پیشامدهای مستقل

استقلال پیشامدها :

اساساً دو پیشامد رو مستقل می گن که روی دادن یکی روی دیگری بی اثر باشه یا احتمال وقوع یکی به وقوع یا عدم وقوع دیگری هیچ ربطی نداشته باشد. امکان داره دو پیشامد سازگار (یعنی اشتراک داشته باشند) یا ناسازگار باشند (اشتراک نداشته باشند) کلاً پیشامدهای مستقل می تونن در دو حالت تعریف بشن.

- **دستهٔ اول** پیشامدهایی هستن که از نوع آنها می شه به سادگی مستقل بودن شان را فهمید مثل احتمال قبولی دو نفر در امتحان رانندگی که قبولی هر فرد به میزان مهارت خودش ربط داره و به قبولی یا عدم قبولی فرد دیگر هیچ ربطی ناره یا رنگ چشم یک فرد به نوع گروه خونی او هیچ ارتباطی نداره.
- **دستهٔ دوم** پیشامدهایی هستند که تعیین احتمال اونها به تعداد عضوهاشون بستگی داره و باید در تعیین احتمال هر کدام، از نظریهٔ مجموعه کمک بگیریم. در این حالت امکان داره نتونی به طور مستقیم، مستقل یا وابسته بودنشان رو بفهمی که در این صورت لازمه از قانون استقلال پیشامد $[P(A\cap B)=P(A)P(B)]$ کمک بگیری. واسهٔ این که کاملاً متوجه منظورم بشی چندتا مثال در رابطه با چیزای که بهت گفتم حل می کنم.

قانون استقلال پیشامدها :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$$

نکته: شرط لازم و کافی برای آن که دو پیشامد A , B مستقل باشند، آن است که رابطه $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ برقرار باشد.

سؤال ۱: اگر ۷۵ درصد از افراد جامعه ای دارای چشم مشکی و ۴۰ درصد گروه خونی آنها از نوع A باشد در انتخاب یک فرد به طور تصادفی از این جامعه با کدام احتمال گروه خونی اش غیر از A و رنگ چشمش مشکی است؟

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۰۱ ۴) ۰/۴۵

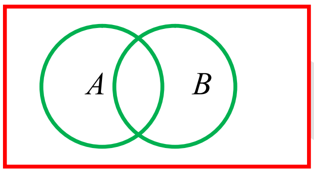
پاسخ: گزینه۴

رنگ چشم کاملاً مستقل از گروه خونی است بنابراین داریم؛

P (رنگ چشم مشکی $\cap A$ گروه خونی غیر از) $=P$ (چشم مشکی) $\times P$ (گروه خونی غیر از A)

$$=\left(1-\frac{۴۰}{۱۰۰}\right)\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۴۵}{۱۰۰}$$

سؤال ۲: شخصی به یک تخته هدف به شکل روبرو شلیک می کند احتمال آن که ناحیه A را بزند ۰/۲ و احتمال آنکه ناحیه B را بزند ۰/۳ و احتمال آنکه هر دو ناحیه را بزند ۰/۱ است احتمال های زیر را بیابید.



$P(A\cap B)=۰/۱$

۱) A را بزند و B را نزدند.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\cdot/\text{۱}$$

۲) B را بزند و A را نزند.

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\cdot/\text{۲}$$

۳) B را نزند.

$$P(B')=\text{۱}-P(B)=\cdot/\text{۷}$$

۴) A یا B را بزند.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\cdot/\text{۲}+\cdot/\text{۳}-\cdot/\text{۱}=\cdot/\text{۴}$$

سؤال ۳: در یک آزمایش تصادفی دو پیشامد A , B مستقل بوده $n(A)=\text{۴},n(B)=\text{۹}$ و پیشامد این که حداقل یکی از دو پیشامد A و B روی دهد، ۱۲ عضو دارد. فضای نمونه ای چند عضو دارد؟

۱) ۳۰   ۲) ۳۶   ۳) ۶۰   ۴) ۷۲

پاسخ: گزینه۲

پیشامد این که حداقل یکی از دو پیشامد A , B رخ دهد همان $A\cup B$ است.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow \text{۱۲}=\text{۴}+\text{۹}-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=\text{۱}$$

اگر دو پیشامد B,A مستقل باشند آنگاه:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow \frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}\times\frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{۱}}{n(S)}=\frac{\text{۴}}{n(S)}\times\frac{\text{۹}}{n(S)}\Rightarrow n(S)=\text{۳۶}$$

سؤال ۴: خانواده ای دارای سه فرزند است. اگر پیشامد از هر دو جنس بودن فرزندان این خانواده را با A و پیشامد دارا بودن حداکثر یک پسر را با B نمایش دهیم پیشامدهای A و B ...

۱) وابسته اند   ۲) ناسازگارند   ۳) جدا از هم هستند.   ۴) مستقلند.

پاسخ: گزینه۴

در این مثال شرایط پیشامدها به گونه ای است که نمی توان مستقیماً نوع آنها را تعیین نمود. بنابراین لازم است که برای تعیین مستقل یا وابسته بودن آنها از شرط لازم و کافی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ استفاده کنیم:

$$A=\{(\text{د،پ،پ})،(\text{پ،د،پ})،(\text{پ،پ،د})،(\text{پ،د،د})،(\text{د،پ،د})،(\text{د،د،پ})\}\xrightarrow{n(s)=\text{۸}}P(A)=\frac{\text{۶}}{\text{۸}}$$

$$B=\{(\text{د،د،د})،(\text{پ،د،د})،(\text{د،پ،د})،(\text{د،د،پ})\}\xrightarrow{n(s)=\text{۸}}P(B)=\frac{\text{۴}}{\text{۸}}$$

$$A\cap B=\{(\text{پ،د،د})،(\text{د،پ،د})،(\text{د،د،پ})\}\xrightarrow{n(s)=\text{۸}}P(A\cap B)=\frac{\text{۳}}{\text{۸}}$$

$$P(A\cap B)=\frac{\text{۳}}{\text{۸}}\Rightarrow P(A)P(B)=\frac{\text{۶}}{\text{۸}}\times\frac{\text{۴}}{\text{۸}}\rightarrow \text{پیشامدهای } A \text{ و } B \text{ مستقلند}$$

نکته: اگر دو پیشامد A , B مستقل باشند آنگاه پیشامدهای A',B' و پیشامدهای A و B' و پیشامدهای A' و B مستقل هستند در حالت کلی می توان گفت اگر دو پیشامد مستقل از هم باشند متمم های آنها مستقلند و متمم یکی با دیگری مستقل از هم هستند.

می خواهم با فرض مستقل بودن A , B برایت ثابت کنم که A' و B مستقلند.

$$\left.\begin{aligned} &P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\\ &\qquad :P(A\cap B)=P(A)P(B)\\ &P(A'\cap B)=P(B)P(A')\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow P(A'\cap B)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(۱-P(A))$$

$$\Rightarrow P(A'\cap B)=P(B)P(A')$$

حالا با فرض مستقل بودن A , B ثابت کن که پیشامدهای A',B' و پیشامدهای A و B' مستقلند.

سؤال ۵: احتمال موفقیت به شکست پیشامد A ۳ به ۲ است و احتمال رخ داد پیشامد B به عدم آن $\frac{۱}{۴}$ در این صورت اگر A , B مستقل باشند احتمال های زیر را حساب کنید.

$$P(A)=\frac{۳}{۵}\ ,\ P(A')=\frac{۲}{۵}\ ,\ P(B)=\frac{۱}{۵}\ ,\ P(B')=\frac{۴}{۵}$$

۱) **هم A و هم B رخ دهد.**

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{۳}{۲۵}$$

۲) **هیچ یک از دو پیشامد A , B رخ ندهد.**

$$P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\frac{۲}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۸}{۲۵}$$

۳) **A رخ دهد و B رخ ندهد.**

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۵}-\frac{۳}{۲۵}=\frac{۱۲}{۲۵}$$

۴) **حداکثر یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.**

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۵}-\frac{۲\times۳}{۲۵}=\frac{۴}{۵}-\frac{۶}{۲۵}=\frac{۱۴}{۲۵}$$

سؤال ۶: دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می شود؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$ (سراسری ۹۶)

پاسخ: گزینه۱

پیشامد دو سکه «رو» را با A و پیشامد ۶ آمدن تاس را با B نشان می دهیم. واضح است که A و B مستقل اند. پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{\binom{۲}{۲}}{۲^۲}+\frac{۱}{۶}-\frac{\binom{۲}{۲}}{۲^۲}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۹}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

سؤال ۷: اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}, P(B)=\frac{۱}{۳}$ و A , B مستقل باشند $P(A\cup B')$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینه۴

چون B,A مستقل هستند:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$
$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=P(A)+۱-P(B)-(P(A)-P(A\cap B))$$
$$\Rightarrow P(A\cup B')=P(A)+۱-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=۱-P(B)+P(A\cap B)$$
$$\Rightarrow P(A\cup B')=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

سؤال ۸: در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال رنگ این مهره ها متفاوت است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴۰}$ (سراسری خارج ۸۹)

پاسخ: گزینه۴

ابتدا احتمال هم رنگ بودن دو مهرهٔ انتقابی را به دست می آوریم:

$$P\,(\text{همرنگ})=P\,(\text{هر دو سفید})+P\,(\text{هر دو سبز})=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}\binom{۸}{۱}}+\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}\binom{۸}{۱}}=\frac{۲۴}{۸۰}+\frac{۲}{۸۰}=\frac{۲۶}{۸۰}$$

احتمال غیرهمرنگ بودن برابر است با:

$$P(\text{غیرهمرنگ})=۱-P\,(\text{همرنگ})=۱-\frac{۲۶}{۸۰}=\frac{۵۴}{۸۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$$

سؤال ۹: احتمال قبول شدن سه نفر در کنکور به ترتیب برابر ۵۰٪ و ۶۰٪ و ۷۰٪ است. احتمال آن که اقلاً یکی از سه نفر در کنکور قبول شود کدام است؟ (آزمون کانون ۹۲)

۱) ۹۲٪ ۲) ۹۶٪ ۴) ۹۰٪ ۵) ۹۴٪

پاسخ: گزینه۴

قبولی افراد در کنکور مستقل از یکدیگر است. پیشامد حداقل یک نفر قبول شود، متمم این است که هیچ یک قبول نشوند. بنابراین داریم:

$$P\,(\text{حداقل یکی قبول})=۱-P\,(\text{همگی مردود})=۱-۰/۵\times۰/۴\times۰/۳=۱-۰/۰۶=۰/۹۴$$

📖 سؤال ۱۰: **برای رسیدن به مرحلهٔ نهایی مسابقات ورزشی لازم است تیم های شرکت کننده در دو دورهٔ مسابقات مقدماتی شرکت کنند. تیمی که در هر دو دوره بازنده شود به مرحلهٔ نهایی راه نخواهد یافت. اگر احتمال پیروزی در هر دوره بازی برای تیمی ۰/۴ باشد احتمال حضور این تیم در مرحلهٔ نهایی کدام است؟ (آزمون کانون ۹۲)**

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۸

☜ پاسخ: گزینه۳

احتمال بازنده شدن در هر دو دوره را حساب کرده و از یک کم می کنیم، چون اگر در یکی از دوره ها نیز ببرد، به مرحلهٔ نهایی می رود.برد و باخت در دوره ها نیز مستقل از هم هستند.

P (رفتن به مرحلهٔ نهایی) $=1-P$ (بازنده شدن در هر دو دوره) $=1-0/6\times0/6=1-0/36=0/64$

📖 سؤال ۱۱: **در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنها مهارت قالی بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟**

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵ (تجربی داخل ۹۰)

☜ پاسخ: گزینه۱

طبق گفته های مسئله داریم:

P (تحصیلات ابتدایی) =۰/۶ و P (مهارت قالی بافی) = ۰/۲۵. معلوم است که این دو موضوع مستقل از هم دیگرند پس:

P (قالی بافی یا ابتدایی)$=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$=0/6+0/25-0/6\times0/25=0/7$

📖 سؤال ۱۲: **احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ است. با کدام احتمال لااقل عمل جراحی برای یکی از ان دو نفر موفقیت آمیز است؟ (تجربی داخل ۹۵)**

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸

☜ پاسخ: گزینه۴

می توان گفت احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $P(A)=0/9$ و برای شخص B برابر $P(B)=0/8$ است پس احتمال اینکه لااقل عمل جراحی برای یکی از دو نفر موفقیت آمیز باشد برابر است با:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=0/9+0/8-0/9\times0/8=1/7-0/72=0/98$

📖 سؤال ۱۳: **احتمال تولد فرزند پسر در خانوادهٔ A برابر ۰/۴ و احتمال تولد فرزند پسر در خانوادهٔ B برابر ۰/۶ می باشد. احتمال آن که فرزند اول فقط یکی از این دو خانواده پسر باشد کدام است؟**

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۵۲ ۳) ۰/۵۶ ۴) ۰/۶

☜ پاسخ: گزینه۲

فرض کنیم A پیشامد پسر بودن فرزند اول خانوادهٔ A و B پیشامد پسر بودن فرزند اول خانواده B باشد در این صورت داریم: $P(A)=0/4$ و $P(B)=0/6$. از آنجا که پسر بودن فرزندان اول این دو خانواده مستقل از یکدیگر است پس احتمال آن که فرزند اول فقط یکی از این دو خانواده پسر باشد برابر است با:

$$P(A)P(B')+P(A')P(B)=(0/4)(1-0/6)+(1-0/4)(0/6)$$
$$=0/4\times 0/4+0/6\times 0/6=0/16+0/36=0/52$$

سؤال ۱۴: چهار دانش آموز یک کلا س بر نیمکت نشسته اند. با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنها یکسان است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $\frac{19}{48}$ ۲) $\frac{41}{96}$ ۳) $\frac{23}{48}$ ۴) $\frac{55}{96}$

پاسخ: گزینه۲

بهتر است از روش متمم استفاده کنیم:

$$P(\text{حداقل دو نفر در یک ماه})=1-P(\text{هر نفر در ماه متفاوت})=1-\frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}$$
$$=1-\frac{11\times10\times9}{12\times12\times12}=1-\frac{55}{96}=\frac{41}{96}$$

سؤال ۱۵: از ظرفی که ۴ مهره سفید و ۵ مهرهٔ سیاه دارد دو مهره را متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می کشیم. احتمال آنکه اولی سفید و دومی سیاه باشد کدام است؟

۱) $\frac{20}{81}$ ۲) $\frac{20}{72}$ ۳) $\frac{40}{81}$ ۴) $\frac{40}{72}$

پاسخ: گزینه۲

وقتی دو مهره متوالیاً بیرون آورده می شود پیشامدهای بیرون آوردن هر یک از آن ها مستقل از هم هستند. بنابراین می توان احتمال های آنها را جداگانه حساب کرد و در هم ضرب کرد. چون قید «بدون جایگذاری» آمده است پس از برداشتن یک مهره تعداد مهره ها کم می شود و دیگر آن را به کیسه بر نمی گردانیم.

$$P(\text{اولی سفید و دومی سیاه})=P(\text{اولی سفید})\times P(\text{دومی سیاه})=\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{20}{72}$$

سؤال ۱۶: کیسه ای محتوی ۳ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ قرمز است. از این کیسه سه مهره متوالیاً و بدون جای گذاری بیرون می آوریم. احتمال این که هر سه مهره سفید باشند کدام است؟

۱) $\frac{1}{220}$ ۲) $\frac{1}{110}$ ۳) $\frac{1}{55}$ ۴) $\frac{2}{91}$

پاسخ: گزینه۳

انتقاب متوالی یعنی این که مهره ها دانه دانه از کیسه فارج شوند. در این صورت پیشامدهای ایجاد شده مستقل از هم هستند و چون بدون جایگذاری است از تعداد مهره در هر برداشت کم می شود.

$$P(\text{هر سه سفید})=P(\text{اولی سفید})\times P(\text{دومی سفید})\times P(\text{سومی سفید})=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{2}{10}=\frac{2}{110}=\frac{1}{55}$$

📖 **سؤال ۱۷:** **ظرفی شامل ۲ مهرۀ سفید و ۳ مهرۀ سیاه است. مهره ای از آن خارج کرده و پس از مشاهدۀ رنگ آن به جعبه برمی گردانیم و مجدداً مهره ای خارج می کنیم. احتمال آنکه فقط یک بار مهرۀ سفید بیرون آمده باشد کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{۵}$　　۲) $\frac{۲}{۱۵}$　　۳) $\frac{۶}{۲۵}$　　۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

☜ **پاسخ: گزینه۴**

برداشت متوالی مهره ها، مستقل از یکدیگر هستند. فقط یکبار سفید یعنی این که یا در مرتبۀ اول سفید رویت شده است و در مرتبۀ دوم سیاه و یا برعکس. چون مهره را به کیسه برگردانیم. از تعداد آنها در مرتبۀ بعدی کم نشده است.

P(اولی سفید و دومی سیاه) $+P$ (اولی سیاه و دومی سفید) =

P (اولی سفید) $\times P$ (دومی سیاه) $+P$ (اولی سیاه) $\times P$ (دومی سفید) $=\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱۲}{۲۵}$

📖 **سؤال ۱۸:** **یک سکه را صد بار انداخته ایم و پشت آمده است. احتمال آنکه در یکصد و یکمین بار باز هم پشت بیاید کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۶}$　　۳) $\frac{۱}{۵}$　　۴) هیچکدام

☜ **پاسخ: گزینه۱**

پرتاب های مختلف یک سکه مستقل از هم هستند. پس در پرتاب صد و یکم احتمال اینکه پشت بیاید $\frac{۱}{۲}$ *است.*

📖 **سؤال ۱۹:** **خانواده ای دارای ۴ فرزند است. می دانیم که دو فرزند اول آنها پسر است. احتمال آنکه دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند کدام است؟**

۱) $\frac{۳}{۱۶}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$　　۳) $\frac{۵}{۱۶}$　　۴) $\frac{۳}{۸}$

☜ **پاسخ: گزینه۲**

جنسیت فرزندان مستقل از هم دیگر است. این که دو فرزند اول پسر هستند، تأثیری در فرزندان سوم و چهارم ندارد.

P (فرزند سوم و چهارم دختر) $=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

📖 **سؤال ۲۰:** **تاس سالمی را افراد A , B , C به ترتیب پرتاب می کنند. اولین شخص که شش ظاهر کند برنده است. احتمال برنده شدن A چند برابر برنده شدن C است؟**

۱) $\frac{۶}{۵}$　　۲) $\frac{۲۱۶}{۱۲۵}$　　۳) $\frac{۳۶}{۲۵}$　　۴) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$

☜ **پاسخ: گزینه۳**

$$\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\left(۱-\frac{۱}{۶}\right)\left(۱-\frac{۱}{۶}\right)\times\frac{۱}{۶}}=\frac{۳۶}{۲۵}$$

📖 **سؤال ۲۱:** **اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}, P(B)=\frac{۱}{۳}$ ، A , B مستقل باشند حاصل $P(A'\cup B')$ کدام است.**

$$P(A'\cup B')=۱-P(A\cap B)=۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۶}$$

📖 **سؤال ۲۲:** **اگر A , B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A\cap B)=[P(A)]^{۲}$ باشد حاصل $P(A')$ کدام است. $(P(A)\neq ۰)$**

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=(P(A))^{۲}$$

طرفین را بر $P(A)\neq ۰$ تقسیم می کنیم

$$\Rightarrow P(A)=P(B)\to P(A')=P(B')=۱-P(B)$$

📖 **سؤال ۲۳:** **در پرتاب ۴ سکه با هم اگر احتمال آمدن حداقل دوبار روی سکه را با $P(A)$ و حداقل دو بار پشت را با $P(B)$ بنامیم $P(A\cap B')$ کدام است.**

منظور از $P(A\cap B')$ همان $P(A-B)$ است یعنی کافیست از بین حالت هایی حداقل دوبار روی سکه ظاهر می شود آن هایی که ۲ پشت یا بیشتر است را حذف کنیم

$A=\{$(ر, ر, پ, پ), (ر, ر, ر, پ), (ر, ر, ر, ر)$\}$

$A-B=\{$(ر, ر, ر, پ), (ر, ر, ر, ر)$\}$

$$P(A-B)=\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}}{۲^{۴}}=\frac{۵}{۱۶}$$

📖 **سؤال ۲۴:** **یک تاس همگن را چندبار پرتاب می‌کنیم تا احتمال این که ۵ یا ۶ حداقل‌یک‌بار ظاهر شود برابر $\frac{۵}{۹}$ گردد.**

$P($حداقل یک بار ۶ یا ۵$)=۱-P($اصلاً ۵ یا ۶ نیاید$)$

احتمال این که ۵ یا ۶ اصلاً نیاید برابر $\frac{۴}{۶}$ یا $\frac{۲}{۳}$ است و اگر n بار پرتاب انجام گیرد چون پرتاب ها مستقل اند برابر $(\frac{۲}{۳})^n$ است

پس: $$P=۱-(\frac{۲}{۳})^n=\frac{۵}{۹}\to(\frac{۲}{۳})^n=\frac{۴}{۹}\to n=۲$$

📖 **سؤال ۲۵:** **یک خانواده دست کم چند فرزند داشته باشد تا احتمال داشتن حداقل یک پسر و حداقل یک دختر بیش از ۹۵ درصد باشد.**

فرض می کنیم تعداد فرزندان n است

$P($حداقل یک پسر $\cap$ حداقل یک دختر$)=۱-P($هیچ دختر $\cup$ هیچ پسر$)$

$=۱-P($هیچ دختر$)-P($هیچ پسر$)+\underbrace{P(\text{هیچ دختر}\cap\text{هیچ پسر})}_{\text{صفر}}$

$=۱-P($هیچ دختر$)-P($هیچ پسر$)$

$$=۱-(\frac{۱}{۲})^n-(\frac{۱}{۲})^n=۱-(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

اما $۱-(\frac{۱}{۲})^{n-۱}>\frac{۹۵}{۱۰۰}$ پس $(\frac{۱}{۲})^{n-۱}<\frac{۵}{۱۰۰}$ و لذا $۲^{n-۱}>\frac{۱۰۰}{۵}$ و $۲^{n-۱}>۲۰$ پس $n-۱\ge ۵$ و در نتیجه $n\ge ۶$

سؤال ۲۶: احتمال آنکه افراد D , C , B , A همگی در یکی از روزهای هفته بدنیا آمده باشند کدام است.

راه حل اول: احتمال برنیا آمدن هر فرد در هر کدام از روزهای هفته مستقل از دیگر افراد بوده و برابر $\frac{1}{7}$ است بنابراین احتمال آن که همگی مثلاً در روز شنبه برنیا آمده باشند برابر $\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=(\frac{1}{7})^4$ است اما ممکن است همگی در روز یکشنبه و... جمعه نیز برنیا آمده باشند که باز هم مطلوب است پس احتمال بالا ۷ برابر می شود $7\times(\frac{1}{7})^4=(\frac{1}{7})^3$

راه حل دوم: نفر اول را آزاد گذاشته که در هر روزی از هفته برنیا آمده باشد اما نفرات بعدی هر کدام $\frac{1}{7}$ احتمال دارند که در آن روز برنیا بیایند که نفر اول برنیا آمده است $P=1\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=(\frac{1}{7})^3$

سؤال ۲۷: چقدر احتمال دارد ۶ عضو تیم والیبال همگی متولد یک فصل از سال باشند؟

۱) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ ۲) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ ۳) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ۴) $\left(\frac{1}{2}\right)^8$

پاسخ: گزینه۳

نفر اول آزاد است که هر یک از ۴ فصل را انتخاب کند پس احتمالش می شود $\frac{4}{4}$ اما پنج نفر دیگر باید همگی همان ماه باشند و احتمال هر کدام $\frac{1}{4}$ است پس داریم:

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^5=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

سؤال ۲۸: احتمال آنکه از بین سه نفر حداکثر دو نفر در فصل زمستان به دنیا آمده باشند کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{27}{64}$ ۳) $\frac{15}{16}$ ۴) $\frac{63}{64}$

پاسخ: گزینه۴

از روش متمم می رویم یعنی احتمال آنکه هر سه نفر در فصل زمستان به دنیا آمده باشند را تعیین کرده و بعد جوابش را از ۱ کم می کنیم ببینید:

P (تولد هر سه نفر در زمستان باشد) $=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}\Rightarrow$ (تولد حداکثر دو نفر در زمستان) $=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

سؤال ۲۹: A , B دو پیشامد مستقل اند بطوری که وقوع همزمان آنها $\frac{1}{6}$ و احتمال این که هیچ کدام رخ ندهند $\frac{1}{3}$ است در این صورت $P(B),P(A)$ را بیابید.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{6}$$

$$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=\frac{1}{3}\to P(A\cup B)=\frac{2}{3}\Rightarrow P(A)+P(B)-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\to P(A)+P(B)=\frac{5}{6}$$

$$\begin{cases}P(A)+P(B)=\frac{5}{6}\\ P(A).P(B)=\frac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow x=2,3$$

ریشه های معادله با ۵ ، ۶ برابر $P(B),P(A)$ هستند

$$\to P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

سؤال ۳۰: احتمال قبول شدن سه نفر در کنکور به ترتیب٪۵۰ ، ٪۶۰ و ٪۷۰ است احتمال آنکه اقلاً یکی از این سه نفر در کنکور قبول شود کدام است.

چون گفته حداقل یکی از متمم آن یعنی هیچ کدام استفاده می کنیم

P (حداقل یکی قبول شود) $=1-$ (هیچ کدام قبول نشوند) =

$$=P(A\cup B\cup C)=1-P(A'\cap B'\cap C')=1-P(A')P(B')P(C')=1-0/5\times0/4\times0/3=0/94$$

سؤال ۳۱: احتمال آنکه حداقل یک تیر از ۳ تیر شلیک شده یک تیر انداز به هدف برخورد کند ۰/۹۷۳ است احتمال اینکه تیر اول این تیرانداز به هدف برخورد کند کدام است.

P (حداقل یک تیر) $=1-P$ (هیچ تیر)

احتمال برخورد تیرها یکسان است $\Rightarrow P(A)=P(B)=P(C)$

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(A'\cap B'\cap C')=1-P(A')P(B')P(C')$$

$$\Rightarrow\frac{973}{1000}=1-(P(A'))^3\to(P(A'))^3=\frac{27}{1000}$$

$$\to P(A')=\frac{3}{10}\to P(A)=\frac{7}{10}$$

سؤال ۳۲: تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنان تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده اند. ۸ نفر از این تاجرین برای اولین بار سفر کرده اند. اگر فردی به تصادف از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

☜ پاسخ: گزینه۳

اگر تاجر بودن را با A و برای اولین بار سفر کردن را با B نمایش دهیم سوال پیشامد $(A\cup B)'$ را خواسته است:

$$P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$$

$$=1-\left[\frac{23}{72}+\frac{12}{72}-\frac{8}{72}\right]=1-\frac{27}{72}=\frac{45}{72}=\frac{5}{8}$$

📖 سؤال ۳۳: اگر A , B دو پیشامد مستقل و $P(A-B)=P(A\cap B)$ باشد کدام نتیجه درست است؟ $(A\neq\phi)$

۱) $P(B)=1$ ۲) $P(B)=0$ ۳) $P(B)=\frac{1}{2}$ ۴) $P(B)=\frac{1}{3}$

☜ پاسخ: گزینه۳

طبق فرمول مستقل داریم:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)P(B')$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

حالا سوال می‌گوید این ها مساوی اند پس: $P(A)P(B')=P(A)P(B)\Rightarrow P(B)=P(B')$

جمع $P(B)$ و $P(B')$ باید ۱ باشد پس: $P(B)=P(B')=\frac{1}{2}$

📖 سؤال ۳۴: احتمال این که حبیب تا بیست سال دیگر زنده بماند ۰/۷۵ و احتمال اینکه برادرش تا ۲۰ سال بعد زنده بماند $\frac{2}{3}$ است. چقدر احتمال دارد تا بیست سال بعد فقط برادر حبیب زنده بماند؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☜ پاسخ: گزینه۲

زنده ماندن و نماندن افراد از هم مستقل است (عُمر دست خداست!) پس داریم:

P (فقط B زنده بماند) = P (A نماند و B بماند)

$$P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=\frac{2}{3}\times(1-0/75)=\frac{2}{3}\times 0/25=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

📖 سؤال ۳۵: در بین ۳ نفر با کدام احتمال روز تولد حداقل دو نفر در هفته مثل هم است؟

۱) $\frac{18}{49}$ ۲) $\frac{19}{49}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{20}{49}$

☜ پاسخ: گزینه۲

از متمم استفاده کنیم:

P (حداقل دو نفر مثل هم) =۱− P (هیچ دو نفری مثل هم نباشند) = ۱ − P (سه روز مختلف)

$$1=\frac{7}{7}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{7}=1-\frac{30}{49}=\frac{19}{49}$$

سؤال ۳۶: اگر A , B دو پیشامد مستقل و $P(A\cup B)=\frac{۲}{۳}, P(A')=\frac{۲}{۵}$ باشد مقدار $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه۴

A , B مستقل اند پس: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

گفته شده $P(A')=\frac{۲}{۵}$ پس $P(A)=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$ در نتیجه:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۳}{۵}+P(B)-\frac{۳}{۵}P(B)\Rightarrow\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۵}=P(B)\left(۱-\frac{۳}{۵}\right)\Rightarrow\frac{۱}{۱۵}=\frac{۲}{۵}P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۶}$$

سؤال ۳۷: اگر A , B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A).P(B)+P(A'\cup B')=۱$ آنگاه دو پیشامد A , B نسبت به هم چگونه اند؟

۱) سازگار ۲) مستقل ۳) وابسته ۴) ناسازگار

پاسخ: گزینه۲

اولاً $P(A')=۱-P(A)$ ثانیاً $A'\cup B'=(A\cap B)'$ بنابراین:

$$P(A).P(B)+P(A'\cup B')=P(A).P(B)+P(A\cap B)'=۱$$
$$\Rightarrow P(A).P(B)+۱-P(A\cap B)=۱\Rightarrow P(A).P(B)=P(A\cap B)$$

در نتیجه A , B دو پیشامد مستقل اند.

سؤال ۳۸: احتمال آن که فرزندی در خانواده «الف» با چشم هایی به رنگ روشن متولد شود ۰/۲ و همین احتمال برای فرزندی که در خانوادهٔ «ب» متولد می شود ۰/۷ است. هر دو خانواده در انتظار فرزندی هستند. احتمال آن که وضعیت روشن بودن رنگ چشم این دو فرزند یکسان باشد چند درصد است؟

۱) ۶۲ ۲) ۳۸ ۳) ۵۴ ۴) ۷۶

پاسخ: گزینه۲

ابتدا توجه کنید که تولد فرزندان در این دو خانواده مستقل از هم است. وضعیت رنگ چشم هر دو فرزند زمانی یکسان است که یکی از دو حالت زیر پیش بیاید:

۱) هر دو فرزند با رنگ چشم روشن متولد شوند احتمال پیش آمدن این حالت برابر است با: $P_۱=۰/۲\times۰/۷=۰/۱۴$

۲) هیچکدام از این دو فرزند با رنگ چشم روشن متولد نشود احتمال پیش آمدن این حالت برابر است با:

$$P_۱=(۱-۰/۲)\times(۱-۰/۷)=۰/۲۴$$

چون این دو حالت ناسازگارند پس:

$$P=P_۱+P_۲=۰/۱۴+۰/۲۴=۰/۳۸=٪۳۸$$

📖 سؤال ۳۹: دو تاس داریم که روی وجه های آنها اعداد {۳، ۳، ۳، ۲، ۲، ۱} نوشته شده است. با کدام احتمال در پرتاب این دو تاس مجموع اعداد رو شده برابر ۲ یا ۵ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

☜ پاسخ: گزینه۲

ابتدا توجه کنید که احتمال آمدن عدد ۱ ، عدد ۲ و عدد ۳ در پرتاب هر کدام از این تاس ها به ترتیب برابر است با: $\frac{۱}{۶},\frac{۲}{۶},\frac{۳}{۶}$

همچنین توجه کنید که پرتاب هر تاس مستقل از دیگری است.

۳ حالت مطلوب امکان پزیر است:

۱) تاس اول ۲ و تاس دوم ۳ بیاید: $P_۱=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$

۲) تاس اول ۳ و تاس دوم ۲ بیاید: $P_۲=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$

۳) هر دو تاس ۱ بیایند: $P_۳=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳۶}$

این سه حالت ناسازگارند پس: $P=P_۱+P_۲+P_۳=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱۳}{۳۶}$ احتمال مورد نظر

📖 سؤال ۴۰: احتمال آنکه فرزندی در خانوادهٔ A با چشم های روشن متولد شد ۲۰٪ و احتمال آن که فرزندی در خانوادهٔ B با چشم های روشن متولد شود ۷۵٪ است. احتمال آنکه حداقل یکی از این دو فرزند که در خانواده های A , B متولد می شوند با چشم هایی به رنگ روشن باشند کدام است؟

۱) ۰/۸   ۲) ۰/۶   ۳) ۰/۷۵   ۴) ۰/۹۵

☜ پاسخ: گزینه۱

پیشامد آن که فرزندی در خانوادهٔ A با چشم های روشن متولد شود نسبت به پیشامد آن که فرزندی در خانوادهٔ B با چشم های روشن متولد شود مستقل است یعنی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۷۵}{۱۰۰}-\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۸۰}{۱۰۰}=۰/۸$$

📖 سؤال ۴۱: اگر A، B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=۴P(A\cap B)=۳P(B)$ آنگاه چقدر احتمال دارد فقط پیشامد A رخ دهد ؟ (A , B تهیه نیستند.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

☜ پاسخ: گزینه۴

$$P(A)=۴P(A\cap B)\xrightarrow{A\,,\,B\ \text{مستقل هستند}}P(A)=۴P(A)\times P(B)\xrightarrow{P(A)\neq ۰}P(B)=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A)=۳P(B)=\frac{۳}{۴},P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۳}{۱۶}$$

$$\boldsymbol{P}_{(\text{فقط } \boldsymbol{A} \text{ رخ دهد})}=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۴}-\frac{۳}{۱۶}=\frac{۹}{۱۶}$$

سؤال ۴۲: در تجربه پرتاب سه سکه و سه تاس به طور همزمان با کدام احتمال لااقل دو بار پشت و حداکثر دو بار شش ظاهر می شود؟

۱) $\frac{۲۱۵}{۴۳۲}$ ۲) $\frac{۲۵۹}{(۱۲)^۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۵۷۶}$

پاسخ: گزینه۱

باید احتمال این شکه ها لااقل دو بار به پشت بیایند را در احتمال سه تاس حداکثر دو بار شش ظاهر شود ضرب کنیم:

$$\begin{cases} (\text{پ ، پ ، ر}) \rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ \\ (\text{پ ، پ ، پ}) \rightarrow \frac{۳!}{۳!}=۱ \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(\begin{matrix}\text{سکه لااقل یکبار}\\ \text{پشت باشد}\end{matrix}\right)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}} \quad (\mathrm{I})$$

$$\boxed{P(\text{حداکثر دو بار شش})=۱-P(\text{هرسه بار شش})=۱-\frac{۱}{۶^۳}=\frac{۲۱۵}{۲۱۶}} \quad (II)$$

$$\boxed{(I)\times(II)\Rightarrow \mathrm{P}=\frac{۲۱۵}{۴۳۲}}$$

سؤال ۴۳: ده درصد از بیماران تحت جراحی یک پزشک معروف می میرند! سه بیمار در نوبت جراحی این پزشک هستند. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها بعد از عمل جراحی زنده نماند چقدر است؟

۱) ۰/۷۲۹   ۲) ۰/۲۷۱   ۳) ۰/۲۲   ۴) ۰/۷

پاسخ: گزینه۲

اگر مردن سه بیمار را A , B , C بگیریم، $P(A\cup B\cup C)$ خواسته شده.

ضمناً مردن بیمارها هم از همدیگر مستقل است. پس من ترجیح می دهم حالت متمم راحساب کنم. از آنجا که $(A\cup B\cup C)'=\mathrm{A}'\cap B'\cap C'$ پس:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}'\cap B'\cap C')=P(\mathrm{A}')\mathrm{P}(B')\mathrm{P}(C')=(۱-P(A))(۱-\mathrm{P(B)})(۱-\mathrm{P(C)})$$

$$=\left(۱-\frac{۱۰}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{۱۰}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{۱۰}{۱۰۰}\right)=\frac{۷۲۹}{۱۰۰۰}$$

و چون پیشامدهای دو به دو مستقل اند:

$$P(A\cup B\cup C)=۱-P(\mathrm{A}'\cap B'\cap C')=۱-\frac{۷۲۹}{۱۰۰}=\frac{۲۷۱}{۱۰۰۰}=۰/۲۷۱$$

سؤال ۴۴: در یک جمع که ۴۵ پسر و ۶۰ دختر حضور دارند x پسر و y دختر دانشجو هستند. یک نفر از این جمع به تصادف انتخاب می کنیم. فرض کنید A پیشامد پسر بودن واین شخص و B پیشامد دانشجو بودنش باشد. اگر A , B مستقل باشند تعداد پسران دانشجو کدام عدد می تواند باشد؟

۱) ۳۹   ۲) ۴۰   ۳) ۳۸   ۴) ۳۵

پاسخ: گزینه۱

$$\left.\begin{array}{l} \text{پسر}\quad P(A)=\dfrac{\text{تعداد کل پسرها}}{\text{تعداد کل افراد}}=\dfrac{۴۵}{۴۵+۶۰}=\dfrac{۴۵}{۱۰۵}=\dfrac{۳}{۷} \\ \text{دانشجو}\quad P(B)=\dfrac{\text{تعداد کل دانشجوها}}{\text{تعداد کل افراد}}=\dfrac{x+y}{۴۵+۶۰}=\dfrac{x+y}{۱۰۵} \\ \text{پسر و دانشجو}\quad P(A\cap B)=\dfrac{\text{تعداد پسران دانشجو}}{\text{تعداد کل افراد}}=\dfrac{x}{۴۵+۶۰}=\dfrac{x}{۱۰۵} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{P(A\cap B)=P(A)P(B)}\dfrac{x}{۱۰۵}=\dfrac{۳}{۷}\times\dfrac{x+y}{۱۰۵}\Rightarrow ۴x=۳y$$

x , y تعداد افراد هستند پس طبیعی اند و این جملهٔ آخری یعنی x مضرب ۳ است پس تعداد پسران دانشجو می تواند ۳۹ باشد.

سؤال ۴۵: احتمال آنتن دادن گوشی های سمانه، سهیلا و سارا به ترتیب ۰/۵ ، ۰/۲۵ و ۰/۸ است. چقدر احتمال دارد در یک مهمانی تنها گوشی یکی از این سه نفر آنتن بدهد؟

۱) ۰/۳　　۲) ۰/۴۲　　۳) ۰/۴　　۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه۳

خواستهٔ تست معادل این عبارت است «فقط سمانه (و اون دوتای دیگه نه)، یا فقط سهیلا (و سمانه و سارا نه) یا فقط سارا (و نه بقیه) » اینم معادل ریاضیش:

$$P(A\cap B'\cap C')+P(A'\cap B\cap C')+P(A'\cap B'\cap C)=$$
$$P(A)P(B')P(C')+P(A')P(B)P(C')+P(A')P(B')P(C)$$
$$=\frac{۵}{۱۰}\times\left(۱-\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{۸}{۱۰}\right)+\left(۱-\frac{۵}{۱۰}\right)\left(\frac{۲۵}{۱۰۰}\right)\left(۱-\frac{۸}{۱۰}\right)+\left(۱-\frac{۵}{۱۰}\right)\left(۱-\frac{۵}{۱۰}\right)\left(\frac{۸}{۱۰}\right)$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۳}{۴۰}+\frac{۱}{۴۰}=\frac{۱۶}{۴۰}=۰/۴$$

سؤال ۴۶: اگر A , B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(B)=\frac{۱}{۳},P(A)=\frac{۳}{۴}$ احتمال این که هیچ یک از دو پیشامد A یا B روی ندهد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینه۱

هیچیک از دو پیشامد A یا B روی ندهد. یعنی: $A'\cap B'$

در ضمن وقتی A , B مستقل هستند B',A' نیز مستقل هستند. یعنی داریم:

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=(۱-P(A))\times(۱-P(B))=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

سؤال ۴۷: اگر A , B دو پیشامد مستقل از یک آزمون تصادفی باشند و $P(B)=۲P(A)=۰/۸$ آنگاه $P(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) ۰/۸۸　　۲) ۰/۳۲　　۳) ۰/۱۲　　۴) ٪۲۰

پاسخ: گزینه۳

اگر A , B مستقل باشند A', B' نیز مستقل هستند. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=(۱-P(A))\times(۱-P(B)) \\ P(B)=۰/۸,۲P(A)=۰/۸\Rightarrow P(A)=۰/۴ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow P(A'\cap B')=۰/۶\times ۰/۲=۰/۱۲$$

سؤال ۴۸: ظرف A شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ظرف B شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. از هر ظرف مهره ای به تصادف خارج می کنیم احتمال آنکه از ظرف A سفید و از ظرف B سیاه آمده باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۶۲}{۶۳}$　　۲) $\frac{۳۱}{۶۳}$　　۳) $\frac{۲۵}{۶۳}$　　۴) $\frac{۵}{۲۱}$

پاسخ: گزینه۴

انتقاب مهره ها از دو ظرف تمایز مستقل از هم هستند.

P (مهرهٔ A سفید و مهرهٔ B سیاه) $= P$ (مهرهٔ A سفید) $\times P$ (مهرهٔ B سیاه) $=\frac{۵}{۹}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱۵}{۶۳}=\frac{۵}{۲۱}$

سؤال ۴۹: اگر A , B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشد $P(A)=\frac{۳}{۴}, P(B)=\frac{۱}{۳}$ با کدام احتمال هیچ یک از این دو پیشامد روی نمی دهد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه۱

با توجه به اینکه A , B مستقل هستند:

$$\boxed{P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=۱-P(A\cup B)}$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=۱-\left(\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}\right)\Rightarrow P(\bar{A}\cap\bar{B})=۱-\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

سؤال ۵۰: اگر A', B' دو پیشامد باشد و $P(A)=\frac{۱}{۶}, P(A\cup B)=\frac{۱}{۳}$ حاصل $P(A'\Delta B)$ کدام است.

$$P(A'\Delta B)=P(P(A\Delta B)')=۱-P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}+P(B)-\frac{۱}{۶}P(B)\rightarrow\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}P(B)\rightarrow P(B)=\frac{۱}{۵}$$

$$\rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۳۰}$$

$$P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳۰}=\frac{۹}{۳۰}=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow P(A'\Delta B)=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۳}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}$$

$$P(A'\Delta B)=P(A')+P(B)-۲P(A')P(B)=\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۵}-۲\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۷}{۱۰}$$

📖 **سؤال ۵۱: ۲۰ دانش آموز یک کلاس برای انجام امتحان به تصادف روی ۲۰ صندلی می نشیند احتمال آن که یک شخص به خصوص در دو آزمون روی یک صندلی یکسان بنشیند کدام است.**

احتمال انتخاب یک صندلی به خصوص در دو آزمون مختلف که مستقل از هم هستند برابر $\frac{۱}{۲۰}\times\frac{۱}{۲۰}$ است و انتخاب صندلی به خصوص $\binom{۲۰}{۱}$ حالت مختلف دارد پس جواب $\frac{۱}{۲۰}=\frac{۱}{۲۰}\times\frac{۱}{۲۰}\times\binom{۲۰}{۱}$ است.

📖 **سؤال ۵۲: یک سکه دو ریالی و یک سکه ۵ ریالی و یک سکه ده ریالی را با هم می اندازیم احتمال این که تنها یکی از سکه ها شیر بیاید کدام است.**

احتمال این که یک سکه شیر و دو سکه دیگر خط بیاید برابر $\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ است و چون برای انتخاب یک سکه که شیر بیاید $\binom{۳}{۱}=۳$ روش وجود دارد لذا احتمال مورد نظر $\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۸}\times ۳$

📖 **سؤال ۵۳: احتمال اینکه از بین ۳ فرزند یک خانواده حداقل ۲ فرزندشان از لحاظ روزهای هفته مثل هم باشد ، چقدر است.**

متمم پیشامد مطلوب آن است که هیچ کدام از لحاظ روزهای هفته یکسان نباشند که این احتمال برابر است با:

$$\frac{۷\times۶\times۵}{۷^{۳}}=\frac{۳۰}{۴۹}\rightarrow P(A)=۱-\frac{۳۰}{۴۹}=\frac{۱۹}{۴۹}$$

📖 **سؤال ۵۴: دو دستگاه آژیر در ساختمان برای آگاهی از خطر نصب شده است این دو آژیر بطور مستقل کار می کنند و احتمال آن که در موقع خطر ، آژیر اول به کار بیافتد برابر با ۰/۹۵ و این احتمال برای آژیر دوم برابر ۰/۹ است احتمال آن که در موقع خطر فقط یکی از آژیرهای کار کند چقدر است؟**

$$P(A\Delta B)=P(A)P(B')+P(A')P(B)=۰/۹۵\times۰/۱+۰/۰۵\times۰/۹=۰/۱۴$$

📖 **سؤال ۵۵: دو تیر به سوی هدف شلیک می کنیم احتمال آنکه فقط یکی از دو تیر به هدف اصابت کند برابر ۰/۳۸ است احتمال آنکه تیر اول به هدف بخورد برابر ۰/۸ است احتمال این که تیر دوم به هدف بخورد چقدر است.**

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A)P(B)=۰/۳۸$$
$$=۰/۸+P(B)-۲\times۰/۸\times P(B)\rightarrow P(B)=۰/۷$$

📖 **سؤال ۵۶: احتمال به صدا در آمدن هر یک از سه آژیر مستقلی که در یک فروشگاه نصب است به هنگام آتش سوزی ۰/۹۵ است احتمال آنکه به هنگام بروز آتش سوزی حداقل یکی از ۳ آژیر خطر به صدا در بیایند چقدر است.**

$P(\text{حداقل یکی...})=۱-P(\text{هیچ کدام...})$

$=۱-۰/۰۵\times۰/۰۵\times۰/۰۵=۱-(۰/۰۵)^{۳}$

📖 **سؤال ۵۷: اگر A , B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{۱}{۴}$, $P(B)=\frac{۱}{۵}$ آنگاه $P(A'\cup B')$ کدام است.**

$$P(A'\cup B')=۱-P(A\cap B)=۱-P(A)P(B)=۱-\frac{۱}{۲۰}=\frac{۱۹}{۲۰}$$

تمرینات بیشتر پیشامدهای مستقل

سؤال ۱: خانواده ای ۵ فرزند دارد احتمال اینکه چهارمین فرزند آنها دومین پسر خانواده باشد چقدر است.

باید از بین ۳ فرزند اول یکی پسر باشد که $\binom{۳}{۱}=۳$ حالت پیش می آید پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$\binom{۳}{۱}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۱۶}$$

سؤال ۲: در یک دبیرستان ۱۸ دانش آموز در شهریور متولد می شوند احتمال آنکه هر ۱۸ نفر در روز هفتم شهریور متولد شده باشند کدام است.

احتمال این که یک نفر در روز هفتم شهریور متولد شود $\frac{۱}{۳۱}$ است و چون افراد مستقل اند احتمال مطلوب $(\frac{۱}{۳۱})^{۱۸}$ است.

سؤال ۳: در یک کلاس ۸ نفری احتمال اینکه همه افراد در روز شنبه به دنیا آمده باشند کدام است.

$$\underbrace{\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}\times\ldots\times\frac{۱}{۷}}_{\text{۸ تا}}=(\frac{۱}{۷})^{۸}$$

سؤال ۴: اگر به طور تصادفی سه نفر از جامعه ای انتخاب شوند با کدام احتمال فقط ماه تاریخ تولد برای هر سه یکسان است.

چون تولد سه نفر مستقل است احتمال این که هر سه در ماه فروردین باشند برابر $\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}=(\frac{۱}{۱۲})^{۳}$ است و این احتمال برای سایر ماه ها نیز وجود دارد و چون ۱۲ ماه داریم لذا احتمال این که هر سه در یک ماه متولد شده باشند $۱۲\times(\frac{۱}{۱۲})^{۳}=\frac{۱}{۱۴۴}$ است.

سؤال ۵: سکه ای را n بار می اندازیم حداقل تعداد n تا احتمال آن که در هیچ بار خط نیاید کمتر از ۰/۱ باشد کدام است.

پرتاب ها مستقل اند احتمال آنکه در هر n پرتاب شیر بیاید برابر $(\frac{۱}{۲})^{n}$ است پس $(\frac{۱}{۲})^{n}<\frac{۱}{۱۰}$ و $۲^{n}>۱۰$ و $n\geq ۴$

سؤال ۶: احتمال زنده بودن یک زن و شوهر در ۲۰ سال آینده به ترتیب $\frac{۳}{۵}$, $\frac{۱}{۲}$ است احتمال اینکه در این مدت دست کم یکی از آنها زنده بماند کدام است.

P(دست کم یکی...) $=۱-P$(هیچ کدام...)

$$=۱-P(A')P(B')=۱-\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

سؤال ۷: اگر A , B دو پیشامد مستقل باشند حاصل $۱-P(A\cup B)$ کدام است.

$$۱-P(A\cup B)=P((A\cup B)')=P(A'\cap B')=P(A')P(B')$$

سؤال ۸: احتمال قبولی دو برادر در کنکور ۰/۳ و ۰/۷ است با چه احتمالی هر دو در کنکور قبول می شوند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۲۱$$

سؤال ۹: احتمال قبولی حداقل یکی در کنکور کدام است.

P(حداقل یکی) $=۱-P$(هیچ کدام) $=۱-P(A')P(B')=۱-۰/۳\times۰/۷=۰/۷۹$