تقسیم :

مقسوم

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 5x + 1 & x - 2 \\ \cancel{3x^2} + 6x & \hline 3x + 1 \\ \hline x + 1 & \\ \cancel{x} - 2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

مقسوم علیه

خارج قسمت

باقی مانده

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 + 1 & x + 1 \\ \cancel{2x^3} + 2x^2 & \hline 2x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ -x^2 - x & \\ \hline x + 1 & \\ -x + 1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow 2x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(2x^2 - x + 1)$$

شیوهٔ ساده جهت یافتن باقیمانده :

مثال : در هر تقسیم باقیمانده را تعیین کنید

الف) $2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 2$ $\longrightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x = 2 \longrightarrow 12 - 10 + 1 = 3$ باقیمانده

ب) $2x^3 + x^2 + 1$ بر $x + 1$ $\longrightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x = -1 \longrightarrow -2 + 1 + 1 = 0$ باقیمانده

مثال : باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ بر $x - 1$ را بیابید.

$x = 1$

$3 - 5 + 7 - 1 = 4 =$ باقیمانده

مثال : نشان دهید چند جمله‌ای $F(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر است.

$x + 2 = 0 \longrightarrow x = -2$

$\Rightarrow$ باقیمانده $= -16 + 20 + 6 - 10 = 0 \Longrightarrow$ بخش پذیر است

مثال: a را چنان بیابید که چند جمله‌ای $3x^4+ax^3+x^2+7$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$$\text{باقیمانده} = 3-a+1+7=0 \Rightarrow -a=-11 \Rightarrow a=11$$

مثال: a و b را چنان بیابید که چند جمله‌ای $F(x)=4x^3+3x^2+ax+b$ بر $x-2$ بخش‌پذیر بوده و باقیماندهٔ تقسیم F بر $x+1$ برابر $\underline{6}$ باشد.

$$\underline{x=2} \rightarrow 32+12+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b=-44$$

$$\underline{x=-1} \rightarrow -4+2-a+b=6 \Rightarrow -a+b=7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-44 \\ -a+b=7 \end{cases} \xrightarrow{\times(-)} \begin{cases} 2a+b=-44 \\ a-b=-7 \end{cases}$$

$$\longrightarrow 3a=-51 \Rightarrow a=-17$$

$$a=-17 \rightarrow 17+b=7 \Rightarrow b=-10$$

مثال: به ازای چه مقدار از m ها دو چند جمله‌ای $F(x)=x^3+x^2+(m-4)x+m$ و $g(x)=5x^2+mx+7$ بر تقسیم بر $x-1$، هم باقیمانده‌اند.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \begin{cases} \xrightarrow{F} 1+1+m-4+m=2m-2 \\ \xrightarrow{g} 5+m+7=m+12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m-2=m+12 \Rightarrow m=14$$

محاسبه حد:

مثال: $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{x-4} = \frac{13}{-2}$

مثال: $\lim_{x\to -1} \frac{x+\sqrt{x+5}}{2x^2-1} = \frac{-1+2}{2-1} = -1$

مثال: $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-x}{x^2+7} = \frac{0}{7} = 0$

مثال: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{2x-4} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام در توابع گویا:

مثال: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{2x-4} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{2(x-2)} = \frac{2}{2}$$

مثال: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{6}{3} = 2$$

مثال: $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2+x-10} = \frac{0}{0}$ مبهم

صورت:

	2	-5
2		4
	$2x$	-1

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x^2+2x+5)} = \frac{3}{13}$$

مخرج:

	1	0	1
2		2	4
	$1x^2$	$2x$	5

مثال: $\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8} = \frac{0}{0}$ مبهم

صورت:

	2	3	0
-2		-4	2
	$2x^2$	$-1x$	2

$$\Longrightarrow \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(2x^2-x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{12}{12} = 1$$

مخرج:

	1	0	0
-2		-2	4
	$1x^2$	$-2x$	4

مثال: $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

x	$\frac{1}{2}$	
$4x-2$		0
2		2
$4x^2-4x+1$		0

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(4x-2)}{(x-\frac{1}{2})(2x+2)} = \frac{0}{3} = 0$$

x	$\frac{1}{2}$	
$x-\frac{1}{2}$		0
1		1
$2x+2$		3
$x-\frac{1}{2}$		0

مثال: $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x^3-11x^2+12x-9} = \frac{0}{0}$ مبهم

x	$\frac{1}{2}$	
$4x+2$		4
2		2
$4x^2-1$		0

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(4x+2)}{(x-\frac{1}{2})(2x^2-11x+18)} = \frac{4}{\frac{25}{2}} = \frac{8}{25}$$

x	$\frac{1}{2}$	
$x-\frac{1}{2}$		0
$2x^2-11x+18$		$25/2$
$2x^2-11x+18$		$25/2$

x	2	-11	18
$x-\frac{1}{2}$		1	-9
	2	-11	18

نکته سختی: برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع گویا کافیست از صورت و مخرج جداگانه مشتق بگیریم.
«هوپیتال»

مثال: $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x-4}{4x+1} = \frac{0}{3} = 0$

رفع ابهام در توابع رادیکالی :

مثال: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

مثال: $\lim_{x\to 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 5} \frac{5-x}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$$

مثال: $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x^2+x-2)(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

مثال: $\lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{2x^2-5x-3} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{2x^2-5x-3} \times \frac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{x+6}} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{(2x^2-5x-3)(x+\sqrt{x+6})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(2x+1)(x+\sqrt{x+6})} = \frac{5}{7\times 6} = \frac{5}{42}$$

	1	-1
2		2
	$1x$	2

	3	-5
3		6
	$2x$	1

تذكر: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

مثال: $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \frac{0}{0}$ صورة

$\Rightarrow \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} \times \frac{\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$ "

$= \lim_{x\to 8} \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$

مثال: $\lim_{x\to 8} \frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{0}{0}$ صورة

$\Rightarrow \lim_{x\to 8} \frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2} \times \frac{\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4}$

$= \lim_{x\to 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} = 8(4+4+4) = 96$

مثال: $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+2}{\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{0}$ صورة

$\Rightarrow \lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+2}{\sqrt[3]{x}+1} \times \frac{\sqrt[3]{x}^2-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}^2-\sqrt[3]{x}+1}$

$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x}^2-\sqrt[3]{x}+1)}{x+1} = 1\times 2 = 2$

مثال: $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-5}-2} = \frac{0}{0}$ نعوض

$$\Rightarrow \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-5}-2} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \times \frac{\sqrt{x-5}+2}{\sqrt{x-5}+2}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{6}$$

مثال: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0}$ نعوض

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

مثال: $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{0}{0}$ نعوض

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+2}} \times \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(2x^2+\sqrt{x+5})(x-\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x+5)(x-\sqrt{x+2})}{(x+1)(x-2)} = \frac{1\times(-2)}{-3} = \frac{2}{3}$$

$\lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \frac{0}{0}$ نعوض

$$\lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{x^2-9} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3} \frac{5-x-1}{(x^2-9)(2+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{6\times 4} = \frac{-1}{24}$$

توجه: درست برای رفع ابهام می‌توان از هوپیتال کمک گرفت

مثال: $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+2}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{0}{0}$ مبهم

$\xrightarrow{H\circ P} \lim_{x\to -1} \frac{2x+4}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \frac{-2+4}{\frac{1}{3}} = 6$

همسایگی:

همسایگی یعنی بازه‌ی باز که x_0 در دل آن باشد

مثال: سه همسایگی برای عدد ۴ بنویسید.

$(3,6)$ ، $(2,7)$ ، $(1,6)$

اگر (a,b) همسایگی x_0 باشد آنگاه $a < x_0 < b$ است.

مثال: حدود k را چنان بیابید که $(2,5)$ همسایگی عدد $3k+2$ باشد.

$\Rightarrow 2 < 3k+2 < 5 \xrightarrow{-2} 0 < 3k < 3 \xrightarrow{\div 3} 0 < k < 1$

مثال: حدود m را چنان بیابید که بازه $(1-m, 7)$ همسایگی عدد 5 باشد.

$m-1 < 5 < 7 \Rightarrow m-1 < 5 \Rightarrow m < 6$

توجه: اگر بازه (a,b) همسایگی عدد x_0 باشد و x_0 را از آن حذف کنیم

به صورت $(a,b) - \{x_0\}$ نوشته شده که همسایگی محذوف x_0 نام دارد.

مثال: سه همسایگی محذوف برای عدد 3 بنویسید.

$(2,4) - \{3\}$ ، $(1,4) - \{3\}$ ، $(2,5) - \{3\}$

توجه: بازه $(5,2)$ همسایگی راست 2 و بازه $(2,-2)$ همسایگی چپ 2 می‌باشند.

در حالت کلی همسایگی راست عدد x_0 به صورت (x_0, x_0+r) که کمی بیشتر از x_0

و همسایگی چپ عدد x_0 به صورت (x_0-r, x_0) که عددی کمتر از x_0

مثال: دو همسایگی راست برای عدد 5 بنویسید.

$(5,7)$ و $(5,5,1)$

مثال: دو همسایگی چپ برای عدد 5 بنویسید.

$(-1,5)$ و $(4,99,5)$

محاسبه حد توابع جزء صحیح دار:

$\lim_{x\to 7^+} [x]-5 = 21-5=16$ $\quad [7^+]=7$ کمی بیشتر از 7

$\lim_{x\to 7^-} [x]-5 = 18-5=13$ $\quad [7^-]=6$ کمی کوچکتر از 7 مثلا $6,9$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{[x]+1}{2[x]+3} = \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3}$ ، $\lim_{x\to 0^-} \frac{[x]+1}{2[x]+3} = \frac{-1+1}{-2+3} = \frac{0}{1} = 0$

مثال: آیا تابع $f(x)=[x][x+1]$ در $x=0$ حد دارد؟

$\lim_{x\to 0^+} [x][x+1] = 0\times 1 = 0$

$\lim_{x\to 0^-} [x][x+1] = -1\times 0 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} [x][x+1] = 0$

تابع دارای حد است.

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to 4^-} [x] + \lim_{x\to 3^+} [x] = 5+3 = 8$

ب) $\lim_{x\to \frac{3}{2}} [x] + \lim_{x\to (-2)^-} [x] + \lim_{x\to (-2)^+} [x] = 1+(-3)+(-2) = -4$