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: الف) چون قرار است ۳ پیراهن از بین ۱۰ پیراهن انتخاب شود، بنابراین داریم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

چنانچه هر سه پیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند؛ بنابراین، اگر A پیشامد هر سه قرمز و B پیشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم. از آنجا که A و B ناسازگارند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{120} + \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

ب) برای اینکه رنگ سه پیراهن متفاوت باشد، آن‌گاه یک پیراهن قرمز، یک پیراهن آبی و یک پیراهن زرد است؛ بنابراین، داریم:

$$n(C) = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 4 \times 2 = 32 \quad ; \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

ب) برای اینکه حداقل ۲ بیراهن قرمز باشند، آن گاه ۲ بیراهن قرمز یا ۳ بیراهن قرمزند؛ بنابراین، مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت:

$$n(D) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 40 \quad ; \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

ت) برای اینکه حداکثر دو بیراهن آبی باشند، باید دو بیراهن آبی یا یک بیراهن آبی و یا صفر بیراهن آبی داشته باشیم:

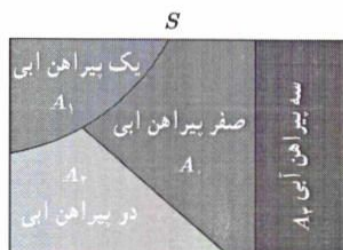
$$n(E) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 116$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ث) اگر احتمال $P(F)$ ۳ بیراهن آبی باشد، آن گاه $P(F') = 1 - P(F)$ احتمال این است که ۳ بیراهن آبی نباشند؛ بنابراین:

$$P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» یکسان‌اند. یعنی می‌توان راه حل قسمت «ث» را برای قسمت «ت» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ بیراهن به دنبال تعداد بیراهن‌های آبی باشیم، پیشامدهای ممکن روی فضای نمونه به صورت زیر است.



$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = P(S) = 1$$

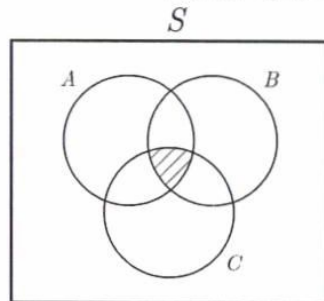
تمرین

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر لزوماً تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟
 الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود. **تصادفی**
 ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود. **قطعی**
 پ) نتیجه یک آزمون چهار جوابی، که نیمی از سؤالات آن را شناسی پاسخ داده‌ایم. **تصادفی**
 ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.
 - عددی را انتخاب می‌کند.
 - سه واحد به آن عدد می‌افزاید.
 - سپس حاصل را دو برابر می‌کند.
 - از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.
 - نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.
 - از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.
 - در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

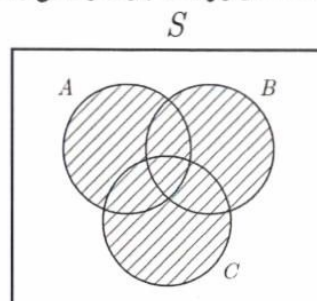
نیمه چهارم ۲۰ کارت

قطعی

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.
 الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
 ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.
۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:
 الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی
 ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.
۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)



(ب)

۵. هر یک از اعداد دورقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
 ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.
۶. خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

- ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.
 ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.
۷. خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

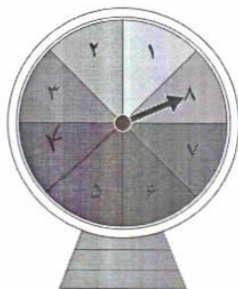
پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.

پ) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های لکه دار بیشتر باشد.

۹. عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد که:



الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرچم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرچم ها با شماره های غیر اول در مکان های زوج باشند.

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای ممتنع داده‌اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

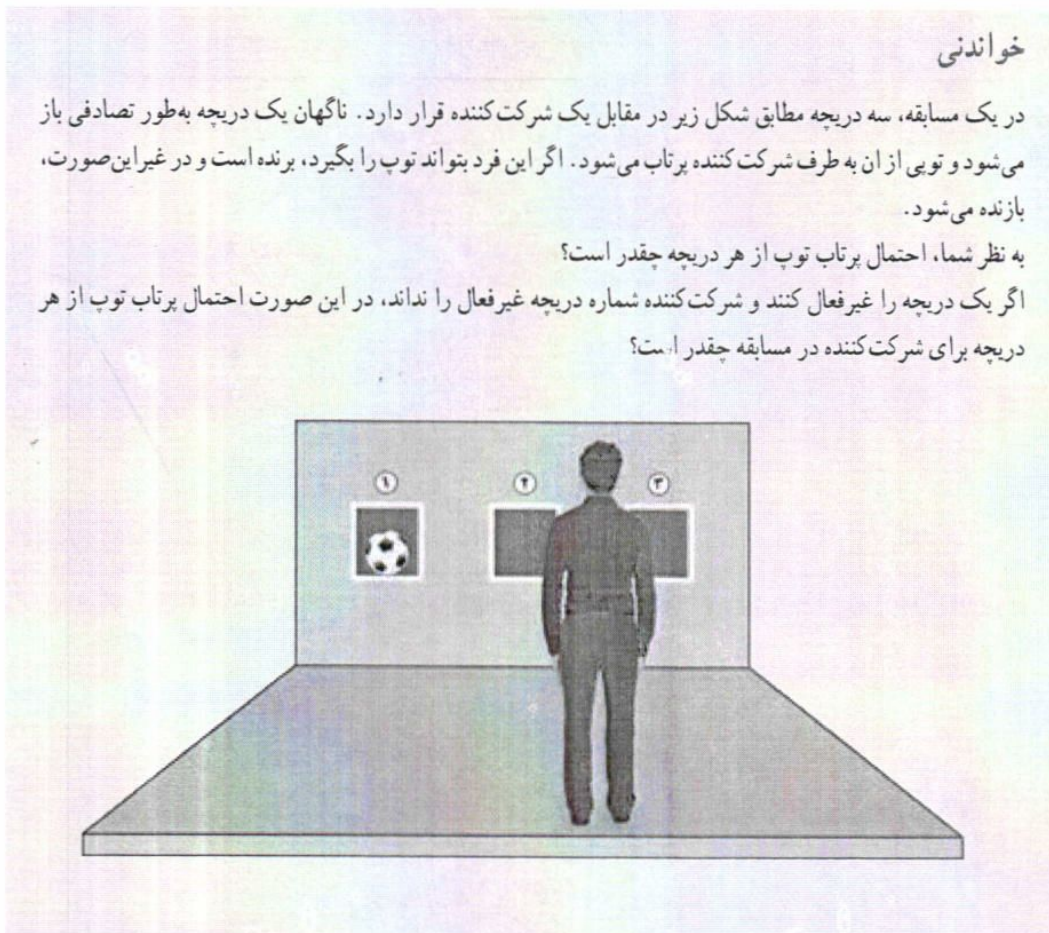
ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

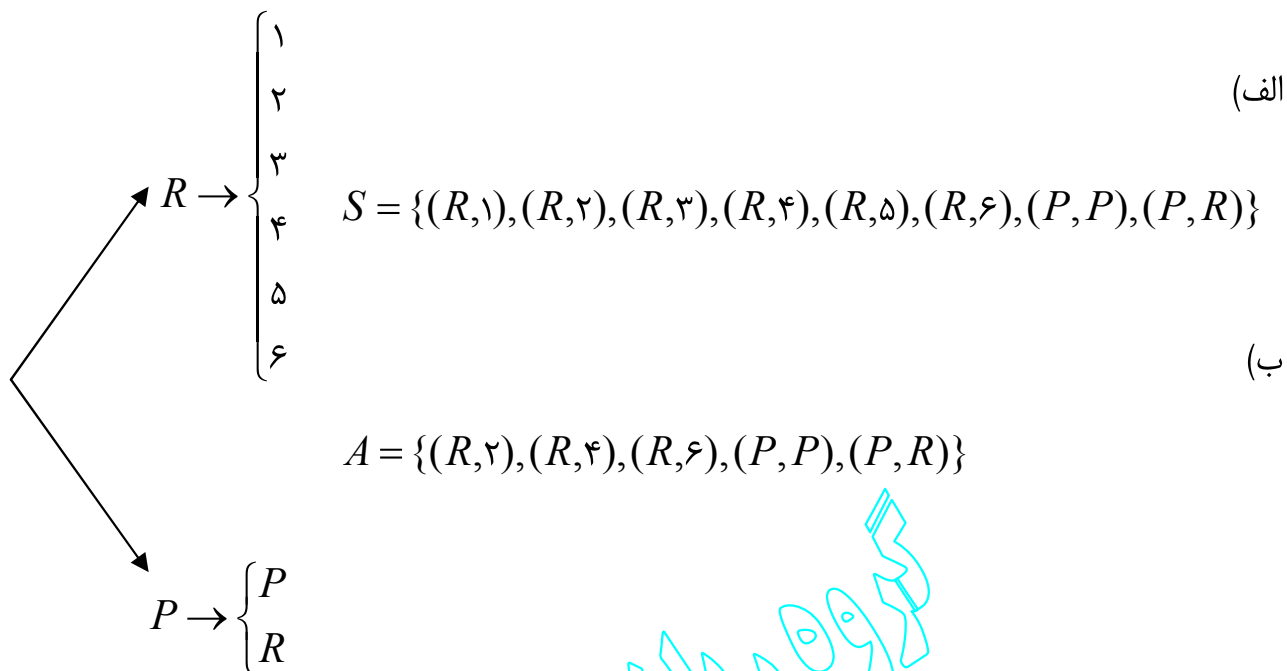
در یک مسابقه، سه دریاچه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت‌کننده قرار دارد. ناگهان یک دریاچه به طور تصادفی باز می‌شود و تویی از آن به طرف شرکت‌کننده پرتاب می‌شود. اگر این فرد بتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیر این صورت، بازنده می‌شود.

به نظر شما، احتمال پرتاب توپ از هر دریاچه چقدر است؟

اگر یک دریاچه را غیرفعال کنند و شرکت‌کننده شماره دریاچه غیرفعال را نداند، در این صورت احتمال پرتاب توپ از هر دریاچه برای شرکت‌کننده در مسابقه چقدر است؟



تمرین ۲:



تمرین ۳:

$$S = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹\}$$

$$A = \{۳, ۹, ۱۵\}$$

$$B = \{۱, ۹\}$$

$$A \cap B = \{۹\} \text{ و } A - B = \{۳, ۱۵\}$$

تمرین ۴:

الف: هر سه پیشامد C و B و A با هم رخ دهند.

ب: حداقل یکی از سه پیشامد C یا B یا A رخ دهند.

تمرین ۵:

(الف)

$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

(ب)

$$A = \{12, 24, 42\}$$

(پ)

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

تمرین ۶:

(الف)

$$S = \{PPP, PPR, PRP, RPP, PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

(ب)

$$A = \{PPP, RRR\}$$

(پ)

$$B = \{PPR, PRP, RPP\}$$

(ت)

$$C = \{PPP, PPR, PRP, RPP\}$$

(ث)

$$D = \{PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

تمرین ۷:

عضو $2^4 = 16$ (الف)

ب) $A = \{PPRR, PRRR, RPPR, RRRR\}$

پ) $C = \{PRRR, RPPR, RRRP, RRRR\}$

(ت) خیر ناسازگار نیستند.

تمرین ۸:

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{12}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{17}{3}} = \frac{220 \times 1}{680} = \frac{11}{34} \quad \text{ب) } P(B) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5}{680} = \frac{33}{68}$$

$$\text{پ) } P(C) = \frac{\binom{12}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{17}{3}} + \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{11}{34} + \frac{33}{68} = \frac{55}{68}$$

تمرین ۹:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

(الف)

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ب)

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

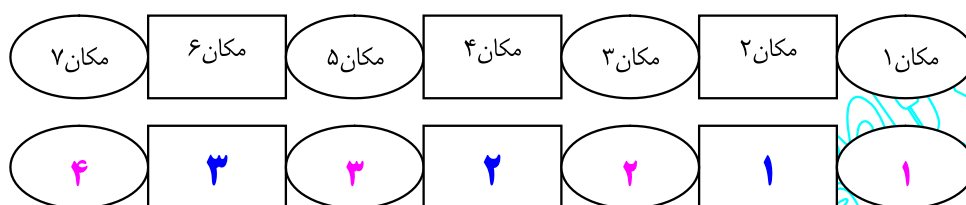
(پ)

$$C = \{3, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

تمرین ۱۰:

۶ و ۴ و ۱ پرچم های غیر اول

۷ و ۵ و ۳ و ۲ پرچم های اول



تعداد حالت های مساعد $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 3! = 144$

تعداد کل حالت ها $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$

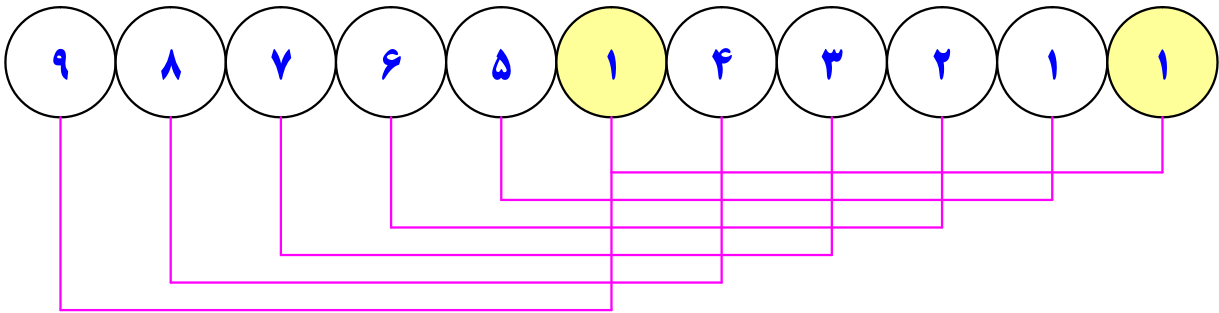
$$P(E) = \frac{144}{5040} = \frac{1}{35}$$

موسسه استان خوزستان

تمرین ۱۱:

دروازه بان

گاییتان



تعداد حالت های مساعد = $9! \times 6 \times 2$

تعداد کل حالت ها = $11!$

$$P(E) = \frac{9! \times 6 \times 2}{11!} = \frac{9! \times 6 \times 2}{11 \times 10 \times 9!} = \frac{6}{55}$$

تمرین ۱۲:

$$P(E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{15}{5} + \binom{5}{1} \times \binom{15}{6} + \binom{5}{0} \times \binom{15}{7}}{\binom{20}{7}} =$$

تمرین ۱۳:

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{5}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \times 5 + 10 \times 1}{120} = \frac{50 + 10}{120} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{1}{4}$$

درس ۳

چرخه آمار در حل مسائل

دنیای امروز پر از اطلاعاتی است که ما در بخش‌های مختلف زندگی با آنها روبه‌رو می‌شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت‌های نتایج به دست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری یک مسئله در محیط زندگی‌مان تا یافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.

فعالیت

❓ دانش‌آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن‌های هوشمند اختصاص می‌دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش‌آموزان به تلفن‌های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش‌آموزان از تلفن‌های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه‌ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟»

📌 گروه اجراکننده این پروژه، پرسش‌نامه‌ای طراحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش‌آموزان خواستند که این پرسش‌نامه را تکمیل کنند:

- الف) به طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنید؟
ب) از میان گزینه‌های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه‌ها با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهید، علامت بزنید.
- خواندن کتاب الکترونیک
 - شبکه‌های اجتماعی
 - عکاسی
 - بازی
 - تماس تلفنی
 - تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی

مساوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میانه و دامنه میان چارکی گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت‌ها را به صورت نمودار میله‌ای نمایش دهند.

● حدس می‌زنید دانش‌آموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

پاسخ در کتاب آموزی ۱؟؟؟

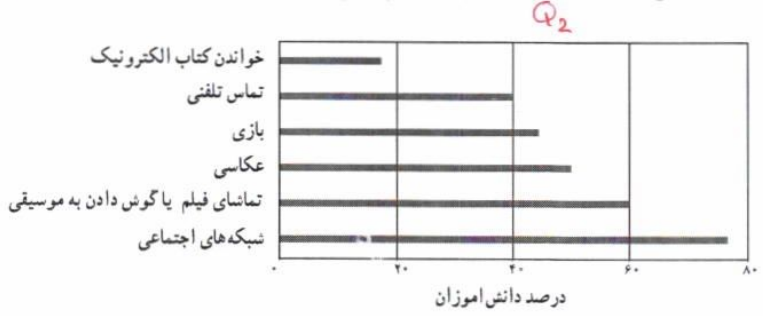
● اگر واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) در پرسش اول مشخص نمی‌شد، ممکن بود چه مشکلی پیش بیاید؟

بسیار کم و زیاد است

■ داده‌ها پس از گردآوری در نرم‌افزار وارد شدند. اشتباه‌های تاپی تا حد ممکن رفع و درستی داده‌های دورافتاده بررسی شد. پرسش‌نامه‌هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می‌رسید (مثلاً میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود!) کنار گذاشته شدند.

● ممکن است برخی دانش‌آموزان نخواهند کسی از جزئیات فعالیت‌های آنها با تلفن هوشمند باخبر شود. در طراحی پرسش‌نامه چگونه می‌توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده‌های گردآوری شده را به واقعیت نزدیک‌تر کنیم؟

■ نتایج این نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند 70° دقیقه و دامنه میان چارکی آن $Q_3 = 100$ ، $Q_1 = 65$ دقیقه بود.



● با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش‌آموزان به طور متوسط بیش از 100° دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟

۲۵ درصد

● با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت‌هاست؟

فراوانی کمترین: خواندن کتاب الکترونیک
بیشترین: شبکه‌های اجتماعی

● چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از 100° بیشتر می‌شود؟

چون ممکن است دانش‌آموزی چند گزینه را انتخاب کرده باشد.

۱- پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. در داده‌های مرتب شده، میانه داده‌های قبل از چارک اول (Q_1) و میانه داده‌های بعد از چارک سوم (Q_3) می‌نامیم. دامنه میان چارکی حاصل تفاضل چارک سوم و اول است که آن را با IQR (Interquartile Range) نمایش می‌دهیم.

دوم، از زدهم و دوازدهم

باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش آموزان پایه‌های این مدرسه (نه دانش آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از تلفن‌ها (نه ابزارهای دیگر) صادق است.

● با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانش‌آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟ شبکه‌های اجتماعی

● از میانه و دامنه میان چارکی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، آنها را چگونه تفسیر می‌کنید؟
۵۰ درصد دانش‌آموزان بیش از ۷۰ دقیقه از تلفن هوشمند استفاده می‌کنند و ۵۰ درصد دیگر کمتر از ۷۰ دقیقه در روز

❖ مشاوران آموزشی، به کمک دانش‌آموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت‌هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی‌های دانش‌آموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که (۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه‌های اجتماعی می‌تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم‌ها و دانش‌آموزان را بهبود بخشد؛ (۲) معلم‌ها می‌توانند با تهیه فیلم‌های آموزشی جذاب، محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند و دانش‌آموزان در



ساعاتی از شبانه‌روز که آمادگی بیشتری دارند، فیلم‌ها را تماشا کنند و پرسش‌هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم‌ها در میان بگذارند؛ (۳) با برگزاری دوره‌های آموزشی و نمایشگاه‌هایی از آثار دانش‌آموزان، می‌توان علاقه دانش‌آموزان به عکاسی و در نتیجه، استفاده از تلفن‌های هوشمند را هدفمند کرد.

❓ در این نظرسنجی فقط درباره مدت زمانی که دانش‌آموزان در طول روز با تلفن‌هایشان کار می‌کنند، پرسیدیم اما اگر بخواهیم برنامه‌ای داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان بهتر شود، باید در یک نظرسنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش‌آموزان صرف کارهای مختلف می‌کنند، به تفکیک این فعالیت‌ها بدانیم.

همان‌طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های: ۱. بیان مسئله، ۲. طرح و برنامه‌ریزی، ۳. گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴. تحلیل داده‌ها و ۵. بحث و نتیجه‌گیری است.



۱- هنگامی که بر اساس داده‌های یک نمونه آماری، برای جامعه آماری مرتبط با آن نتیجه‌گیری می‌کنیم، به اصطلاح می‌گوییم نتایج را تعمیم داده‌ایم.

کار در کلاس

اکنون که چرخه حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده نمونه حل‌شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند.)

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح درک برسی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	جست‌وجوی نتایج	نتایج به‌دست‌آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق اماری مطرح می‌کنیم.
۴	کتابخانه داده‌ها	با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	گردآوری داده‌ها	داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم.

گام‌های چرخه امار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرایند حل مسئله را «چرخه» می‌نامیم». همان‌طور که در مثال «استفاده از تلفن هوشمند» دیدیم، گام‌های مختلف حل مسئله به ما کمک می‌کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با روشن‌تر شدن ابعاد مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه به دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازمینی می‌شود. در این بخش، گام‌های چرخه حل مسئله را بیشتر بررسی می‌کنیم.

گام اول (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به‌طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه اماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.



مثال: فرض کنید می‌خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم. پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می‌شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان‌های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش‌های پهلوانی و...) یا توانایی‌ها و ناتوانی‌های

جسمانی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه آماری نمی‌توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

بهین ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد در میاب پسران ۱۳ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کرمانشاه» می‌تواند به‌عنوان یک مسئله مطرح شود.

چند مثال دیگر بزنید.

بحث و گفت‌وگو

هر یک از عوامل نام برده، (سن، محل سکونت و...) چگونه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه آماری مورد بررسی تاثیر بگذارد؟ چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می‌کنند؟ گروه اجرا کننده این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت بدنی چگونه می‌توانند به اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی)

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه‌گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دما آسان است؛ زیرا با ابزارهایی آشنا می‌توانیم توصیف‌هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه‌گیری همیشه این قدر هم آسان نیست. فرض کنید در مطالعه‌ای می‌خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه‌گیری کنیم. چه پرسش‌هایی می‌تواند برای اندازه‌گیری این متغیر به ما کمک کند؟ آیا اندازه‌گیری دارای‌ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد دوستان و... لزوماً مشخص می‌کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این طور نیست. با توجه به اهمیت اندازه‌گیری می‌توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت‌کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه‌گیری یا پرسش‌نامه‌ها را طوری طراحی می‌کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم. بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه‌گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.



کار در کلاس

۱. در هر قسمت، برای بررسی کدام یک از موارد به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز است؟ توضیح دهید.

- الف) □ سن دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید. *نمونه کوچک*
 □ معدل سال گذشته دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید. *نمونه بزرگ*

*هرچه بزرگ‌تر، متنوع‌تر مورد بررسی
 بیشتر باشد، باید نمونه بزرگ‌تری
 انتخاب شود.*

- ب) □ بررسی متوسط حقوق معلمان یک مدرسه دولتی *نمونه کوچک*
 □ بررسی متوسط حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی *نمونه بزرگ*

۲. علی و امید در یک پروژه دانش‌آموزی می‌خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ ابادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت‌هایی مشغول‌اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می‌کنند.»

علی پیشنهاد می‌کند: «برای نمونه‌گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند.»

امید پیشنهاد می‌کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه‌گیری فهرستی از دانش‌آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ ابادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش‌آموز بپرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت‌هایی انجام می‌دهد و به‌صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت‌ها مشغول است.»



موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادها امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می‌گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند. *اشکال پیشنهاد علی*



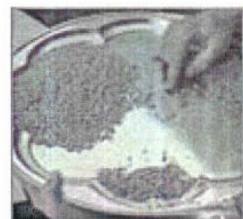
ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند. *اشکال پیشنهاد امید*

پ) اگر مثلاً به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند، میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (آماره نمونه) بزرگ‌تر از میانگین آن در جامعه اماری (پارامتر جامعه) می‌شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند. *اشکال پیشنهاد علی*

دو اشکال دیگر را که به نمونه‌گیری علی وارد است، مطرح کنید. *عدم طبقه‌بندی مکان‌ها بر اساس جنسیت / عدم توجه به روزها حضور نوجوانان در مکان‌های مختلف*

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نمونه‌گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

- الف) انتخاب خانوارها بر اساس رقم اول تلفن خانه‌ها
 ب) انتخاب خانوارها بر اساس رقم آخر تلفن خانه‌ها.



*در مورد رقم اول چون ممکن است رقم‌های اول یکسان
 باشند ولی در مورد رقم دوم هم‌توان نمونه‌گیری طبقه‌ای
 استفاده کرد.
 «سؤال مهم است.»*

گام ۳ (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها)

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد.

کار در کلاس

انچه در جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده‌های گردآوری شده در یک پروژه دانش‌آموزی پیش از برطرف کردن اشتباهات است.

چون برخی نرم‌افزارها نمی‌توانند داده‌های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می‌کنیم؛ مثلاً در این داده‌ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر «ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۳، ۲، ۱ و ۴ تعیین شده است.

در این داده‌ها هر سطر نشان‌دهنده یک فرد و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است.

نمره ادبیات	متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته	ورزش مورد علاقه	جنسیت	سن	شماره دانش‌آموز
۱۵	۲	۱	۱	۱۴	۱
۱۴	۰	۱	۲	۱۵	۲
۱۵	۳	۲	۱	۱۴	۳
+	۵	۲۲	۱	۱۵	۴
۱۷	۴۴	۲	۲	۵۱	۵
۱۸	۶	۳	۲	۱۴	۶
	۱۹	۷	۳	۱۵	۷
۱۷	۴	۴	۲	۱۴	۸
۱۵	۳	۳	۱	۱۴	۹
۱۰	۰	۲	۱	۱۴	۱۰
۱۲	۱	۲	۱	۱۴	۱۱
۱۴	۲	۱	۲	۱۴	۱۲
۲۰	۷	۴	۱	۱۵	۱۳
۱۸	۵	۱	۲	۱۳	۱۴

با توجه به جدول داده‌ها

الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه تایپ شده است؟ چگونه می‌توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم‌افزار، این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟

دانش‌آموز ۵۱ ساله وجود ندارد. ردیف ۵

ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش‌آموز چیست؛ نمره ادبیات او چند است.

ردیف ۷ / کد ۳ بسکتبال / ۱۹

پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟ ۲۲ ردیف ۴

ت) در متغیر «متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی، حذف یا اصلاح کنیم؟

۴۴ / ردیف ۵ / بدنه

ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟

دانش‌آموز ردیف ۴ / نمره ۲۰ + به صورت کسری

بحث و گفت‌وگو

- اگر دانش‌آموزی در روز برگزاری آزمون ادبیات غایب باشد چه باید کرد؟ اگر بخواهیم نمره‌ای برای او در نظر بگیریم، این کار را چگونه انجام دهیم؟ در این باره چه پیشنهادی دارید؟
- ایا با بررسی تمامی موارد ممکن می‌توانیم مطمئن باشیم که داده‌ها کاملا درست ثبت شده‌اند؟ چرا؟

گام ۴ (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.

یادآوری: همان‌طور که می‌دانید، برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند و معیارهای پراکندگی به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند. به یاد دارید که اگر داده دورافتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود. چرا؟

برای معیارها تحت تاثیر قرار ندهد.

کار در کلاس

با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	داده‌ها	معیارهای گرایش به مرکز		معیارهای پراکندگی	
		میانگین	میانه	IQR	SD (s)
سن (سال)	۱۷ ۱۸ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۹	۱۶٫۸۳	۱۷	۲٫۵	۱٫۴۱
میزان تماشای تلویزیون	۴ ۲۹ ۴ ۶ ۷ ۶٫۵ ۷ ۸ ۶ ۳۰ ۴ ۵	۹٫۷۱	۶٫۲۵	۳	۸٫۹۴

راهنمای جدول: میزان تماشای تلویزیون: متوسط ساعت‌های تماشای تلویزیون در هفته: IQR: دامنه میان چارکی: SD: انحراف معیار.

با توجه به جدول بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

سن: $Q_3 = 18$ $Q_2 = 17$ $Q_1 = 15.5$ $min = 15$ $max = 19$
 تماشای تلویزیون: $Q_3 = 7.5$ $Q_2 = 6.25$ $Q_1 = 4.5$ $min = 4$ $max = 30$

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

میانگین / انحراف معیار زیرا داده دور افتاده وجود ندارد.

* IQR: Interquartile Range

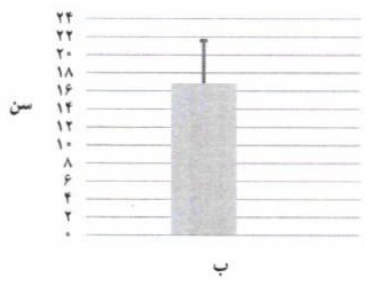
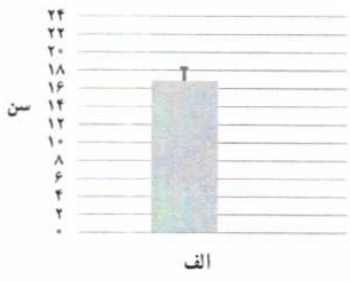
** SD: Standard Deviation

ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟
 میان / دامنه / میانگین / چارگی
 پ) انحراف کدام داده‌ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟
 ۲۹ و ۳۰ توان دوم اختلاف از میانگین زیاد می‌شود.
 ت) اگر برای توصیف داده‌های متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می‌شد، خوانندگانی که به داده‌های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می‌شدند؟
 میانگین غیر واقعی در اختیار دارند. واقعیت کمتر از آنچه به دست می‌آید.
 بهتر است میانگین هم بسنجیم.

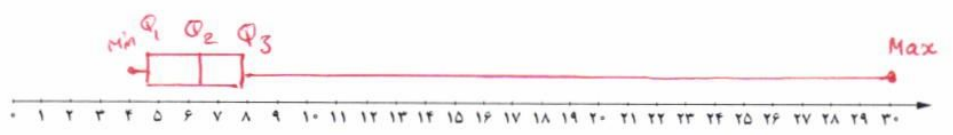
در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطی آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

ث) با توجه به داده‌های جدول کار در کلاس در صفحه قبل، کدام یک از نمودارهای زیر نشان‌دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟
 نمودار الف یا ب؟

الف



اگر داده‌های دور افتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میانگین) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتدا، خط میانی و انتها) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟
 جعبه‌ای

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دور افتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن‌تر است؟
 جعبه‌ای زیرا اگر داده دور افتاده نباشد، قدری متقارک می‌شود و میانگین و میانگین هم نزدیک هستند.
 ۳۶

کار در کلاس

دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده‌اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً ۱٫۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از این دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می‌کند.

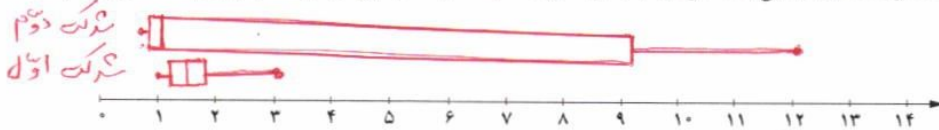
اعظم می‌گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»
مریم می‌گوید: «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی چه فایده‌ای دارد؟»
انها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند.

	حقوق کارمندان									
شرکت اول	۱	۱٫۵	۱٫۲	۱٫۷	۱٫۴	۱٫۹	۳	۱٫۱	۱٫۸	
شرکت دوم	۰٫۷	۱	۸	۱۲٫۱	۰٫۸	۱٫۶	۱۰٫۸	۰٫۹	۰٫۸	

Min = ۰٫۷
Q₁ = ۰٫۸
Q₂ = ۱
Q₃ = ۱٫۰۵
Max = ۱٫۱

Min = ۱
Q₁ = ۱٫۱
Q₂ = ۱٫۵
Q₃ = ۱٫۸۵
Max = ۳

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است. *درست*
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. *درست*
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است. *نادرست*

کار در کلاس

دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟ *کمی*
حوزه نگرش دانش‌آموزان قبولی
شرکت متوسطی نیست، ابتدا انتخاب مدرسه، اطلاعات کافی نیست
 پ) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

۲۰۰ درصد، افزایش ۲۰۰ برابری است. ۲۰ درصد، افزایش ۱/۵ برابری است.

ت) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی‌ها قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی‌ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟

ث) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می‌تواند گمراه کننده باشد؟

برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری)

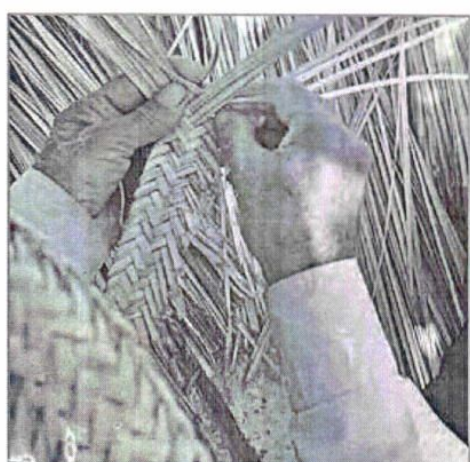
پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه‌ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می‌تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه‌گیری، داده‌ها را با روش‌های مناسبی تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده‌ایم، نتایج ما قطعی نیستند؛ چون در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می‌گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

(از جامعه‌ای با اندازه N به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه n داشته باشیم؟)

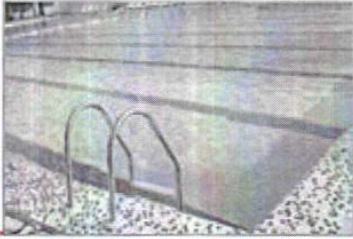
یکپارچگی چرخه امار در حل مسائل

همان‌طور که دیدید، در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با امار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلاً اگر امارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی



نشناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های آن را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمام گام‌ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم. کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه امار، گام‌های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می‌توانیم چرایی گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری، نوع ورود داده‌ها و تمامی موارد گام‌های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.

کار در کلاس



۱. برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلان‌شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکی در قسمت کم‌عمق در حال راه رفتن در آب‌اند و در قسمت عمیق گاهی فقط چند نفر شنا می‌کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟ این آگاهی تکمیل می‌کند. **ب) چه کسانی می‌توانستند پیش از احداث این استخر، درباره فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدهند؟**

افراد بومی
ب) چگونه مشورت با افراد بومی درباره اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم‌عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟ **دریافت اطلاعات افراد بومی پیرامون سن آنها و تعیین میانگین سنی**

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجراکنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند. **نیازمندی بزرگ نتیجه‌ی نهایی**
ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است. **غیر واقعی بودن معیارها می‌شود که تحلیل داده‌ها**
پ) تمامی داده‌های دورافتاده حذف شده‌اند. **معیارهای غیر واقعی درست می‌آید. را با اشکال مواجه می‌کند.**



ت) در پژوهشی با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا»، مجریان پروژه جلساتی را با حضور کارشناسان برگزار می‌کنند و پس از تصمیم‌گیری درباره طراحی و برنامه‌ریزی پروژه، برای گردآوری داده‌ها چند نفر را استخدام می‌کنند. امارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل‌گیری مسئله و اهداف این پژوهش، برای پر کردن پرسش‌نامه‌ها به منازل مختلف مراجعه می‌کنند. هنگام وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار، مشاهده می‌شود که در چندین پرسش‌نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته‌اند: «فوت شده است».

داده‌های نادرست به دست می‌آید.

ث) پس از گردآوری و تحلیل داده‌ها به شیوه‌ای که پیش‌تر در گام «طرح و برنامه‌ریزی» به تایید رسیده بود، نتایج مورد انتظار به دست نیامد. به همین سبب، معیارهای دیگری برای گزارش نتایج انتخاب شده است. **عدم تعریف مناسب متغیر واتمی نادرست**

مشاورها

ج) نتایج را فقط افراد متخصص امار تفسیر کرده‌اند. **عدم شناخت ویژگی‌های منطقه**

خواندنی

پادشاهی پسر خود را به جماعتی اهل هنر سپرده بود تا او را از علوم نجوم و رمل و غیره آموخته بودند و استاد تمام گشت با کمال کودکی. روزی پادشاه انگشتری در مشت گرفت؛ فرزند خود را امتحان کرد که بیا بگو در مشت چه دارم؟ پسر گفت: «آنچه داری گرد است و زرد است و میخوف (میان تهی) است.» پادشاه گفت: «چون نشان‌های راست دادی، پس حکم کن که آن چه چیزی باشد.» پسر گفت: «باید که غریب (غریب، الک) باشد.» پادشاه گفت: «از قوت تحصیل و دانش این چندین نشان‌های دقیق دادی که عقول در آن حیران شوند اما ندانستی که غریب در مشت نگنجد؟»

برگرفته از فیه ما فیه - مولانا جلال‌الدین محمد

تمرین

۱. به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

۲. با توجه به تاثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل، بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموزان، از آنها بپرسیم در هفته گذشته، بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

● ۱- پیاده یا با دوچرخه

● ۲- با وسایل حمل و نقل عمومی

● ۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتهای - اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و اماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش‌آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می‌شد؟ توضیح دهید.

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تاثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی

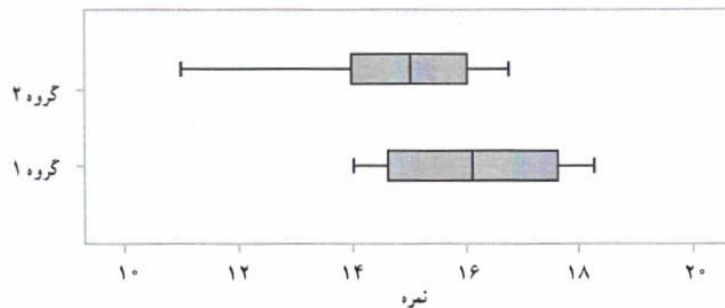
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون
نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

پ) مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به‌طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به‌صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به‌صورت هم‌زمان هستیم، در واقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پرد. مغز انسان تشنه خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما، که بی‌تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به‌جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»
سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.

پ) از مقایسه کمیته گروه یک با چارک اول گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشند؟

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

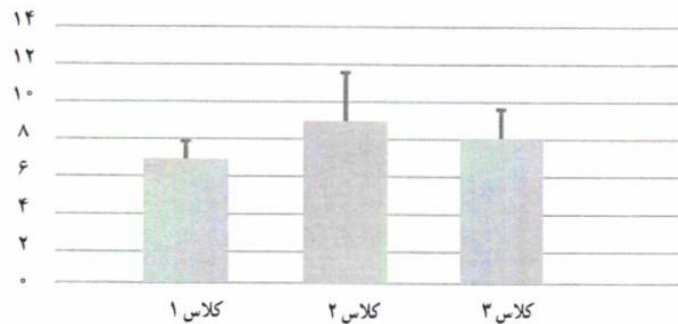
۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۵ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۶. با توجه به تاثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و اوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته برحسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و میله خطا نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌پرسیم آیا آن‌ها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

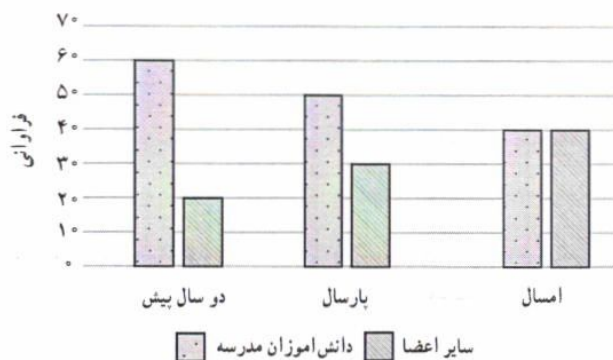
پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	۱ کلاس	۲ کلاس	۳ کلاس
میانگین			
انحراف معیار			

ت) چه عواملی می‌تواند بر نتایج این مطالعه تاثیر بگذارد؟ چگونه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید، پاسخ دقیق‌تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

ث) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



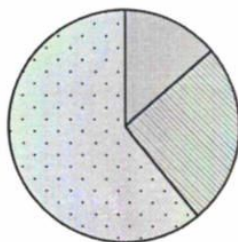
الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای زیر نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)



کمزتر از ۲۰ سال ۲۰ تا ۴۰ سال ۴۰ تا ۶۰ سال

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
 - گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
 - هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.
۹. جدول زیر نشان‌دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

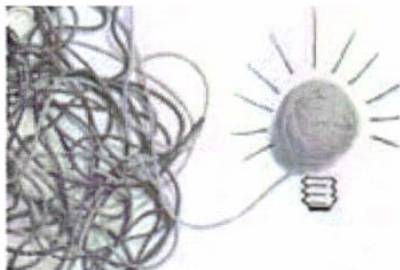
سرعت (کیلومتر در ساعت)	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۱۳۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰	۲۴۰	۱۵۰	۷۰	۴۰	۲۰

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.» نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های چرخه امار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

- بررسی ساعات روزانه حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی
- نظرسنجی درباره تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه
- نظرسنجی درباره کلاس درسی که می‌توانید پرسش‌های خود را ازادانه در آن مطرح کنید.
- نظرسنجی درباره ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی
- بررسی ساعت‌های مطالعه ازاد دانش‌آموزان و مقایسه آن بین دو گروه از دانش‌آموزان
- بررسی فعالیت‌های فوق برنامه مورد علاقه دانش‌آموزان.



حل تمرینهای صفحه‌ی ۴۰ و ۴۱

تمرین ۱:

بررسی وضعیت نمرات درسی دانش آموزان پایه‌ی اول دبستان چند پایه‌ی مختلط شهید احمدی شهرستان بستان خوزستان در سال تحصیلی ۹۸-۹۷

تمرین ۲:

الف:

جامعه‌ی آماری	دانش آموزان کلاس
نمونه‌ی آماری	دانش آموزان انتخاب شده
اندازه‌ی جامعه	۲۸ نفر
اندازه‌ی نمونه	۹ نفر

ب: پرسش شفاهی (چون تعداد نمونه کم است) / ممکن است در روز جمع آوری اطلاعات مشکلی مثلاً برای سرویس مدرسه پیش آمده باشد و دانش آموزان پیاده به مدرسه آمده باشند.

پ: شیوه‌ی رفتن به مدرسه / کیفی / اسمی

ت: دایره ای، میله ای / مد و نسبت

ث: خیر، چون ممکن است در ایام امتحانات شرایط متفاوتی پیش بیاید.

ج: خیر، نتایج ممکن است قدری تغییر کنند.

تمرین ۳:

الف: (۱) مدیران شیفت شب در نظر گرفته نشده اند. (۲) مدیران نمی توانند، نماینده‌ی کل کارمندان محسوب شوند. برای رفع مشکل نمونه گیری از هر دو شیفت به تناسب و از تمامی کارمندان صورت گیرد.

ب: ممکن است برخی از مادران در این ساعت سرکار رفته باشند و لذا اطلاعات از آنها دریافت نمی شود. برای رفع این مشکل کافی است مدت مراجعه را تغییر یا افزایش دهیم.

پ: (۱) دانش آموزان پسر از این مطالعه حذف شده اند. (۲) نمونه گیری تصادفی نیست. نمونه‌ی انتخاب نمونه ای تصادفی و به تناسب دانش آموزان توصیه می شود.

تمرین ۴:

الف: تقریباً مساویند. (ولی گروه اول نتیجه‌ی بهتری دارد).

ب: دامنه‌ی تغییرات در گروه ۲ بیشتر از گروه ۱ است. دامنه‌ی میان چارکی در گروه ۱ بیشتر از گروه ۲ است. پ: مقدار کمینه‌ی گروه ۱ برابر چارک اول گروه ۲ است. (گروه ۱ بهتر است).

ت: گروه الف. چون داده‌ی دور افتاده دارد.

ث: گروه ۱. نمودار متقارن است. (عدم وجود داده‌ی دور افتاده)

ج: جامعه‌ی گروه ۱ به دلیل اطمینان از درست بودن نتایج

تمرین ۵:

۲۲ و ۲۰ و ۲۰ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۰ و ۱۰ و ۶ و ۴ و ۰



Q_1

چارک اول



Q_2

چارک دوم (میانه)



Q_3

چارک سوم

جمع کل داده ها برابر ۱۸۹ و میانگین آنها ۱۲/۶

الف: داده‌ی آخر را به یک عدد دوره افتاده مانند ۵۰ تغییر می دهیم.

ب: میانگین این داده ها ۱۲/۶ می باشد. لذا می توان دو داده طوری اضافه کرد که مثلاً ۳ واحد بیشتر و ۳ واحد کمتر از میانگین باشند (۱۲/۶ و ۹/۶). بدین شکل میانگین تغییر نمی کند. از طرفی چون وسط بودن میانه نیز حفظ شده است، لذا با این عمل میانه نیز ثابت مانده است.

تمرین ۶:

الف: ممکن است میزان ساعت خواب توسط دانش آموزان با دقت بیان نشود. برای رفع این مشکل لازم است از آنها بخواهیم ساعت خواب و بیداری خود را قبل از خواب و بعد از بیداری یادداشت نموده و بعد اعلام نمایند.

ب: کمی / نسبتی (چون صفر مطلق دارند).

پ:

گروه	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲/۸	۱/۸

ت: اولاً: ممکن است برخی از دانش آموزان به دلیل مسائلی مانند میهمانی / جشن تولد / بیماری و ساعت خواب آنها موقتاً تغییر کند. ثانیاً: میزان تأثیر خواب بر یادگیری اگر تعریف عملیاتی نشود، نتایج مطالعه ارزش نخواند داشت.

ث: والدین دانش آموزان، خود بهتر از خود دانش آموزان از میزان ساعت و خواب فرزندان خود و تأثیر آن بر یادگیری آگاهند.

تمرین ۷:

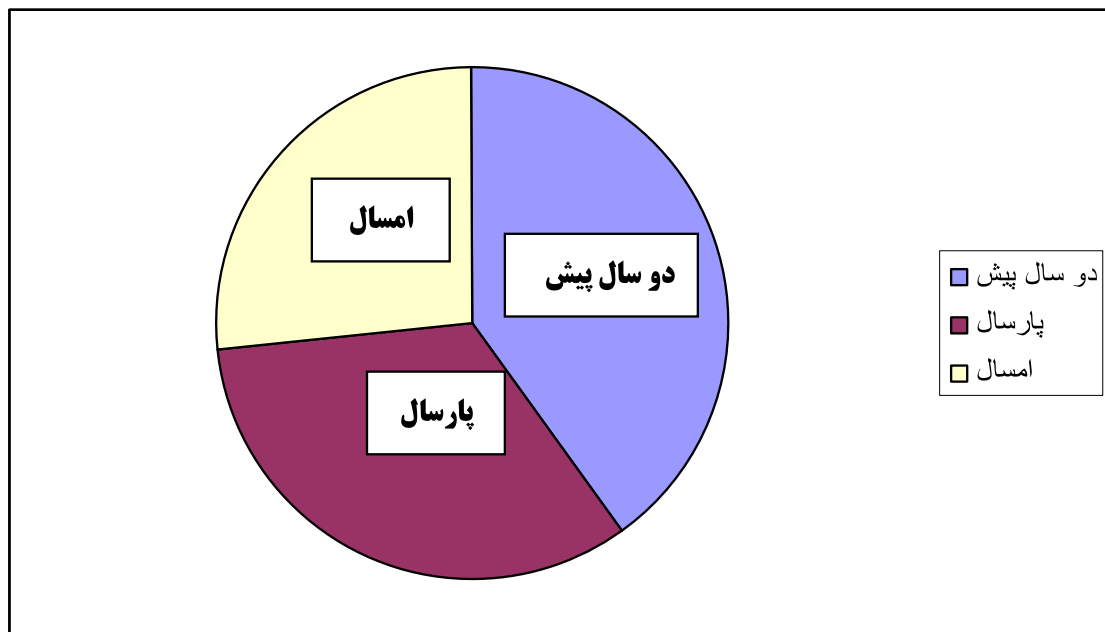
الف : ۳۰ نفر

ب : ۳۰ نفر (روند نزولی دارد.)

پ :

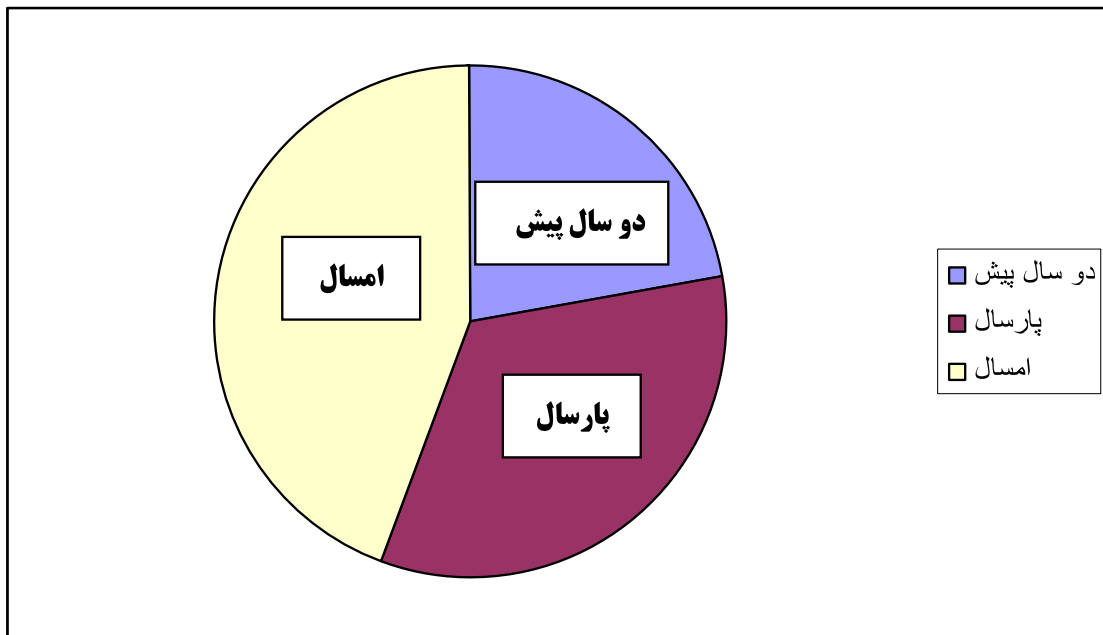
نمودار دانش آموزان مدرسه

سال	فراوانی	زاویهی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۶۰	$\frac{۶۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۱۴۴$
پارسال	۵۰	$\frac{۵۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰$
امسال	۴۰	$\frac{۴۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۹۶$
جمع	۱۵۰	۳۶۰



نمودار سایر اعضا

سال	فراوانی	زاویه ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۲۰	$\frac{۲۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۸۰$
پارسال	۳۰	$\frac{۳۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰$
امسال	۴۰	$\frac{۴۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۶۰$
جمع	۹۰	۳۶۰



ت: عواملی مانند مدیریت / تبلیغات / اوقات فراغت / هزینه و تناسب کتابهای موجود با سن اعضا نیز ممکن است اثرگذار باشد.

تمرین ۸:

الف:

دوره ی سنی	زاویه ی مرکزی (بر حسب درجه)
کمتر از ۲۰ سال	۵۴
بین ۲۰ الی ۴۰	۹۰
بین ۴۰ الی ۶۰	۲۱۶ (؟)
جمع	۳۶۰

$$۳۶۰ - (۹۰ + ۵۴) = ۲۱۶$$

$$\frac{۳۶۰}{۱۰۰} = \frac{۲۱۶}{x} \rightarrow x = \frac{۲۱۶ \times ۱۰۰}{۳۶۰} = ۶۰ \text{ درصد}$$

ب: مورد اول، زیرا

اولاً: در ساعات اداری افراد بازنشسته لزومی ندارد که در ادارات حاضر شوند. ثانیاً: افراد کمتر از ۲۰ سال سن معمولاً دانش آموز هستند که در این مطالعه سهم کمتری دارند.

تمرین ۹:

اشکال این نتیجه گیری این است که تعداد کمتری از رانندگان خودروها ممکن است خود با سرعت ۸۰ به بالا به رانندگی کنند که این مورد ملاحظه نشده است. از طرفی تعداد کل جهت مقایسه س بهتر نیز در اختیار نیست.

توجه به جدول و عدم کمک گرفتن از نظرات رانندگان موجب این تصور نادرست شده است.

گروه ریاضی دوره ی دوم
موسسه استان خوزستان