



# حجم و مساحت



کنبد ایوانس پداس تاریخی از سده چهارم هجری است که در شهر کعبه لویس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمامه آجری جهان به شعاع ۱۰ متر است. برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۱۰ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بنده استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شیب در این فعلل با خصوصیات استوانه مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

## درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شدند: منشوری، کروی و هرمی.



کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کروی است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کروی را نام ببرید. پرتقال - هندوانه - گریس - گردو

### فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.

با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.



مجموعه آن نقاط از

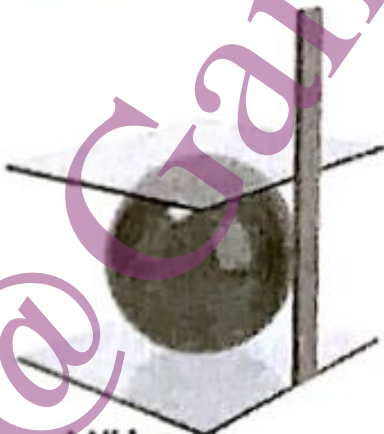
کره مجموعه نقاطی از فضا است که همه آن نقاط از یک نقطه به یک فاصله ثابت هستند. به این اندازه ثابت شعاع کره می‌گوییم.

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.

● یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

● مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر

کره را اندازه بگیرید.





• مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توب کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن معاس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

$$2R = \text{ارتفاع استوانه}$$

$$R = \text{شعاع قاعده استوانه} \quad \text{حجم استوانه} = S \times h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$$

• توب را از استوانه خارج کنید و بادقت آن را ببرد تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را بادقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.



الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟  $\frac{3}{2}$  برابر  
 ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟  $\frac{3}{2}$  برابر یا  $\frac{3}{4}$   
 ج) بنابراین حجم کره  $\frac{2}{3}$  برابر حجم استوانه است.  
 د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

حجم کره‌ای به شعاع R از دستور  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  به دست می‌آید.

### کار در کلاس

$$R = 5, h = 10$$

$$\text{الف) } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 125 = \frac{500}{3}\pi$$

$$\text{ب) } V = S \times h = \pi \times 5^2 \times 2 \times 5 = 250\pi$$

$$\text{ج) } V_{\text{کره}} - V_{\text{استوانه}} = \frac{500}{3}\pi - 250\pi = \frac{250}{3}\pi$$

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر محاط شده است.

الف) حجم کره را به دست آورید.

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را به دست آورید.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi \times 10^3 = \frac{2000\pi}{3}$$



۱- مانند شکل مقابل، نیم کره ای را که از نصف کردن توب پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره ها قرار گیرد و آن را بیوشاند.

این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حد امکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم کره نیز دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بیوشانید؟ بله در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید. در بعضی ها کاغذ چروک می شود.



۲- ثابت می شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع  $R$ ، دو برابر مساحت دایره ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).

الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با:  $2\pi R^2$   
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع  $R$  برابر است با:  $4\pi R^2$

مساحت یک کره به شعاع  $R$  برابر است با:  $S=4\pi R^2$

### کار در کلاس



۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع  $10$  سانتیمتر را پیدا کنید.  $2\pi R^2 = 2\pi \times 10^2 = 400\pi$

\* ۲- می خواهیم یک نیم کره جوی توپر به شعاع  $10$  سانتیمتر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.  $S = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 10^2 = 300\pi$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره جوی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

در مساحت نیوکره جوی توپر برابر مساحت دایره هر یک  $100\pi$  و در مساحت نیوکره  $200\pi$  برابر مساحت دایره محاسب می شود.

ع)  $S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,2 \times 10^3)^2 = 4\pi \times 17,64 \times 10^6 = 70,56\pi \times 10^6 = 2,2072 \times 10^8 \pi$   
 $S = 4\pi R^2 = 4\pi (4,2 \times 10^3)^2 = 4\pi \times 17,64 \times 10^6 = 70,56\pi \times 10^6 = 2,2072 \times 10^8 \pi$  مترمربع

$$\frac{1,748 \times 10^4}{1,728 \times 10^4 \times \pi} = \frac{1,748}{1,728 \times \pi} = 0,032 = 3,2 \times 10^{-3}$$

$$3,2 \times 10^{-3} \times 10^5 = 3,2 \times 10^{-1}$$

**تمرین**

قطر =  $1,28 \times 10^4$   
 شعاع =  $6,4 \times 10^3$

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

(الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

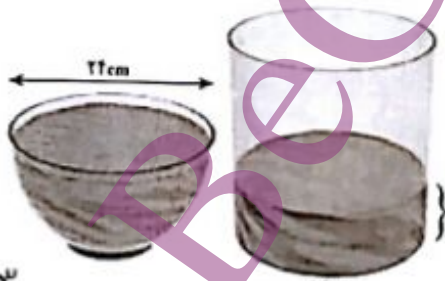
(ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید. - قطر  $1,28 \times 10^7$  شعاع  $6,4 \times 10^6$   
 (ج) مساحت تقریبی روزه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.  
 (د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود  $1/648000$  کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

ارتفاع  $h = 1 - 0,3 = 0,7 \text{ m}$

$V = \pi \times 0,3^2 \times 0,7 = 0,42\pi$   
 $V = \frac{4}{3} \pi \times 0,3^3 \times \frac{1}{4} = 0,09\pi$   
 $= \frac{2\pi \times 0,27}{3} = 0,18\pi$   
 $V = 0,42\pi + 0,18\pi = 0,6\pi$   
 حجم کپسول



۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.  
 $R = 0,3 \text{ m}$   
 $h = 1 \text{ m}$   
 اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد. دریا مس



۳- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۲ سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

$V = \frac{4}{3} \pi \times 12^3 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \pi \times 12^3$   
 $\Rightarrow \pi = \frac{\frac{2}{3} \pi \times 12^3}{\pi \times 12^2} = \frac{2}{3} \times 12 = 8$  ارتفاع آب  
 حجم آب =  $\pi \times 12^2 \times 8$

سؤال ۲ قسمت ب

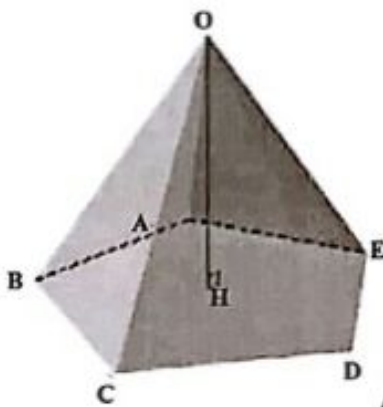
مساحت جانبی استوانه =  $2\pi R \times h = 2\pi \times 0,3 \times 0,7 = 0,84\pi$   
 مساحت روزه =  $\pi R^2 = \pi \times 0,3^2 = 0,09\pi$   
 مساحت کل =  $0,18\pi + 0,84\pi + 0,09\pi = 0,91\pi$  مترمربع

۱۳۴

$0,91\pi \times 100 = 91\pi$  گرم  $\rightarrow 91\pi \times 10^{-3} = 0,091\pi$  لیتر



یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. سه نمونه دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید. چادری، عجمنا، سی - پالت سیر  
پاسورزه سروس - کوهرا، درختان کاج

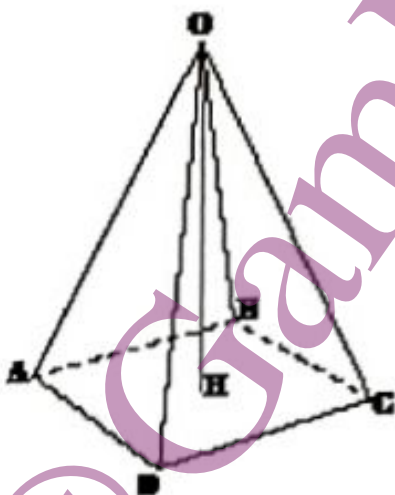


هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل نام رأس: ... تعداد وجه‌ها: ...

شکل وجه‌ها: ... شکل قاعده: ... نام قاعده:  $ABCD.E$

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل،  $OH$  بر قاعده  $ABCD.E$  عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال هرم بالا به صورت  $OABCDE$  خوانده می‌شود.

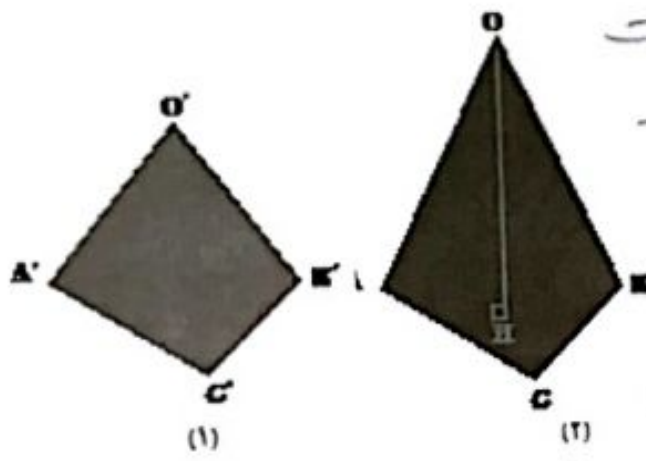
### فعالیت



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل: نام رأس:  $O$ ، ... ارتفاع:  $OH$  ... شکل قاعده: چهارضلعی منتظم شکل وجه‌های جانبی: مثلث ... تعداد وجه‌ها: یک ...

درج

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در

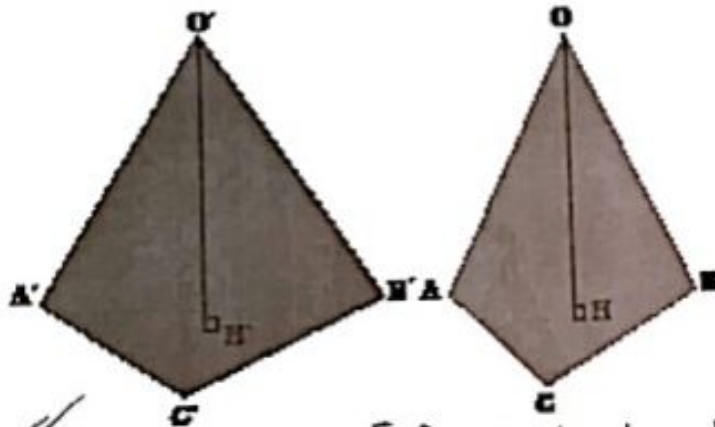


شکل های (۱) و (۲) مثلث های قاعده هم نه

هستند

$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل های (۳) و (۴) ارتفاع ها برابر است

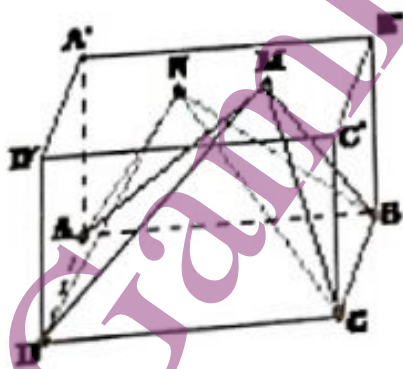


$$S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ به مساحت قاعده و ارتفاع بستگی دارد.  
 ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می زنید؟ از قاعده و ارتفاع مثلث - به قاعده و ارتفاع مثلث و ارتفاع هرم  
 د) اگر دو هرم دارای قاعده های با مساحت مساوی و ارتفاع های مساوی باشند، درباره حجم های آنها چه می توانید بگویند؟ حجم ها برابر می باشند.

اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آنها با هم برابر است.

### کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا هرم های MABCD و NABCD دارای حجم های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می توان ساخت که با هرم های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

۱۳۶

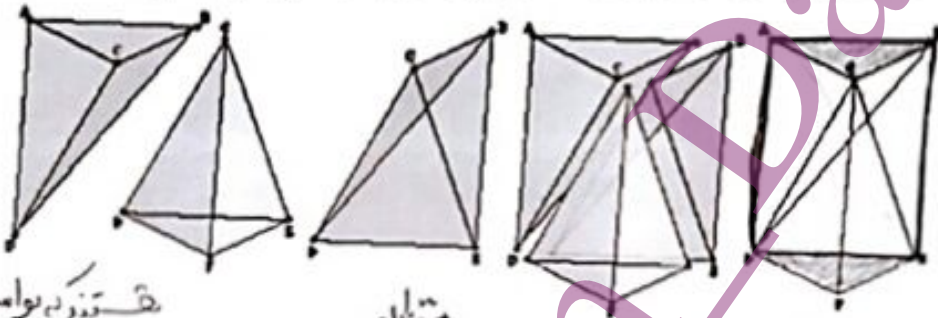
- چون دایره قاعده و ارتفاع برابر می باشند.

بسیار هرم که با تغییر نقطه های M و N می توان هرم های متفاوت ساخت.

## شکلیت

### محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشور با دو قاعده  $\hat{ABC}$  و  $\hat{DEF}$  را ملاحظه می‌کنید. نقطه C را به نقطه‌های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می‌کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می‌دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم‌های برابر دارند و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



نقطه D را به واسطه قطر مسقط ایجاد کنید

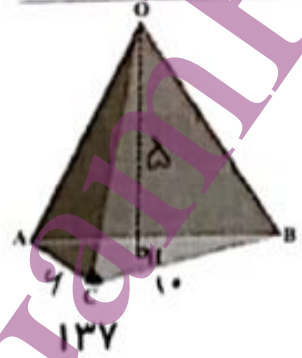
متساوی

- ۱- چهار ضلعی ABED، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت دارند؟
- ۲- چرا هر دو هم‌قاعده‌ای CBAD و CBED دارای حجم‌های برابر است؟ چرا مثلث‌های BDE و ABD هم مساحت دارند؟
- ۳- چرا مثلث‌های ABC و DEF هم مساحت دارند؟ چرا هر دو قاعده منشور هم‌قاعده‌ای هستند؟
- ۴- چرا هر دو هم‌قاعده‌ای DABC و CDEF دارای حجم‌های برابر است؟ چرا هر دو قاعده منشور هم‌قاعده‌ای هستند؟
- ۵- با توجه به پاسخ سؤالات ۲ و ۳ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ این هم‌قاعده‌ای CBAD، CDEF و CDEA را با هم مقایسه کنید.

حجم هر هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}(\pi R^2)h$$

## کاردرکلاس



در شکل مقابل هرم OABC دارای قاعده ABC است که در آن  $AC = 6\text{cm}$  و  $BC = 10\text{cm}$  و زاویه  $\hat{ACB} = 90^\circ$  و ارتفاع OH ارتفاع هرم مساوی 5cm است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به دست آورید.

@GAB



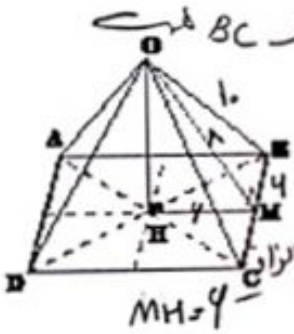
$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{4 \times 10}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 20 \times 5 = 33.33 \text{ cm}^3$$

### فعالیت

در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ cm و M وسط BC است.

- ۱- پاره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ عمود منصف BC
- ۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم‌الزاویه



۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس  $OM^2 = OB^2 - MB^2$  در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.  $OM = 8 \text{ cm}$

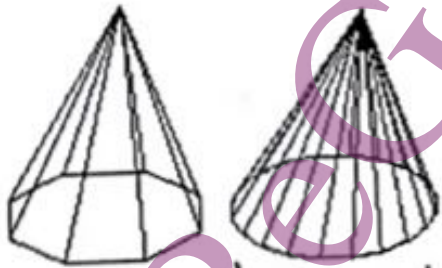
۴- مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ تمام الزامات را

۵- به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را به دست آورید.  $OH = 2\sqrt{7}$

$$OH^2 = OM^2 - MH^2$$

$$OH^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$OH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



- ۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.
- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و ... . جال تعداد ضلع‌های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره - مخروط

مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می آید:

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

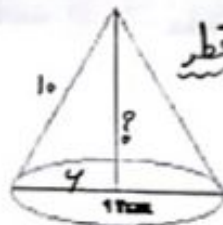
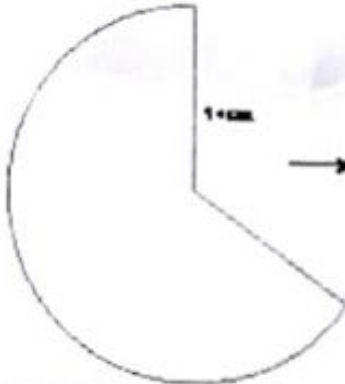


### کار در کلاس

$$h^2 = 10^2 - 4^2$$

$$h^2 = 100 - 16 = 84$$

$$h = \sqrt{84}$$



علی با قسمتی از دایره به شعاع 10 cm، مخروطی به قطر قاعده 8 cm ساخته است. حجم مخروط را به دست آورید.

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times \sqrt{84} = 94 \pi \text{ cm}^3$$

### تمرین

$$V = \frac{1}{3} \times 5 \times 4 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$$

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۵ و ۶ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد.

$$V = \frac{1}{3} S h$$

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ cm باشد و وجه های جانبی آن مثلث های مناسای الساقینی به ساق های ۸ cm باشد.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 12$$

$$V = 48 \pi$$

ظرف مخروطی



۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب پر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶ cm است، خالی می کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟

$$V = S h = 4 \pi h$$

$$48 \pi = 24 \pi h$$

$$h = \frac{48}{24} = 2 \text{ cm}$$

$$* \frac{48}{24} = 2$$

۱۳۹

$$OM^2 = OB^2 - BM^2$$

$$OM^2 = 8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60$$

$$OM = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$OH^2 = OM^2 - MH^2$$

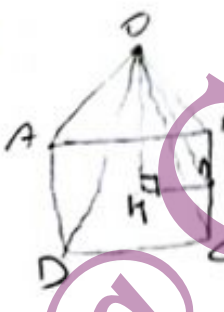
$$OH^2 = 60 - 16 = 44$$

$$OH = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h =$$

$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{11}$$

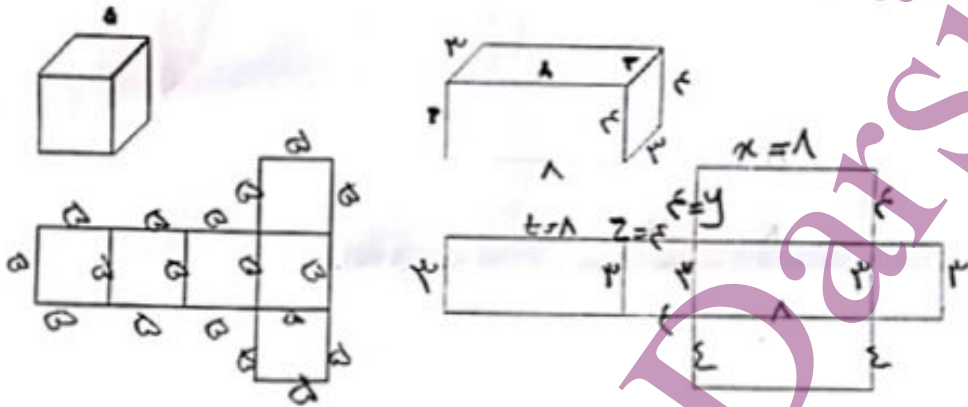
$$= \frac{32\sqrt{11}}{3} \text{ cm}^3$$



مثالیت

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام

منفص کنید.



۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

مساحت  $S = 4 \times 4 = 16$

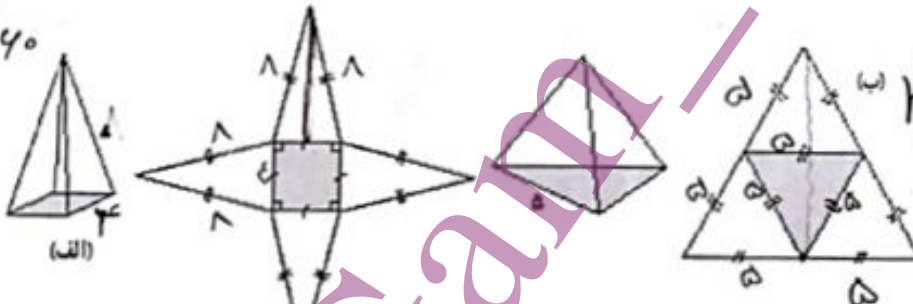
$h^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$

$h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$S = \frac{4 \times 4 \times 4 \times 4}{3}$

$= 14\sqrt{15}$

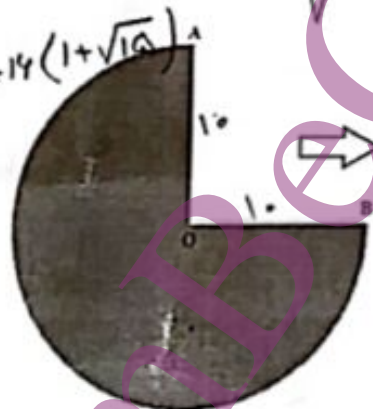
$S_{total} = 16 + 14\sqrt{15} = 14(1 + \sqrt{15})$



$h^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$

$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$S = \frac{5\sqrt{3} \times 10}{2} = 25\sqrt{3}$



۲-  $\frac{3}{4}$  دایره‌ای به شعاع

۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک

آن یک سطح مخروطی شکل درست

کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟

چه رابطه‌ای بین طول کمان AB

و محیط دایره قاعده مخروط وجود

دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.

پاهم برابرند

۱۴۰

$P = 2R\pi = 2\pi \times 10 = 20\pi$

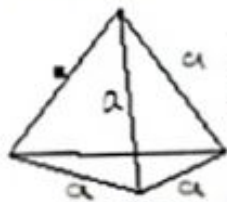
$20\pi \div 4 = 5\pi$

طول کمان AB =  $5\pi$

مخروط  $P = 5\pi$

$5\pi = 2\pi R$

شعاع قاعده مخروط  $R = \frac{5}{2} = 2.5$



۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همه بال های آن 'a' است.



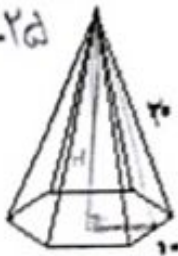
$$OH = OB' - BH$$

$$OH^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$OH = a\sqrt{3}, S = \frac{a\sqrt{3} \times 4a}{2} = 2a^2\sqrt{3}$$

$$h^2 = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$$

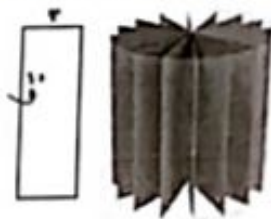
$$h = \sqrt{375}$$



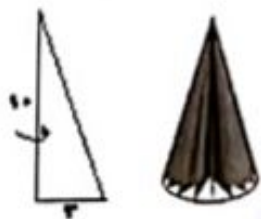
۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده منش ضلعی منتظم و اندازه بال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.

$$= \frac{4 \times \sqrt{375} \times 10}{2} = 20\sqrt{375} \approx 580.9$$

### فعالیت



۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟ استوانه  
شعاع قاعده شکل حاصل: ... ارتفاع شکل حاصل: ...  
حجم شکل حاصل را پیدا کنید.



۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید. محور  
شعاع قاعده شکل حاصل: ... ارتفاع شکل حاصل: ...  
...  
 $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi 3^2 \times 10 = 30\pi$

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.



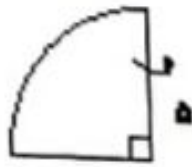
کره حاصل می شود



شکل لدا

درست می شود

استوانه که در سمت راست آن مخروطی خالی شده و در سمت چپ به همان اندازه مخروط اضافه شده است.

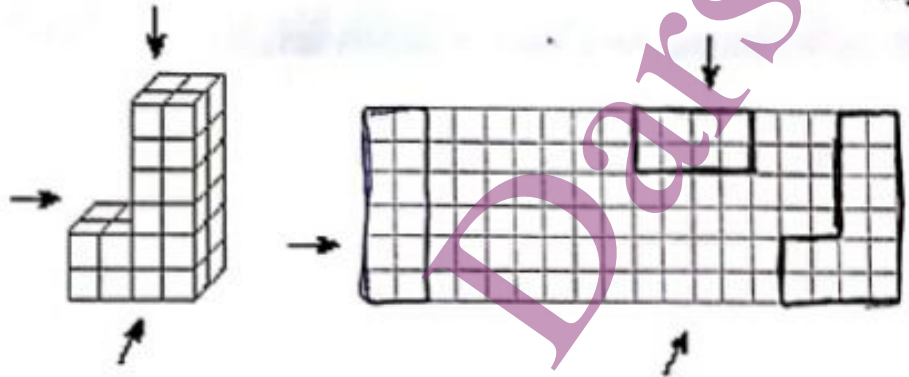


حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع 5cm را حول شعاع آن پیدا کنید  
 شماره حاصل می شود

$$\frac{1}{4} \pi R^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \pi \times 5^3 = \frac{250\pi}{8}$$

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

الف) هرم منتظم با قاعده منش ضلعی (ب) هرم منتظم با قاعده مربع (ج) هرم منتظم با قاعده مثلث مثلث مساوی و الا المربع  
 الف نَسْ صندلی



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟ دایره - ابرم دونه پاره مساوی تقسیم شود



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

از نمبر ۵ با ۱/۵ به اندازه ۱/۶ آن برداشته شده

۱۴۲ ص ۱/۶ × ۱/۶ = ۱/۸ از کره می بماند

## کار در کلاس



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع  $a$  را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی متصل است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

$$x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$x = a\sqrt{2} \quad \text{طول متغیر}$$

$$= a \quad \text{عرض متغیر}$$

تمرین

شکل سوم استوانه

① مکعب به ضلع  $a$   
 $S = 2\pi a \times a = 2\pi a^2$   
 جانبی

$$S_{\text{کل}} = 2\pi a^2$$

$$S' = 2\pi a^2 + 2\pi a^2$$



$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

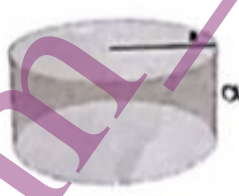
② کره به شعاع  $a$



$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

③ استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده  $a$



$$V = \pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

④ استوانه به ارتفاع و قطر قاعده  $a$



$$V = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

$$\frac{a^3}{4}$$

$$S = \pi a \times a = \pi a^2$$

$$S' = 2 \times \pi \times \frac{a}{2} = \pi a^2$$

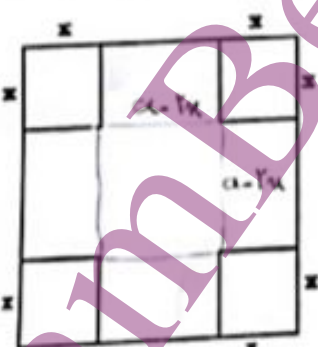
①  $\frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$

②  $\frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$

③  $\frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$

④  $\frac{\frac{1}{4}\pi a^3}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \frac{a}{6}$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح  $(\frac{V}{S})$  را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟



شکل دوم  
 ۲- از یک مقوا به ضلع  $a$  گوشه های مربع شکل به ضلع  $x$  را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای بین  $a$  و  $x$  باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع  $x$  داخل این جعبه جای داد.

$$a - 2x = 4x$$

$$a = 4x + 2x = 6x$$



س  $a$  باید ۶ برابر  $x$  باشد.