



## دنباله هندسی

فصل ۳

درس ۱

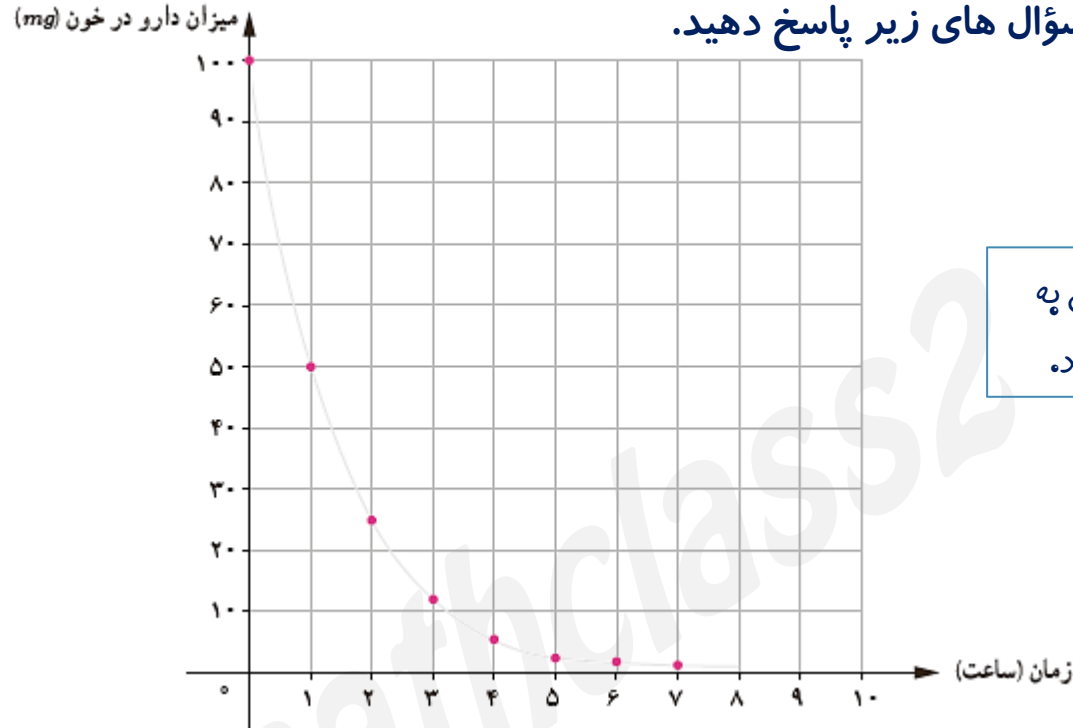
## اهداف

- شناخت ارتباط میان مفاهیم الگوهای غیرخطی و دنباله هندسی.
- آشنایی با مفهوم دنباله هندسی و ویژگی های آن.
- توانایی در یافتن نسبت مشترک و جمله عمومی دنباله هندسی.
- شناخت کاربرد مفهوم دنباله هندسی در برخی پدیده های دنیای واقعی.
- مهارت در حل مسائلی از دنیای واقعی مرتبط با مفهوم دنباله هندسی و تفسیر نمودار آنها.
- مهارت در یافتن مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی.



## فعالیت صفحه ۷۵ کتاب درسی

شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. با توجه به نمودار « میزان دارو در خون-زمان » به سؤال های زیر پاسخ دهید.



**نیمه عمر دارو:** مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می یابد.

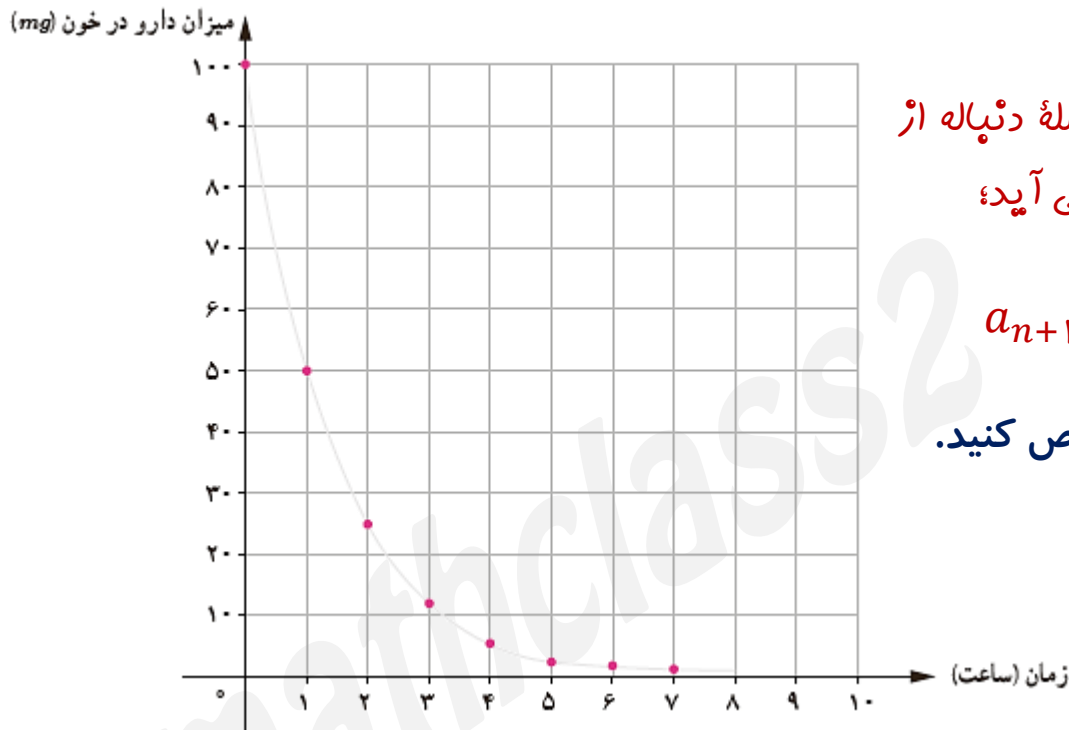
الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟  
با توجه به نمودار میزان دارو بعد از ۳ نیمه عمر کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد شد.

آیا می توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟  
میزان دارو در بدن شخص هیچ گاه به صفر نخواهد رسید، چون میزان دارو نصف ساعت قبل خود است.



## فعالیت صفحه ۷۵ کتاب درسی

ب) اگر  $a_n$  میزان داروی موجود در بدن شخص پس از  $n$  امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟



با در نظر گرفتن این که جمله اول ۵۰ است، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت  $\frac{1}{2}$  در جمله پیشین به دست می آید؛

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n, \quad a_1 = 50.$$

ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = 50.$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right) 50.$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) 50 = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) 50 = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$a_n = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

صفحه ۷۶ کتاب درسی

**دنباله هندسی** (Geometric Sequence)

دنباله ای است که در آن هر جمله به جز جمله اول ( $a_1$ )؛ از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. به آن عدد ثابت، **قدر نسبت یا نسبت مشترک دنباله** (Common ratio) می گویند و آن را با  $r$  یا  $q$  نشان می دهند. ( $r \neq 0$  و  $a_1 \neq 0$ )

**مثال :**  $5, 10, 20, 40, \dots$   $\xrightarrow{\begin{matrix} \times r & \times r & \times r \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \end{matrix}}$   $r = 2$

**در نتیجه باید گفت :**

قدر نسبت هر دنباله هندسی از تقسیم هر جمله بر جمله قبل از خودش به دست می آید.

$$r = a_n \div a_{n-1}$$



صفحه ۷۶ کتاب درسی

**جمله عمومی دنباله هندسی**

فرض کنید جمله اول یک دنباله هندسی  $a_1$  و قدر نسبت آن  $r$  باشد، در این صورت داریم:  
 $(r \neq 0 \text{ و } a_1 \neq 0)$

$$\begin{array}{l}
 \times r \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 = a_1 r \end{array} \right. \\
 \times r \left\{ \begin{array}{l} a_3 = a_1 r^2 \end{array} \right. \\
 \times r \left\{ \begin{array}{l} a_4 = a_1 r^3 \\ \vdots \\ a_n = a_1 r^{n-1} \end{array} \right.
 \end{array}$$

**جمله عمومی دنباله هندسی**

## تمرین تکمیلی

سوال ۱: اگر دو جمله اول از یک دنباله هندسی به ترتیب ۴ و ۸ باشند، دو جمله بعدی این دنباله را بنویسید. سپس جمله عمومی آن را تعیین کنید.

$$4, 8, \dots$$

$$r = 8 \div 4 = 2$$

$$a_3 = 16, \quad a_4 = 32$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow[r = 2]{a_1 = 4} a_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^2 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$$



کار در کلاس ۱ صفحه ۷۶ کتاب درسی

جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	۵ جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
۱	$\frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $, a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$\frac{1}{81}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$ $, a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = \frac{1}{81} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
۴	$-\frac{1}{2}$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) a_n$ $, a_1 = 4$	$a_n = 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
۱	$\frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$ $, a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
۱۰۰	$\frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{8}, \frac{25}{16}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $, a_1 = 100$	$a_n = 100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

## کار در کلاس ۲ صفحه ۷۷ کتاب درسی

با توجه به جدول صفحه قبل، در هر دنباله هندسی به صورت  $a_n = a_1 r^{n-1}$  با فرض  $a_1 > 0$ :

الف) اگر  $0 < r < 1$ ، دنباله  $a_n$ ، ...**کاهشی**... است. (افزایشی - کاهش - ثابت)

ب) اگر  $r > 1$ ، دنباله  $a_n$ ، ...**افزایشی**... است. (افزایشی - کاهش - ثابت)

ج) اگر  $r = 1$ ، دنباله  $a_n$ ، ...**ثابت**... است. (افزایشی - کاهش - ثابت)



**جمع بندی**

- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **مثبت** و قدر نسبت بزرگتر از یک باشد، دنباله **افزایشی** خواهد بود.  
مثال:  $1, 2, 4, 8, \dots$
- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **مثبت** و قدر نسبت بین صفر و یک باشد، دنباله **کاهشی** خواهد بود.  
مثال:  $8, 4, 2, 1, \dots$
- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **منفی** و قدر نسبت بزرگتر از یک باشد، دنباله **کاهشی** خواهد بود.  
مثال:  $-1, -2, -4, -8, \dots$
- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **منفی** و قدر نسبت بین صفر و یک باشد، دنباله **افزایشی** خواهد بود.  
مثال:  $-8, -4, -2, -1, \dots$
- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **مخالف صفر** و قدر نسبت منفی باشد، دنباله **دارای نوسان** خواهد بود.  
مثال:  $1, -2, 4, -8, \dots$

تمرین تکمیلی

سوال ۲: در دنباله های هندسی زیر، قدرنسبت (نسبت مشترک) را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

(الف)  $2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots$   $\Rightarrow a_n = 2 \times 3^{n-1}$

(ب)  $5, 10, 20, 40, 80, 160, \dots$   $\Rightarrow b_n = 5 \times 2^{n-1}$

(پ)  $6, -60, 600, -6000, 60000, -600000, \dots$   $\Rightarrow c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

(ت)  $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$   $\Rightarrow d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$



## تمرین تکمیلی

سوال ۳: از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و نسبت مشترک آنها را بنویسید.

الف)  $7, 28, 112, 448, \dots$

$$r = 4$$

ب)  $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

دنباله هندسی نیست

پ)  $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$

$$r = \frac{-1}{2}$$

ت)  $5, 5, 5, 5, \dots$

$$r = 1$$

## نتیجه:

دنباله های ثابت مانند دنباله  $5, 5, 5, 5, 5, \dots$  هم حسابی و هم هندسی هستند.

## تمرین تکمیلی

سوال ۴: جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\left. \begin{array}{l} t_6 = t_1 r^5 = 96 \\ t_3 = t_1 r^2 = 12 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{t_6}{t_3} = \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = \frac{96}{12} \rightarrow r^3 = 8 \rightarrow r = 2$$

$$t_1 r^2 = 12 \rightarrow 4(t_1) = 12 \rightarrow t_1 = \frac{12}{4} = 3$$

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$$



## کار در کلاس صفحه ۷۷ کتاب درسی

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$  را مشخص کنید.

با در نظر گرفتن جمله اول، هر جمله از ضرب شدن  $r$  در جمله قبیل از خودش به دست می آید. پس داریم:

$$a_{n+1} = ra_n, a_1 = a$$

کار در کلاس صفحه ۷۷ کتاب درسی

## هزینه استهلاک (Depreciation Cost)

شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر ارزش یخچال فریزر و  $n$  سال پس از خرید باشد:

الف) ضابطه‌ی تابعی دنباله  $v_n$  را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$v_1 = \left(\frac{9}{10}\right) 960000 = 864000$$

$$v_2 = \left(\frac{9}{10}\right) 864000 = 777600$$

$$v_3 = \left(\frac{9}{10}\right) 777600 = 699840$$

 $\times 0.9$ 
 $864000, 777600, 699840, \dots$ 

$$v_n = 864000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

دقت کنید: ۹۶۰۰۰۰ تومان قیمت اولیه است نه جمله اول دنباله



## کار در کلاس صفحه ۷۷ کتاب درسی

## هزینه استهلاک

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟

با توجه به این که ارزش یخچال در هر سال  $10\%$  کاهش می یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان  $10\%$  آن بیشتر خواهد بود.

بنابراین بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر، در اولین سال بعد از خرید آن است.

پ) آیا می توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟

خیر، زیرا به عدد ثابتی نمی رسیم و کاهش ارزش یخچال فریزر همچنان ادامه دارد.

ت) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی شود؟

زیرا یک مقدار بزرگ تر از صفر (ارزش یخچال فریزر) را هر بار در عدد  $0.9$  ضرب کنیم هیچ گاه صفر نخواهد شد.

ث) با چه فرضی ارزش یخچال پس از  $10$  سال صفر می شود؟

اگر هر سال به مقدار ثابت از ارزش یخچال فریزر کم شود، پس از مدتی ارزش آن صفر خواهد شد.

قیمت یخچال فریزر یعنی  $960000$  را بر  $10$  تقسیم کنیم، حاصل  $96000$  خواهد شد. اگر هر سال به مقدار ثابت

$96000$  از ارزش یخچال فریزر کم شود، پس از  $10$  سال ارزش آن صفر می شود.

## کار در کلاس صفحه ۷۷ کتاب درسی

## هزینه استهلاک

ج) ضابطه  $a_n$  را به گونه ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله  $a_n$  در این حالت حسابی است یا هندسی؟

دنباله حسابی است با اختلاف مشترک  $-۹۶۰۰۰$  و جمله اول  $۸۶۴۰۰۰$

$$a_n = dn + (a_1 - d) \xrightarrow[\begin{matrix} d = -۹۶۰۰۰ \\ a_1 = ۸۶۴۰۰۰ \end{matrix}]{a_n = -۹۶۰۰۰n + ۹۶۰۰۰۰}$$

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

با توجه به قیمت خرید اولیه،  $۹۶۰$  هزار تومان، نصف ارزش آن  $۴۸۰$  هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد  $n$  را که نامساوی  $v_n < ۴۸۰۰۰۰$  را تأمین می کند، مشخص کنیم.

$$v_7 = ۸۶۴۰۰۰ \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^6 \cong ۴۵۹۱۶۵$$

بنابراین ۷ سال پس از خرید یخچال فریزر باید آن را بفروشد تا ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد.





## کار در کلاس صفحه ۷۷ کتاب درسی

ه) با توجه به قسمت های «ب» و «ج»، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله  $k$  واحد کسر شود، با حالتی که  $k$  درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

در حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله  $k$  واحد کسر شود، جملات این دنباله کوچک می شوند و ممکن است به صفر شود. این حالت بیانگر یک دنباله حسابی است.

در حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله  $k$  درصد کسر شود، جملات این دنباله کوچک می شوند ولی هیچگاه به صفر نمی رسند. این حالت بیانگر یک دنباله هندسی است.

## کار در کلاس صفحه ۷۸ کتاب درسی

طبق آزمایش های انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن این که اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی شود).

مقدار کافئین پس از یک نیمه عمر برابر نصف ۸۰ میلی گرم است. پس جمله اول دنباله عدد ۴۰ است.  $\times 0.5$

۴۰، ۲۰، ۱۰، ۵، ۲/۵، ۱/۲۵، ۰/۶۲۵، ۰/۳۱۲۵، ...

پس از ۸ نیمه عمر یعنی ۴۸ ساعت شخص می تواند چای یا قهوه مصرف کند.

جمله عمومی دنباله را تعیین می کنیم و آن را کوچکتر از ۰/۵ میلی گرم فرض کرده و نامعادله را حل می کنیم.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow[r = 0.5]{a_1 = 40} a_n = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n < 0.5 \rightarrow 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.5$$

$$a_8 = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0.3125 < 0.5$$

به این نوع نامعادلات، نامعادله نمایی می گوئیم و با روش حل آنها در درس بعد آشنا می شوئیم.



## فعالیت صفحه ۷۹ کتاب درسی

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل ۸۰ میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به این که نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

$n$ تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	$S_n$ (میلی گرم)
۱	۱۵ بهمن	... : ... بامداد	$S_1 = 80$
۲	۱۵ بهمن	... : ۸ صبح	$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$
۳	۱۵ بهمن	... : ۴ بعد از ظهر	$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + 80 = 60 + 80 = 140$
۴	۱۶ بهمن	... : ... بامداد	$S_4 = \frac{1}{2}S_3 + 80 = 70 + 80 = 150$
۵	۱۶ بهمن	... : ۸ صبح	$S_5 = \frac{1}{2}S_4 + 80 = 75 + 80 = 155$
۶	۱۶ بهمن	... : ۴ بعد از ظهر	$S_6 = \frac{1}{2}S_5 + 80 = 77.5 + 80 = 157.5$

## فعالیت صفحه ۷۹ کتاب درسی

ب) با نوشتن یک رابطه بازگشتی میزان آنتی بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از  $n$  بار مصرف قرص مشخص کنید.

$$S_n = \frac{1}{2} S_{n-1} + 80, \quad S_1 = 80$$

ج) آیا می‌توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟  
(ضابطه‌ی تابعی دنباله)

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n + S_1, \quad S_1 = a$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 + a = \frac{1}{2} a + a = \frac{3}{2} a$$

$$S_3 = \frac{1}{2} S_2 + a = \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} a + a = \frac{7}{4} a$$

$$S_4 = \frac{1}{2} S_3 + a = \frac{1}{8} a + \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} a + a = \frac{15}{8} a$$

$$S_5 = \frac{1}{2} S_4 + a = \frac{1}{16} a + \frac{1}{8} a + \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} a + a = \frac{31}{16} a$$

$$S_6 = \frac{1}{2} S_5 + a = \frac{1}{32} a + \frac{1}{16} a + \frac{1}{8} a + \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} a + a = \frac{63}{32} a$$

$$S_n = \frac{1}{2^{n-1}} a + \frac{1}{2^{n-2}} a + \dots + \frac{1}{2} a + a \rightarrow S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} a$$



## فعالیت صفحه ۷۹ کتاب درسی

د) با جای گذاری مقادیر  $n = 1$  تا  $n = 6$  در رابطه به دست آمده در قسمت «ج»، صحت اعداد به دست آمده در جدول «الف» را بررسی کنید.

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} a \xrightarrow{n=1} S_1 = \frac{2^1 - 1}{2^0} \times 80 = \frac{1}{1} \times 80 = 80.$$

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} a \xrightarrow{n=2} S_2 = \frac{2^2 - 1}{2^1} \times 80 = \frac{3}{2} \times 80 = 120.$$

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} a \xrightarrow{n=3} S_3 = \frac{2^3 - 1}{2^2} \times 80 = \frac{7}{4} \times 80 = 140.$$

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} a \xrightarrow{n=4} S_4 = \frac{2^4 - 1}{2^3} \times 80 = \frac{15}{8} \times 80 = 150.$$

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} a \xrightarrow{n=5} S_5 = \frac{2^5 - 1}{2^4} \times 80 = \frac{31}{16} \times 80 = 155.$$

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} a \xrightarrow{n=6} S_6 = \frac{2^6 - 1}{2^5} \times 80 = \frac{63}{32} \times 80 = 157.5.$$

صفحه ۸۰ کتاب درسی

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسیفرض کنید جمله اول یک دنباله هندسی  $a$  و نسبت مشترک آن  $r$  باشد، در این صورت مجموع  $n$  جمله اول

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

آن از دستور زیر به دست می آید:

## تمرین تکمیلی

سوال ۵: مجموع ۲۰ جمله اول دنباله زیر را بیابید.

۱, ۲, ۴, ۸, ...

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow[n=20]{\substack{a=1 \\ r=2}} S_{20} = \frac{1(2^{20} - 1)}{2 - 1} = \frac{1048576 - 1}{1} = 1048575$$



## کار در کلاس صفحه ۶۷ کتاب درسی

صورت سوال را به علت وجود مشکل در آن؛ تغییر داده ایم.

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل ۸۰ میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به این که نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص ها را مصرف کند.

(الف) ضابطه دنباله  $a_n$  را بنویسید که در آن میزان آنتی بیوتیک موجود یک قرص؛ در بدن شخص بیمار را پس از چند نیمه عمر نشان می دهد. سپس  $a_3$  را تعیین کرده و معنای آن را بنویسید.

میزان آنتی بیوتیک پس از یک نیمه عمر برابر نصف ۸۰ میلی گرم است. پس جمله اول دنباله عدد ۴۰ است.

$$a_n = ar^{n-1} \xrightarrow[\substack{r = \frac{1}{2} \\ a_1 = 40}]{\substack{r = \frac{1}{2} \\ a_1 = 40}} a_n = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow a_3 = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 40 \cdot \frac{1}{4} = 10 \text{ میلی گرم}$$

$a_3$ : میزان آنتی بیوتیک موجود یک قرص؛ در بدن شخص بیمار پس از سه نیمه عمر یا ۲۴ ساعت

(ب) ضابطه دنباله  $S_n$  را بنویسید که در آن میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را نشان می دهد. سپس  $S_3$  را تعیین کرده و معنای آن را بنویسید. میزان آنتی بیوتیک پس از مصرف اولین قرص؛ ۸۰ میلی گرم است. پس جمله اول دنباله عدد ۸۰ است.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow[\substack{r = \frac{1}{2} \\ a_1 = 80}]{\substack{r = \frac{1}{2} \\ a_1 = 80}} S_n = 80 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \rightarrow S_3 = 80 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 80 \cdot \frac{1}{8} = 10 \text{ میلی گرم}$$

$S_{34}$ : میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از مصرف سومین قرص

کار در کلاس ۱ صفحه ۸۱ کتاب درسی

جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود).

جملات دنباله	$a_1$ (جمله اول)	$r$ (نسبت مشترک)	$S_n$ مجموع $n$ جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} = \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{14782}{19683}$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{1}{4} \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4 - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{255}{768}$ $S_8 = \frac{1}{4} \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^8 - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{65535}{196608}$





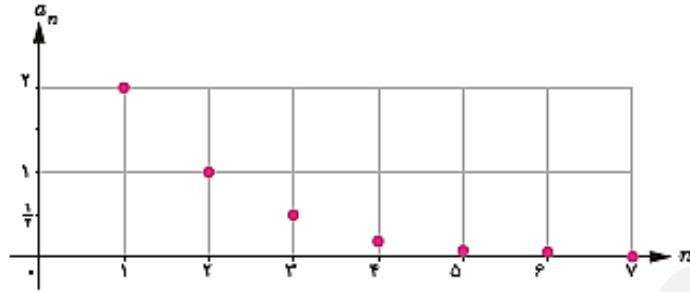
کار در کلاس ۱ صفحه ۸۱ کتاب درسی

جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود).

جملات دنباله	$a_1$ (جمله اول)	$r$ (نسبت مشترک)	$S_n$ مجموع $n$ جمله اول
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_3 = \frac{2}{5} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{7}{10}$ $S_9 = \frac{2}{5} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2.044}{2560}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_6 = \frac{2}{5} \times \frac{5^6 - 1}{5 - 1} = \frac{7812}{5}$

کار در کلاس ۲ صفحه ۸۱ کتاب درسی

نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:



الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل  $S_7$  را به دست آورید.

$$\times \frac{1}{2} \rightarrow 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

الف)  $a_n = ar^{n-1} \xrightarrow[r = \frac{1}{2}]{a = 2} a_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

ب)  $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow[r = \frac{1}{2}]{a = 2, n = 10} S_{10} = \frac{2 \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2 \left( \frac{1}{1024} - 1 \right)}{\frac{1}{2}} = 4 \left( \frac{1}{1024} - 1 \right)$

$$= 4 \left( \frac{1023}{1024} \right) = \frac{1023}{256}$$



## تمرین تکمیلی

سوال ۶: جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = 2^{n-1}$  است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

۱, ۲, ۴, ...

در اینجا دنباله ای هندسی با جمله اول یک و نسبت مشترک ۲ داریم.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow[r=2]{a=1} S_n = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$S_n = 255 \rightarrow S_n = 2^n - 1 = 255 \rightarrow 2^n = 256 \rightarrow n = 8$$

## تمرین ۱ صفحه ۸۳ کتاب درسی

با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد.

الف)  $a_{n+1} = (a_n)^2, a_1 = \frac{1}{2}$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256}$$

⋮

دنباله هندسی نیست

ب)  $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n, a_1 = \frac{1}{2}$

$$a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$a_4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{27}$$

⋮

دنباله هندسی با نسبت مشترک  $\frac{2}{3}$



## تمرین ۱ صفحه ۸۳ کتاب درسی

با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد.

پ)  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$  ,  $a_1 = 1$

$$a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

⋮

دنباله هندسی نیست

ت)  $a_{n+1} = 2a_n$  ,  $a_1 = 1$

$$a_2 = 2 \times 1 = 2$$

$$a_3 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_4 = 2 \times 4 = 8$$

⋮

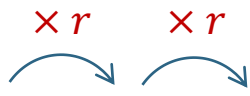
دنباله هندسی با نسبت مشترک ۲

## تمرین ۲ صفحه ۸۳ کتاب درسی

## واسطه هندسی

با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هر گاه  $a$  و  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه  $ac = b^2$  (  $b$  را واسطه هندسی میان  $a$  و  $c$  می نامند).

$$\dots, a, b, c, \dots$$

$\xrightarrow{\times r}$        $\xrightarrow{\times r}$   


$$r = \frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow ac = b^2$$



## تمرین ۳ صفحه ۸۳ کتاب درسی

اگر  $x + 3$  و  $x + 2$  و  $x$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید.

$$\dots, x, \overset{\times r}{\curvearrowright} x+2, \overset{\times r}{\curvearrowright} x+3, \dots$$

با توجه به تمرین قبل داریم:

$$(x+2)^2 = (x)(x+3) \rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 = \cancel{x^2} + 3x$$

$$\rightarrow 4x - 3x = -4$$

$$\rightarrow x = -4$$

تمرین ۴ صفحه ۸۳ کتاب درسی

سرطان از تکثیر بیش از حد سلول ها در بدن ایجاد می شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می شود و هر بار درصدی از سلول های سرطانی از بین می رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا  $10^{12}$  سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می ماند؟

دنباله ای هندسی با قدرنسبت  $0.4$  داریم.

پس از یک بار شیمی درمانی ۴۰٪ توده سلول سرطانی در بدن (این فرد باقی می ماند. یعنی:

$$t_1 = \left(\frac{4}{10}\right) 10^{12} = 0.4 \times 10^{12}$$

تعداد سلول سرطانی باقی مانده در بدن (این فرد پس از ۳ بار شیمی درمانی:

$$t_3 = \left(\frac{4}{10}\right) \left(\frac{4}{10}\right) \left(\frac{4}{10}\right) 10^{12} = 64 \times 10^9$$

$$t_n = t_1 \times r^{n-1} = \frac{4}{10} \times 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} = 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^n$$

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول های سرطانی اش به کمک شیمی درمانی کمتر از  $7 \times 10^6$  سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی مانده سلول های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند

مرتب باید شیمی درمانی شود؟

$$t_n < 7 \times 10^6 \rightarrow 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^n < 7 \times 10^6 \rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^n < \frac{7}{10^6}$$

$$\rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^n < 0.000007 \rightarrow n = 13$$

به کمک ماشین حساب با ضرب کردن  $0.4$  در خودش داریم:



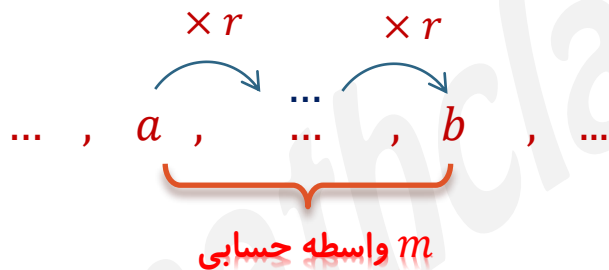


## تمرین ۵ صفحه ۸۳ کتاب درسی

## واسطه هندسی

میان دو عدد  $a$  و  $b$ ، تعداد  $m$  عدد را طوری قرار می دهیم که دنباله هندسی  $\dots, b, \dots, a, \dots$  را تشکیل دهند.

ثابت کنید نسبت مشترک آن از رابطه  $r^{m+1} = \frac{b}{a}$  به دست می آید.



$$a \times \underbrace{r \times r \times \dots \times r}_{m+1} = b \Rightarrow$$

$$a \times r^{m+1} = b \Rightarrow r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۷: بین اعداد ۷ و ۴۴۸ دو واسطه هندسی بیابید.

$$7, a, b, 448$$

$\times r$     $\times r$     $\times r$   
 $\curvearrowright$     $\curvearrowright$     $\curvearrowright$

$$7r^3 = 448 \rightarrow r^3 = \frac{448}{7} = 64 \rightarrow r^3 = 4^3 \rightarrow r = 4$$

$$a = 28$$

$$b = 112$$



## تمرین تکمیلی

سوال ۸: الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوئیم ۱۲ یک واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟

$$\begin{array}{c} \times r \quad \times r \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ 3, a, 48 \end{array} \quad 3r^2 = 48 \rightarrow r^2 = \frac{48}{3} = 16 \rightarrow r = \pm 4 \rightarrow a = \pm 12$$

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ **خیر**

$$\begin{array}{c} \times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ 3, a, b, c, 48 \end{array}$$

$$3r^4 = 48 \rightarrow r^4 = \frac{48}{3} = 16 \rightarrow r = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} a = \pm 6 \\ b = 12 \\ c = \pm 24 \end{cases}$$

## تمرین ۶ صفحه ۸۳ کتاب درسی

جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

$$t_5 = t_1 r^4 = 243$$

$$t_3 = t_1 r^2 = 27$$

$$\rightarrow \frac{t_5}{t_3} = \frac{t_1 r^4}{t_1 r^2} = \frac{243}{27} \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = \pm 3$$

$$t_1 r^2 = 27 \xrightarrow{r = \pm 3} 9t_1 = 27 \Rightarrow t_1 = \frac{27}{9} = 3$$

$$t_7 = t_1 r^6 = 3(\pm 3)^6 = 2187$$

## نتیجه:

اگر  $t_h$  و  $t_k$  دو جمله دلخواه از یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله از رابطه

$$r^{k-h} = \frac{t_k}{t_h}$$

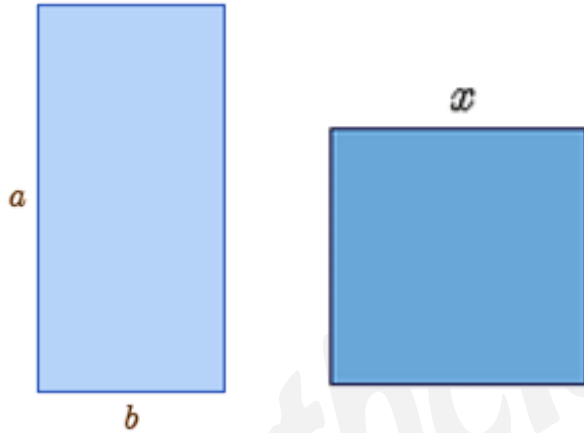
زیر به دست می آید:

$$\text{در تمرین بالا داریم: } r^{5-3} = \frac{t_5}{t_3} \rightarrow r^2 = \frac{243}{27} \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = \pm 3$$



## تمرین ۷ صفحه ۸۴ کتاب درسی

مستطیلی با اضلاع  $a$  و  $b$  مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع  $x$  هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می دهند؟

الف)  $x$  و  $b$  و  $a$ ب)  $a$  و  $x$  و  $b$ پ)  $x$  و  $a$  و  $b$ 

گزینه ب

$$x^2 = ab$$

$x$  واسطه هندسی  $a$  و  $b$  است.

## تمرین ۸ صفحه ۸۴ کتاب درسی

یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می ماند؟

دنباله ای هندسی با قدرنسبت  $0.85$  داریم.

وزن باقی مانده پس از گذشت یک دقیقه :

$$t_1 = \left(\frac{85}{100}\right) 15000 = 12750$$

$$t_n = t_1 \times r^{n-1} = 12750 \times \left(\frac{85}{100}\right)^{n-1}$$

وزن باقی مانده پس از گذشت ۵ دقیقه :

$$t_5 = 12750 \times \left(\frac{85}{100}\right)^4$$

دقت کنید: ۱۵۰۰۰ کیلوگرم وزن اولیه است نه جمله اول دنباله



تمرین ۹ صفحه ۸۴ کتاب درسی

شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد.  
 الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید).  
 ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص ۹ چند نفرند؟



$\times 2$   
 $\curvearrowright$   
 ۲, ۴, ۸, ...

الف)  $a_n = ar^{n-1} \xrightarrow[r=2]{a=2} a_n = 2(2)^{n-1} = 2^n$

$a_{10} = 2^{10} = 1024$

ب)  $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow[n=10]{r=2, a=2} S_{10} = 2 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2 \times 1023 = 2046$

## تمرین ۱۰ صفحه ۸۴ کتاب درسی

مجموع های زیر را به دست آورید.

الف)  $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

$$a_n = ar^{n-1} \xrightarrow[r=4]{a=1} a_n = 1(4)^{n-1} = 4^{n-1}$$

ابتدا تعداد جملات را می‌پاییم.

$$4^{n-1} = 4096 \rightarrow 4^{n-1} = 4^6 \rightarrow n-1 = 6 \rightarrow n = 7$$

معادله نمایی (پا آن‌ها در درس سوم پیشتر آشنا می‌شویم)

اینک می‌توانیم مجموع آنها را بیابیم.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow[r=4]{a=1, n=7} S_7 = 1 \times \frac{4^7 - 1}{4 - 1} = \frac{16384 - 1}{3} = 5461$$

دستور یافتن مجموع جملات یک دنباله هندسی متناهی از  $a$  تا  $b$ 

$$S = \frac{rb - a}{r - 1}$$

بدون داشتن تعداد جمله‌ها

$$S = \frac{4(4096) - 1}{4 - 1} = \frac{16383}{3} = 5461$$

در تمرین بالا داریم:





تمرین ۱۰ صفحه ۸۴ کتاب درسی

مجموع های زیر را به دست آورید.

پ)  $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

ابتدا تعداد جملات را می یابیم.

$$a_n = ar^{n-1} \xrightarrow[r = \frac{1}{2}]{a = \frac{1}{5}} a_n = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

معادله نمایی (با آن ها در درس سوم بیشتر آشنا می شویم)

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{640} \rightarrow \frac{1}{5(2)^{n-1}} = \frac{1}{640} \rightarrow 5(2)^{n-1} = 640 \rightarrow 2^{n-1} = 128$$

$$\rightarrow 2^{n-1} = 2^7 \rightarrow n-1 = 7 \rightarrow n = 8$$

اینک می توانیم مجموع آنها را بیابیم.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow[r = \frac{1}{2}]{a = \frac{1}{5}, n = 8} S_8 = \frac{1}{5} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{255}{256}}{\frac{1}{2}} = 0.3984375$$

دستور یافتن مجموع جملات یک دنباله هندسی متناهی از  $a$  تا  $b$

$$S = \frac{rb - a}{r - 1} \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{640}\right) - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{255}{1280}}{\frac{1}{2}} = 0.3984375$$

نکته تکمیلی

در دنباله هندسی اگر  $r$  بین یک و منفی یک باشد، مقدار  $r^n$  تقریباً برابر صفر خواهد شد.

$$S_n \cong \frac{-a}{r-1}$$

در نتیجه :

به عنوان مثال

حاصل عبارت زیر را به دست می آوریم.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$S_n \cong \frac{-a}{r-1} \xrightarrow[r=1]{r=\frac{1}{4}} S_n \cong \frac{-1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$



تمرین ۱۱ صفحه ۸۴ کتاب درسی

نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی  $\frac{1}{2}$  است.

(الف) کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟

(ب) مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

$$a_n = ar^{n-1} \xrightarrow[r = \frac{1}{2}]{a = 1536} a_n = 1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (\text{الف})$$

$$1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 6$$

معادله نمایی (با آن‌ها در درس سوم بیشتر آشنا می‌شویم)

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{6}{1536} \rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{256} \rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^8} \rightarrow 2^{n-1} = 2^8$$

$$\rightarrow n - 1 = 8 \rightarrow n = 9$$

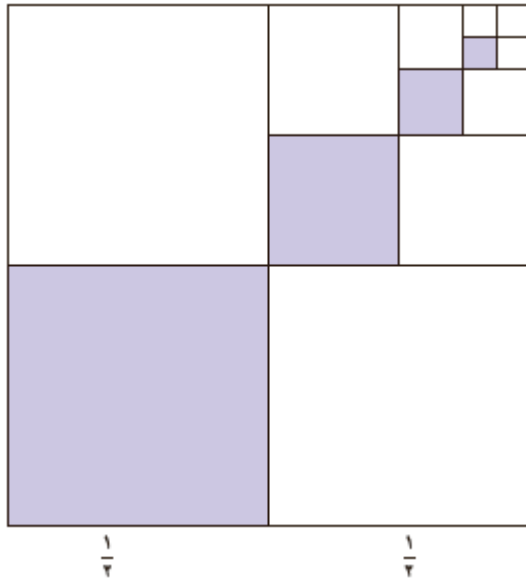
(ب)

$$S = \frac{rb - a}{r - 1} \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}(6) - 1536}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1533}{\frac{1}{2}} = 3066$$



تمرین ۱۲ صفحه ۸۵ کتاب درسی

پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می کنیم. از مربع های باقی مانده، مربعی را که با مربع رنگ آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ آمیزی می کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت های مربع های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد؟

$$\times \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$$

زیرا نسبت دو جمله متوالی مقداری ثابت است.

ب) اگر روند رنگ آمیزی گفته شده را  $n$  مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت های مربع های رنگی از چه رابطه ای به دست می آید؟

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \begin{matrix} r = \frac{1}{4} \\ a_1 = \frac{1}{4} \end{matrix} \rightarrow S_n = \frac{1}{4} \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}$$

پ) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می شود؟

$$S_6 = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{3} = \frac{4095}{3 \times 4096} = \frac{4095}{12288} \cong 0.333$$

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)