

جزوه ریاضیات گسسته

الهام غلامی پور

فصل دوم درس اول

معرفی گراف

معرفی گراف و تعریف آن:

(مسئله پل های شهر کونیگسبرگ و ایده اوپلر برای حل آن و مسائلی که در صفحه ۳۳ کتاب آمده مطالعه شود)

مثال: پنج تیم a و b و c و d و e باید دو به دو با هم مسابقه بدهند. از بازی های انجام شده نتایج زیر حاصل شده است:

- a با b, c, e مسابقه داده و بر همگی پیروز شده است.
- b با a, d رو به رو شده و از هر دو شکست خورده است.
- c با a, d, e مسابقه داده و بر e, d پیروز شده و از a شکست خورده
- d با e, c, b بازی کرده و e, b را شکست داده و از c شکست خورده است.
- e با a, c, d مسابقه داده است. (پیروزی و شکست های e قبلا مشخص شده اند)

مطلوبست نموداری که:

(الف) نمودار مسابقات انجام شده بدون در نظر گرفتن برد و باخت تیم ها را نشان دهد.

(ب) نمودار مسابقات انجام شده با مشخص کرده برنده ها و بازنده ها با کمک پاره خط جهت دار

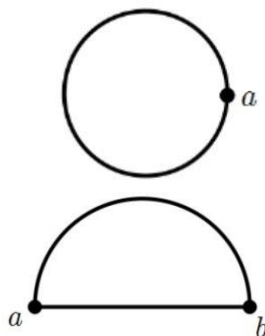
(ج) نمودار مسابقاتی که هنوز انجام نشده است.

تعریف گراف: یک گراف متشکل از تعدادی نقاط و خطوط است. به این نقاط، راس و به این خطوط یال میگوییم. لازم نیست

یال ها حتما خط راست باشند و میتوانند منحنی هم باشند. دو سر هر یال باید راس وجود داشته باشد.

یال جهت دار: اگر روی یک یال، فلش (جهت) وجود داشته باشد، این یال را جهت دار مینامند.

طوقه: اگر دو سر یک یال به یک راس متصل باشند، این یال را طوقه می نامند.



یال چندگانه: اگر بین دو راس بیشتر از یک یال موجود باشد، آنها را یال چندگانه مینامند.

گراف ساده: گرافی است که طوقه و یال چندگانه نداشته باشد.

تعریف ریاضی گراف: گراف ساده G ، زوج مرتبی مانند $G(V,E)$ است که در آن V مجموعه ای متناهی و ناتهی از راس های گراف است و E مجموعه یالهای این گراف است و هر عضو E زیرمجموعه ای دو عضوی از اعضای V است. تعداد اعضای مجموعه V و E را به ترتیب $|V(G)|$ و $|E(G)|$ نمایش میدهیم.

نکته: با داشتن شکل گراف G میتوان به راحتی $V(G)$ و $E(G)$ را نوشت و برعکس.

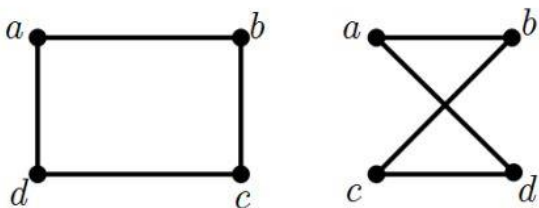
مثال: گرافی با معلوم بودن $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_4v_5, v_3v_5\}$ رسم کنید.

مثال: نمودار گراف $G(V,E)$ را با $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $E = \{x, y \in V \mid x + y = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ رسم کنید.

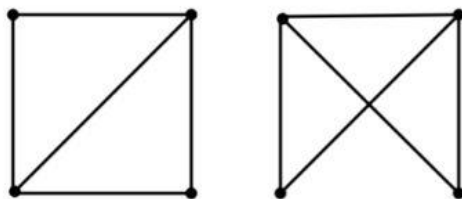
نکته: رسم گراف روش یکتایی ندارد و شکل گراف باید مشخص کند که کدام رئوس به هم متصل هستند. در صورتی که در دو گراف V و E یکسان باشند آن دو گراف هم ریخت (یکسان) هستند

تعریف گراف های یکرخت: دو گراف G و H را یکرخت میگوییم هرگاه بتوان با تغییر نام راس های H به G رسید (نام گذاری مشابهی برای راس های دو گراف G و H موجود باشد) دو گراف یکرخت مجموعه راس ها و مجموعه یالهای یکسانی دارند.

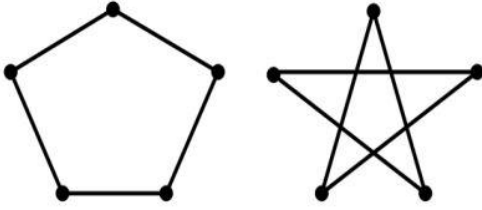
مثال: نشان دهید دو گراف رو به رو یکرخت هستند.



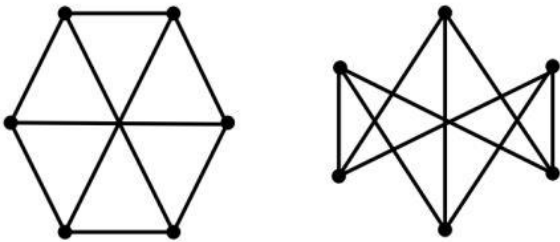
مثال: نشان دهید دو گراف رو به رو یکرخت هستند.



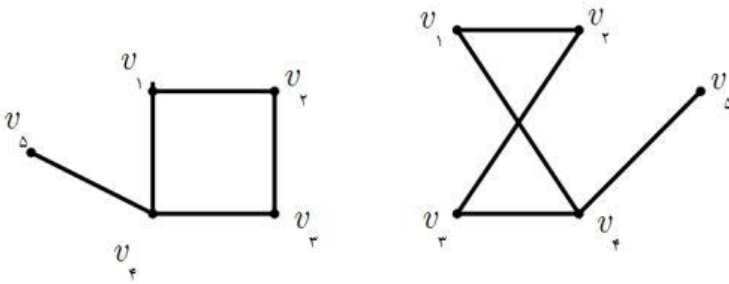
مثال: نشان دهید دو گراف رو به رو یکرخت هستند.



مثال: نشان دهید دو گراف رو به رو یکرخت هستند.



مثال: با نوشتن مجموعه راس ها و مجموعه یال ها مشخص کنید که هر دو گراف زیر یک گراف را نمایش می‌دهند.

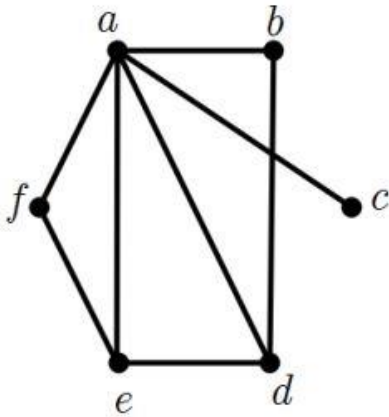


تعریف مرتبه و اندازه گراف: تعداد راس های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبه آن گراف می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم و همچنین تعداد یالهای گراف G یعنی $|E(G)|$ را اندازه گراف می‌گوییم و با $q(G)$ نشان می‌دهیم. در واقع p تعداد راس و q تعداد یال هاست.

مثال: گرافی ساده از مرتبه ۵ و اندازه ۷ رسم کنید.

تعریف درجه راس v در گراف G برابر است با تعداد یالهایی از گراف G که به راس v متصل اند و آن را با $\deg_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجه راس فرد باشد آن را یک راس فرد و اگر زوج باشد آن را یک راس زوج می‌نامیم.

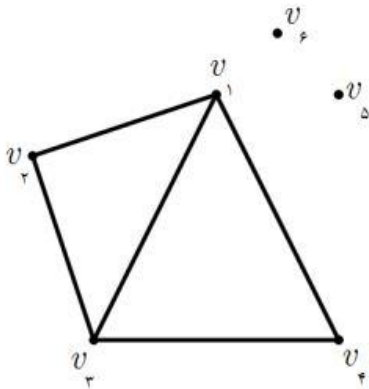
مثال: در شکل مقابل درجه راس های گراف را مشخص کنید.



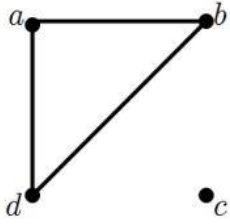
مثال: اگر یک گراف شامل $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$ باشد؛ چند راس گراف از درجه ۲ است؟

مثال: درجه های گرافی از مرتبه ۴ به صورت ۱ و a و ۳ و ۲ است. a را بدست آورید و گراف را رسم کنید.

مثال: در گراف مقابل ، مجموعه راس ها ، مجموعه یال ها ، مرتبه ، اندازه و درجه راس های را مشخص کنید.



تعریف راس تنها (ایزوله): به راسی که درجه آن صفر باشد، راس ایزوله میگوییم. در گراف شکل مقابل C یک راس تنهاست.



مثال: گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۰ رسم کنید که دو راس ایزوله داشته باشد.

مثال: گرافی از مرتبه ۸ رسم کنید که راس تنها نداشته باشد. این گراف حداقل چند یال دارد؟

مثال: گرافی از مرتبه ۱۹ سه راس ایزوله دارد، حداقل چند یال دارد؟

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶

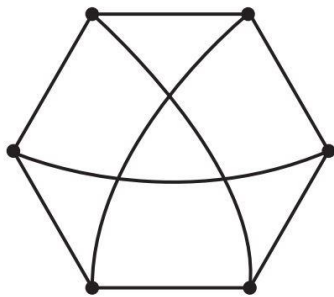
مثال: گراف ساده G از مرتبه ۸ و اندازه ۳ است. حداقل و حداکثر تعداد رئوس تنها در این گراف کدام است؟

(۱) ۴ و ۲ (۲) ۳ و ۴ (۳) ۲ و ۵ (۴) ۳ و ۵

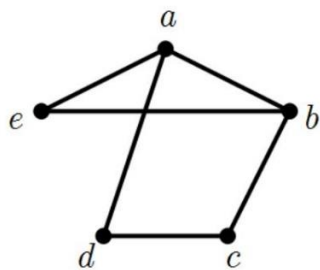
گراف تهی: گرافی که تمام رئوس آن تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، گراف تهی نام دارد. گراف تهی n راسی یعنی گرافی که n راس تنها دارد و هیچ یالی ندارد.

گراف K-منتظم: گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف K -منتظم مینامیم.

مثال: شکل زیر یک گراف ۳-منتظم ۶ راسی است.

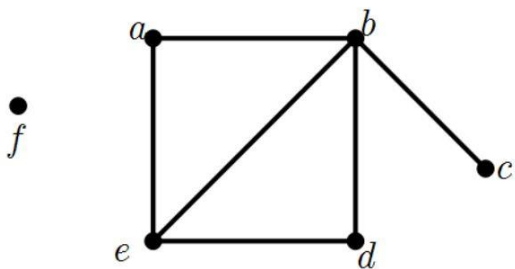


تعریف دو راس مجاور (همسایه): دو راس u و v را دو راس همسایه یا مجاور میگویند هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند. یعنی $uv \in E(G)$ به عنوان مثال در گراف مقابل راس a با راس های e, b, d مجاور است و راس b با راس های e, c, a مجاور است.



تعریف مجموعه همسایه های یک راس: فرض کنید، به مجموعه راس هایی از گراف G که به راس v متصل هستند، همسایگی باز راس v میگوییم و آن را با $N_G(v)$ نمایش میدهیم. اضافه کردن خود راس v به $N_G(v)$ همسایگی بسته راس v را به دست میدهد و آن را با $N_G[v]$ نمایش میدهیم.

مثال: در شکل مقابل مجموعه همسایه های باز و بسته تمام راس ها را مشخص کنید.



مثال: گراف $G(V,E)$ که در آن $V = \{a,b,c,d,e\}$ است. و همسایه های باز رئوس آن به صورت زیر هستند را رسم کنید

$$N_G(d) = \{b,c\}$$

$$N_G(c) = \{b,d\}$$

$$N_G(b) = \{a,c,d\}$$

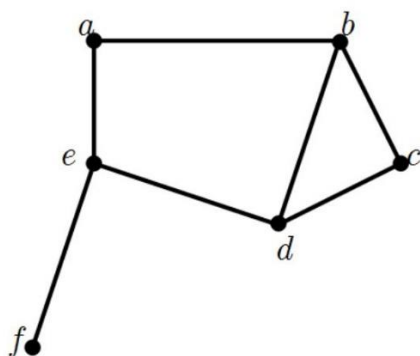
$$N_G(a) = \{b,e\}$$

مثال: شکل مقابل نمودار گراف G میباشد.

الف) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید.

ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید.

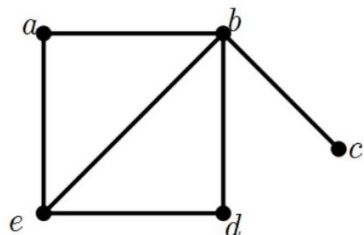
ج) مجموع درجات راس های گراف G را مشخص کنید. (خرداد ۹۸)



تعریف دو یال مجاور: دو یال را مجاور گوئیم هرگاه راسی وجود داشته باشد که هر

دوی آنها به آن متصل باشند. به عنوان مثال در شکل رو به رو دو یال ab و bd

مجاور هستند زیرا هر دو به راس b وصل هستند.



قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشد آنگاه:

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$$

نتیجه: تعداد راس های فرد هر گراف عددی زوج است