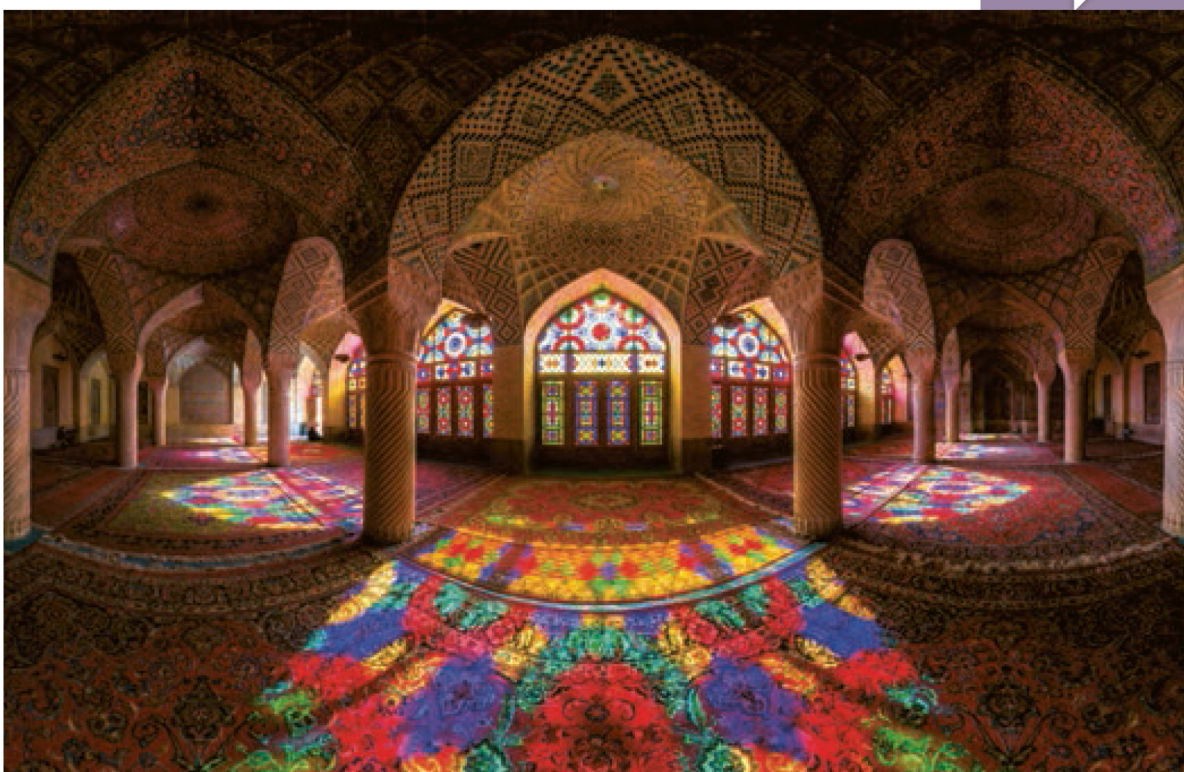
۲

فصل دوم

تبدیل‌های هندسی و کاربردها

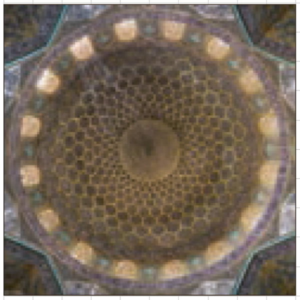


عکس: محمدرضا دومیری گنجی

تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم‌نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.

درس اوّل

تبدیل‌های هندسی



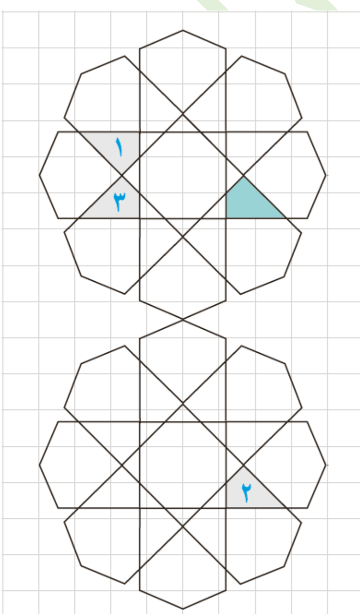
در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی کاری، گچ‌بری و . . . شکل های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاطش در صفحه پیدا می کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می تواند دارای ویژگی های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکاتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را **تبدیل های هندسی** می‌نامیم.

> تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌تواند موقعیت[1](جایگاه شکل در صفحه) یا اندازهٔ[2] شکل را تغییر دهد.
> تبدیل‌یافتهٔ یک شکل را، تصویر آن می‌نامیم.

در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل ها و برخی ویژگی های آنها را به‌طور شهودی مرور و یادآوری خواهیم کرد.

فعالیت



۱ــ به تصویر روبه‌رو دقت کنید.

اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافتهٔ چهارضلعی رنگ شده بدانیم :

الف) کدام چهار ضلعی، انتقال‌یافتهٔ چهارضلعی رنگ‌شده است؟

چهارضلعی ۲ انتقال یافتهٔ چهارضلعی رنگ شده است.

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ‌شده است؟

چهارضلعی ۳ بازتاب چهارضلعی رنگ شده است.

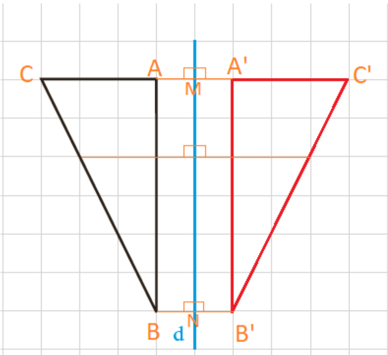
پ) کدام شکل، دوران یافتهٔ شکل رنگ‌شده است؟

چهارضلعی ۱ دوران یافتهٔ چهارضلعی رنگ شده است.

۱ــ Position

۲ ــ Size

۲ــ الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.



(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟)

از هر رأس مثلث بر خط d عمودی رسم می کنیم و سپس به اندازه ی آن پاره خط امتداد می دهیم تا تصویرش به دست آید. ($AM = A'M$, $BN = B'N$, $CM = C'M$)سپس نقاط تصویر یعنی 'A ، 'B و 'C را به هم وصل می کنیم . مثلث 'A'B'C بازتاب مثلث ABC است.

خط d عمود منصف پاره خطی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می کند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟ اندازه‌ها را چطور؟

موقعیت شکل را تغییر می دهد اما اندازه ها را تغییر نمی دهد.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

خیر شیب پاره خط BC با شیب پاره خط متناظرش 'B'C برابر نیست.

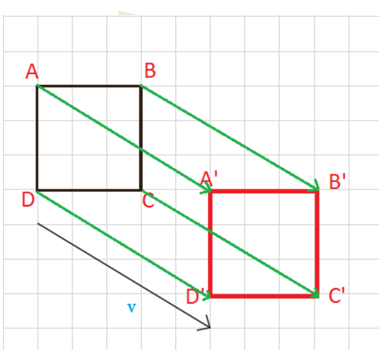
ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

اگر خط مورد نظر موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد آنگاه شیب آن حفظ می شود

در شکل بالا همانطور که می بینیم پاره خط AC بخشی از خط عمود بر خط d است و تصویر آن نیز روی همان خط عمود قرار خواهد گرفت وبه همین دلیل شیب پاره خط 'A'C با شیب پاره خط AC برابر است.

اگر خط مورد نظر موازی محور بازتاب باشد تصویرش هم با آن موازی است پس هم شیب خواهند شد.

۳ــ الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).



با توجه به بردار v باید رأس های مربع را ۵ واحد به سمت راست و۳ واحد به سمت پایین انتقال بدهیم تا نقاط تصویر به دست آیند. واضح است که باتوجه به شکل بردارد ها یی که هر نقطه را به تصویرش برده است با بردار v برابر هستند. سپس نقاط تصویر را به ترتیب به هم وصل می کنیم. مربع 'A'B'C'D انتقال یافته ی مربع ABCD تحت بردارv است.

در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

پاره خط هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می کنند باهم موازی هستند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چطور؟

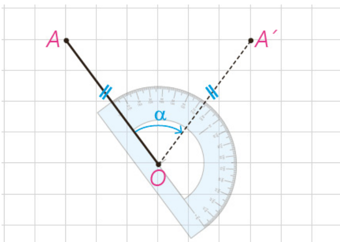
این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی کند ولی اندازه ها را حفظ می کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

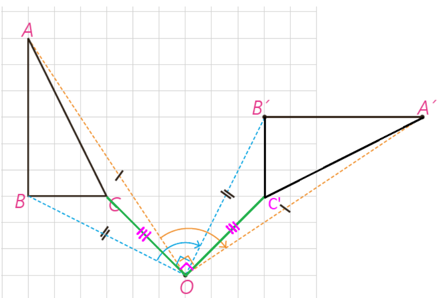
در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویرش برابر است.

ت) آیا در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می‌شود؟

در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می شود.



۴ـ در سال‌های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α، کافی‌است هر نقطه از شکل، مثل نقطهٔ A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره‌خطی به اندازهٔ OA جدا کنیم تا نقطهٔ A′ به دست آید.



می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده‌ایم.

الف) به همین ترتیب تصویر نقطهٔ C را پیدا، و شکل را کامل کنید.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چطور؟

این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی کند ولی اندازه ها را حفظ می کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویر آن برابر است؟

دراین تبدیل شیب پاره خط اولیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر نیست.

ت) آیا می‌توانید زاویهٔ دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را حفظ کند؟

اگر زاویهٔ دوران ۰ ، ۱۸۰ و یا ۳۶۰ درجه انتخاب شود دوران تحت آن ، شیب خط را حفظ می کند.

> به طور شهودی می‌توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می‌توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهند.

در ادامهٔ این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن بر خلاف سه تبدیل صفحهٔ قبل، اندازهٔ زاویه‌ها حفظ می‌شود ولی اندازهٔ پاره‌خط‌ها تغییر می‌کند. این تبدیل را **تجانس** می‌نامیم.

حال که به‌طور شهودی، برخی ویژگی‌های تبدیل‌های مختلف را مرور کردیم در ادامه با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی‌ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تعریف: تبدیل T[1] در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحهٔ P نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، تصویر دقیقاً یک نقطهٔ A از صفحهٔ P است.

اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می‌نویسیم:

$T: P \longrightarrow P$

$T(A)=A'$

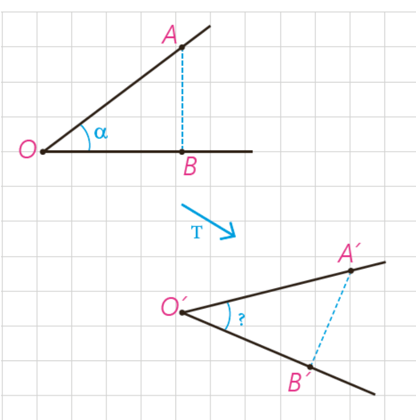
پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند؛ یعنی اندازهٔ پاره‌خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازهٔ پاره خط $A'B'$ در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً **طولپایی** یا **ایزومتری** می‌نامیم.

تعریف: تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می‌شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$، آن‌گاه داریم: $AB = A'B'$

پیش از این به‌طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیل‌هایی که مرور شد، اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود. در این فعالیت با استدلال دقیق‌تری این ادعا را اثبات می‌کنیم.

فعالیت



می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

فرض کنید T تبدیلی طولپاست.

و داریم :

$T(A) = A'$

$T(B) = B'$

$T(O) = O'$ و $\widehat{AOB} = \alpha$

دلیل همنهشتی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های AOB و $A'O'B'$ را نتیجه بگیرید.

چون این تبدیل طولپا است پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{A}B \cong O'\overset{\Delta}{A'}B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} = \alpha$$

[1] ـ Transformation

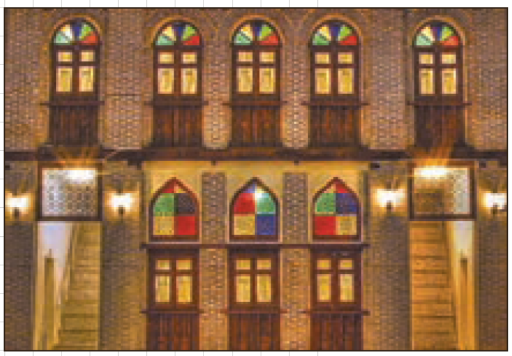
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت :

قضیه: در هر تبدیل طولپا، تبدیل‌یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازهٔ آن است.

در تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب، می‌توان ثابت کرد که تبدیل‌یافتهٔ هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل‌یافتهٔ یک خط، کافی است تبدیل‌یافتهٔ دو نقطهٔ دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

حال با استدلال دقیق‌تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

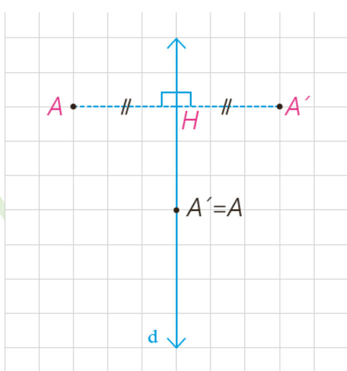
بازتاب



همان‌طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید.

در این صورت A' را بازتاب یا قرینهٔ A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم :

S[1]$(A) = A'$



در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

خط d، **خط بازتاب** یا **محور بازتاب** نامیده می‌شود.

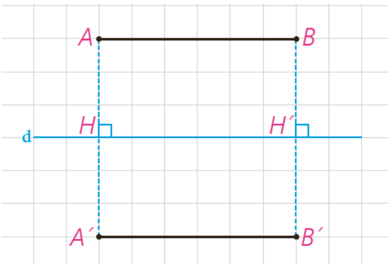
اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.

تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل‌یافتهٔ آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطهٔ ثابت تبدیل می‌نامند.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

۱ـ Symmetry

فعالیت



می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیل طولپا است. حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازهٔ پاره‌خط با اندازهٔ تصویر آن برابر است.

الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است. بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم.
چرا $A'B'$ با خطوط d و AB موازی است؟

می دانیم مستطیل چهار ضلعی است که همه زاویه های آن قائمه باشد .

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel d, AH \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{A}=\hat{H}=90^\circ \\ AB \parallel d, BH' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{B}=\hat{H}'=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ABH'H \quad \text{مستطیل است}$$

در هر مستطیل اضلاع مقابل با هم برابرند پس :

$$\left.\begin{array}{l} AH = BH' \Rightarrow 2AH = 2BH' \xrightarrow[BH'=B'H']{AH=A'H} AA' = BB' \\ \left.\begin{array}{l} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \end{array}\right\} \Rightarrow ABB'A' \quad \text{متوازی الاضلاع است}$$

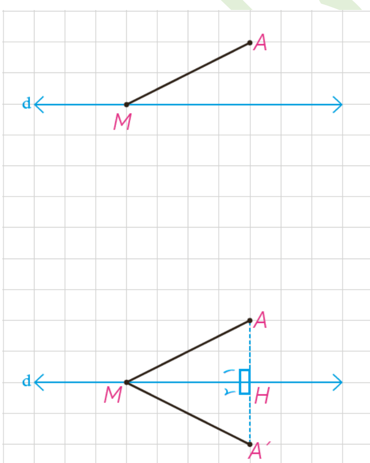
در نتیجه: $A'B'$ موازی AB است.

$$\left.\begin{array}{l} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \parallel d$$

از طرفی متوازی الاضلاع $ABB'A'$ زاویه قائمه دارد:

پس چهارضلعی $ABB'A'$ یک ...مستطیل.. است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع روبه‌رو، دو به دو هم‌اندازه‌اند؛ یعنی : $AB = A'B'$.

ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد.



(اگر هر دو نقطهٔ ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)

خوب در این حالت بازتاب پاره خط MA بر روی خط و بر روی خودش منطبق است.

$$S(M) = M \;,\; S(A) = A \Rightarrow MA = MA$$

بازتاب A نسبت به خط d، نقطهٔ A' و بازتاب M، خود M است.

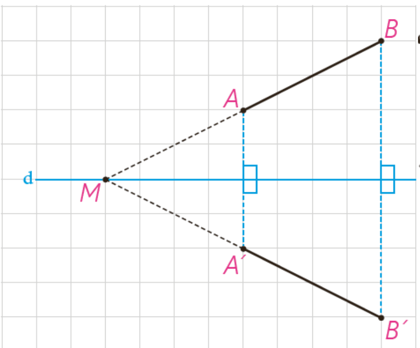
به عبارتی : $S(A) = A'$ و $S(M) = M$

آیا می‌توانید به کمک هم نهشتی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA=MA'$ ارائه کنید؟

$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\Delta}{A}H \cong M\overset{\Delta}{A'}H \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} MA = MA' \;,\; \widehat{AMH} = \widehat{A'MH}$$

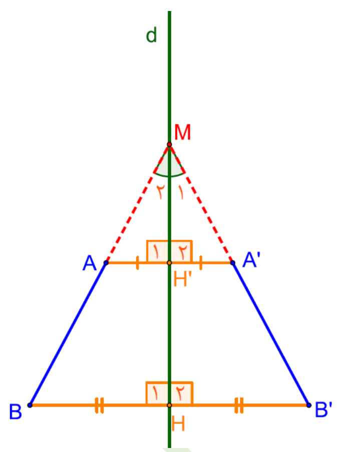
آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید.)

خط d عمود منصف پاره خط AA' است ؛ بنا براین هر نقطه مانند M روی خط d از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است . یعنی: $MA=MA'$



پ) در حالتی که پاره‌خط AB با خط بازتاب d، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطهٔ M قطع کند. نقطه B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره‌خط MB' را رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط MB' واقع می‌شود؛ چرا؟

با توجه به قسمت (ب) می دانیم که $MB=MB'$ پس مثلث متساوی الساقین است و چون خط d عمود منصف BB' است با توجه به قضایای متساوی الساقین d نیمساز زاویهٔ BMB' نیز هست. بنا براین $\hat{M}_۱=\hat{M}$.



از نقطهٔ A موازی پاره خط BB' خطی رسم می کنیم تا MB' را در نقطهٔ A' قطع کند.

حالا باید ثابت کنیم که A' تصویر نقطهٔ A نسبت به خط بازتاب d است یعنی :

$$AH'=A'H' \quad , \quad H'=H'_۲=۹۰^\circ$$

راه اول : در مثلث MAA' پاره خط MH' هم نیمساز است و هم ارتفاع پس مثلث متساوی الساقین است. و در نتیجه MH' میانه نیز هست پس: $AH'=A'H'$

راه دوم :

$$AA'\parallel BB' \text{ , } d \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} H=H'=۹۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow H'_۱=H'_۲=۹۰^\circ \\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \\ MH'=MH' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} M\overset{\Delta}{A}H' \cong M\overset{\Delta}{A'}H' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AH'=A'H'$$

بنا براین : $H'_۱=H'_۲=۹۰^\circ$, $AH'=A'H'$ و حکم ثابت شد.

راه دیگر برای پاسخ به (چرا):

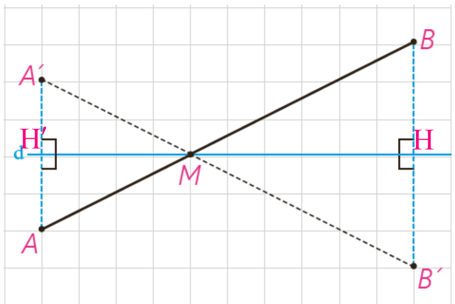
H وسط BB' و H' وسط AA' است بنا برتعریف بازتاب نقاط H و H' روی خط d یعنی خط بازتاب هستند.با توجه به بند (ب) خط d نیمساز زاویه های BMB' و AMA' است.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \widehat{AMH'}=\widehat{BMH} \text{ با توجه به شکل} \\ \widehat{A'MH'}=\widehat{AMH'} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'}=\widehat{BMH} \\ \\ \widehat{B'MH}=\widehat{BMH} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B'MH}=\widehat{A'MH'}$$

یک ضلع (MH و MH') و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی MA' و MB' بر هم منطبق هستند.

حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = MB - MA \\ A'B' = MB' - MA' \\ \text{با توجه به قسمت ب } MB = MB' \text{ و } MA = MA' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$



ت) در حالتی که پاره‌خط AB خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را نقطه A' می‌نامیم.

پاره‌خط MA' را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟

H وسط 'BB و 'H وسط 'AA است بنا برتعریف بازتاب نقاط H و 'H روی خط d یعنی خط بازتاب هستند.با توجه به بند ب) خط d نیمسراز زاویه های BMB' و AMA' است.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \widehat{AMH'} = \widehat{BMH} \text{ متقابل به رأس} \\ \widehat{A'MH'} = \widehat{AMH'} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'} = \widehat{BMH} \\ \widehat{B'MH} = \widehat{BMH} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'}$$

یک ضلع (MH و'MH) و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی 'MA و 'MB بر هم منطبق هستند.

حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + B'M \\ \text{با توجه به قسمت ب } MB = MB' \text{ و } AM = A'M \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

نتیجهٔ این مراحل را می‌توان در قالب این قضیه بیان کرد :

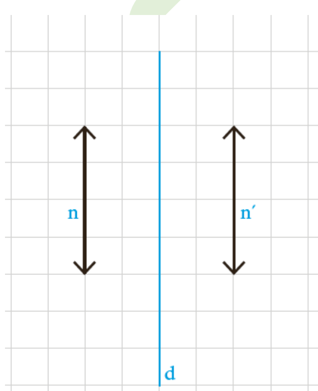
قضیه: در هر بازتاب، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که بازتاب، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

فعالیت

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

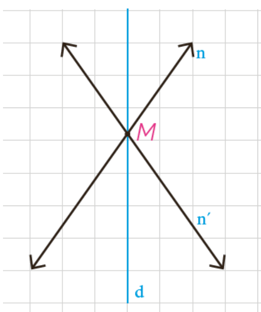
مسئله را برای دو حالت کلی در نظر می‌گیریم : وقتی خط داده شده با خط بازتاب موازی باشد و وقتی با آن موازی نباشد.



الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می‌نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟

خط n موازی خط بازتاب d است . دونقطهٔ دلخواه مانند A و B را روی n انتخاب می کنیم . بنا بر قسمت (الف) فعالیت قبل می دانیم که تصویر پاره خط AB نسبت به خط بازتاب d یعنی پاره خط A'B' با پاره خط AB و خط d موازی است از طرفی چون خط n' تصویر خط n است پس حتما نقاط A' و B' نیز روی خط n' قرار دارند در نتیجه خط n' موازی n و d است.

وقتی دو خط موازی باشند در صورت وجود شیب ، شیب ها با هم برابرند پس شیب حفظ می شود و وقتی که شیب برای یکی از آن ها تعریف نشود برای دیگری نیز تعریف نمی شود . پس در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ می کند.



ب) اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد، خط‌های d، n و n′ در نقطه‌ای مثل M متقاطع می‌شوند؛ پس n و n′ موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را . . . حفظ.نمی.کند. . . بنابراین؛

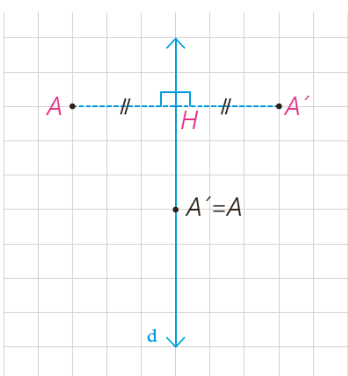
در حالت کلی، بازتاب شیب خط را ..حفظ.نمی..کند..

دیدیم که طولپاها اندازهٔ زاویه را هم حفظ می‌کنند. بنابراین به‌طور کلی هر چندضلعی و تصویر آن تحت تأثیر یک طولپا از جمله بازتاب با هم همنهشت هستند.

در ادامه به کمک ویژگی‌های انتقال و دوران ثابت می‌کنیم که این دو تبدیل نیز طولپا هستند.

کاردرکلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :



الف) وقتی A′ بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A′ نسبت به خط d، کدام نقطه است؟ . . .A. . . چرا؟

چون خط d عمود منصف پاره خط AA' است بنا براین: $d \perp AA'$, $A'H = AH$

پس اگر از A' بر خط d عمود کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم نقطهٔ A به دست می آید.

ب) قرینهٔ قرینهٔ هر نقطه چیست؟ خود آن نقطه.است.

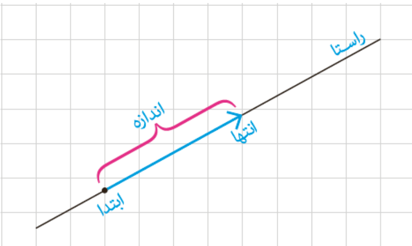
در واقع : $S(S(A)) = S(..A'..) = ...A.....$ و به زبان ساده‌تر $(A')' = ..A..$

پ) در هر بازتاب تبدیل یافتهٔ یک مثلث، یک . .مثلث. است که با مثلث اولیه . . .همنهشت. . . است.

ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب .موازی. باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافتهٔ تمام نقاط روی خط، .روی خط . d. . . . است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب . . . . .بیشمار. . . . است.

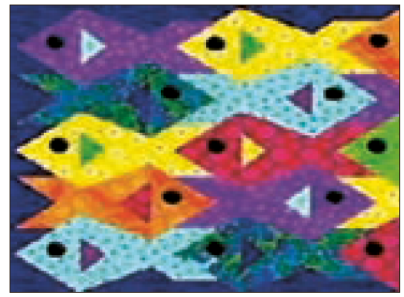
انتقال

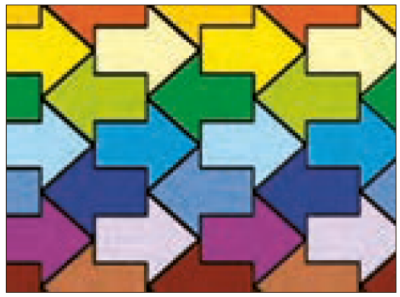


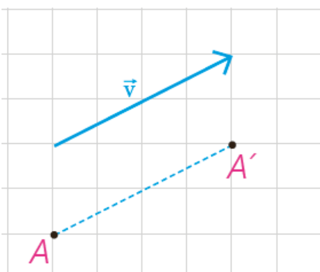
یادآوری

۱ــ در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.

۲ــ دو بردار، که هم‌اندازه، هم راستا و هم‌جهت باشند، دو بردار برابر هستند.



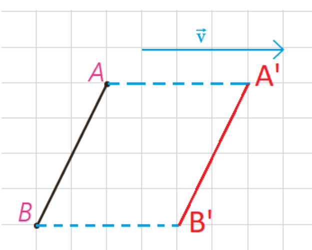




در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A باشد، آن‌گاه $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

تعریف: انتقال T[1] تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

فعالیت



۱ــ می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولپاست.

الف) اگر پاره‌خط دلخواه AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، تبدیل‌یافتهٔ AB را با بردار $\vec{v}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید: $AB=A'B'$.

راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

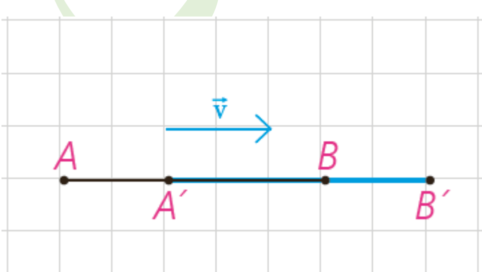
A' تصویر A است پس بنا به تعریف انتقال $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط AA' مساوی طول بردار $\vec{v}$ و با آن موازی است.

B' تصویر B است پس بنا به تعریف انتقال $\overrightarrow{BB'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط BB' مساوی طول بردار $\vec{v}$ و با آن موازی است.

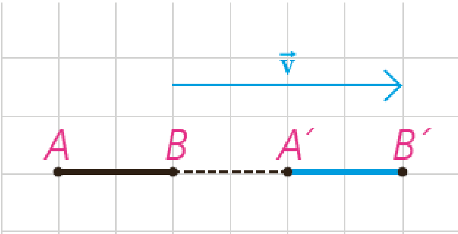
در نتیجه AA' موازی و مساوی BB' است و بنا بر راهنمایی داده شده نتیجه می گریم که چهارضلعی AA'B'B متوازی الاضلاع است پس $AB = A'B'$.

ب) اگر پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره‌خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید: $AB=A'B'$.

(۱)



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \\ \text{طبق تعریف انتقال}\ AA' = BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$



(۲)

$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' - BA' \\ A'B' = BB' - BA' \\ \text{طبق تعریف انتقال } AA' = BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

تذکر: در حالتی که طول بردار v با پاره‌خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

قضیه: در هر انتقال، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن با هم برابرند.

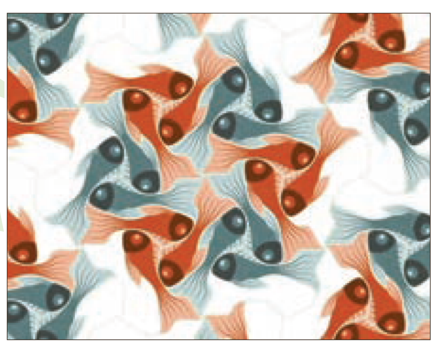
به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحهٔ P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

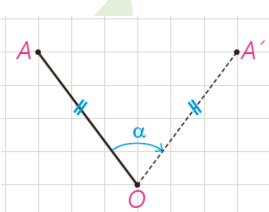
۲ــ در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می کند.

در حالت (الف) نتیجه گرفتیم که چهارضلعی AA'B'B متوازی الاضلاع است پس $AB \parallel A'B'$ در نتیجه شیب خط ها یکی است.

در حالت (ب) و (پ) هر پاره خط و تصویرش بر روی یک خط قرار دارند به عبارتی نقاط A، B، B' و B هم خط هستند. پس شیب آن ها هم برابر است.

دوران





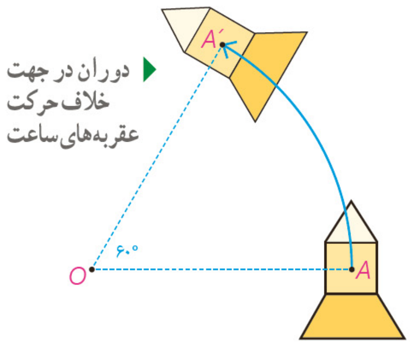
دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ α، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره‌خطی به اندازهٔ OA جدا می‌کنیم تا A' به دست آید.

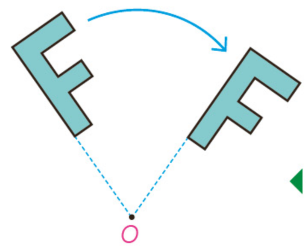
بدین ترتیب :

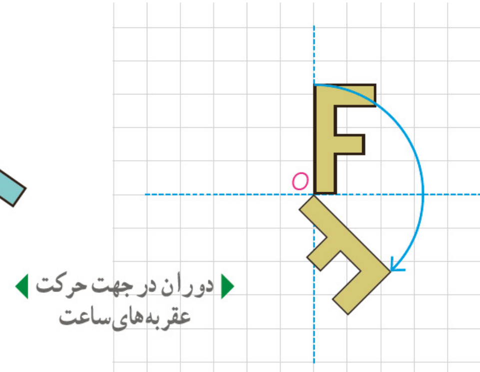
تعریف: دوران R[1] به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطهٔ A باشد، داریم:

$OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$

۱ــ Rotation

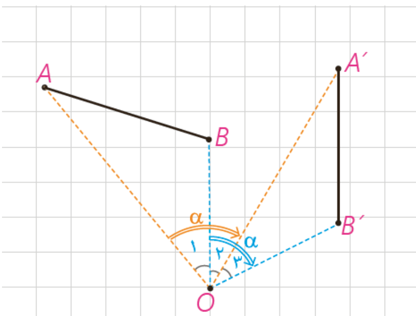






می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیل طولپاست.

برای دوران دادن هر پاره‌خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A′ و B′ حاصل شود. پاره خط A′B′ را رسم می‌کنیم.



مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم :

الف) مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویهٔ دوران ا

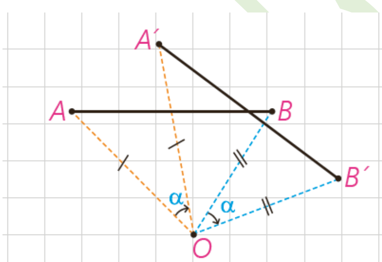
زاویهٔ $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.

با توجه به شکل $O_1 + O_2 = O_2 + O_3 = \alpha$

پس می‌توان مدعی شد که ... $\widehat{AOB}$ ... = ... $\widehat{A'OB'}$ ...

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و OA′B′ نشان دهید AB و A′B′ هم‌اندازه‌اند.

$$\text{با توجه به تعریف دوران}\left.\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\triangle}{O}B \cong A'\overset{\triangle}{O}B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB = A'B'$$



ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره‌خط AB واقع نباشد ولی زاویهٔ دوران از زاویهٔ $\widehat{AOB}$ کمتر باشد، باز هم تساوی AB =A′B′ برقرار است.

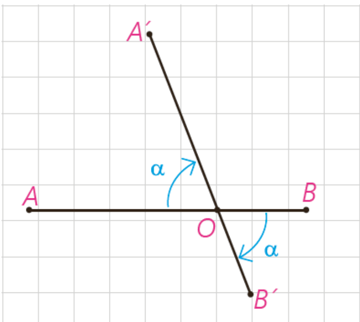
تذکر: در حالتی که $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

با توجه به شکل :

$$\left.\begin{aligned} \widehat{AOB} &= \alpha + \widehat{A'OB} \\ \widehat{A'OB'} &= \alpha + \widehat{A'OB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

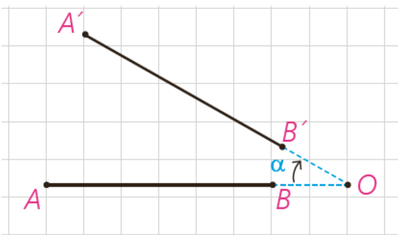
در نتیجه :

$$\text{با توجه به تعریف دوران}\left.\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\triangle}{O}B \cong A'\overset{\triangle}{O}B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB = A'B'$$



پ) اگر نقطهٔ O روی پاره خط AB باشد :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO + OB \\ A'B' = A'O + OB' \\ \text{طبق تعریف دوران} \quad AO = A'O \quad \text{و} \quad OB = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$



ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطهٔ O روی امتداد پارخط AB باشد، حکم برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO - OB \\ A'B' = A'O - OB' \\ \text{طبق تعریف دوران} \quad AO = A'O \quad \text{و} \quad OB = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

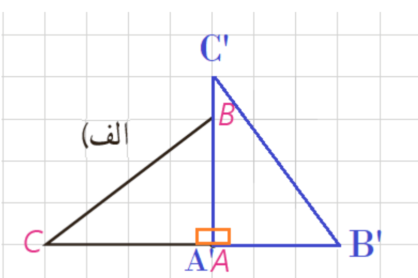
بنابراین :

قضیه: در هر دوران، اندازهٔ هر پاره‌خط و تصویر آن با هم برابرند.

به‌عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

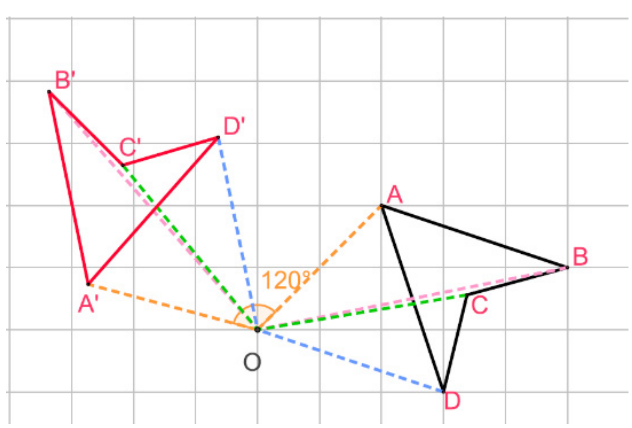
کاردرکلاس

دوران یافتهٔ هر شکل را رسم کنید.



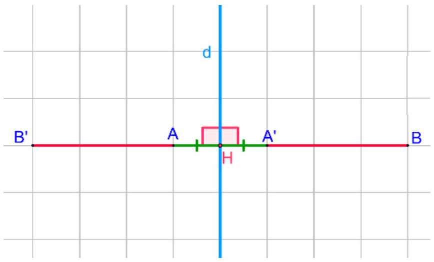
الف) دوران به مرکز A و با زاویه °۹۰ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

ب) دوران به مرکز O و با زاویه °۱۲۰ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت



تمرین

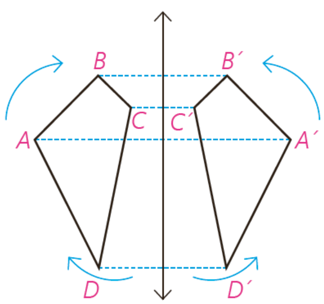
۱ــ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.



$$B'H = BH \Rightarrow B'A + AH = BA' + A'H \xrightarrow[\text{بنا بر تعریف بازتاب}]{AH=A'H} B'A = BA'$$ بنا بر تعریف بازتاب

$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = AA' + B'A \\ B'A = BA' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

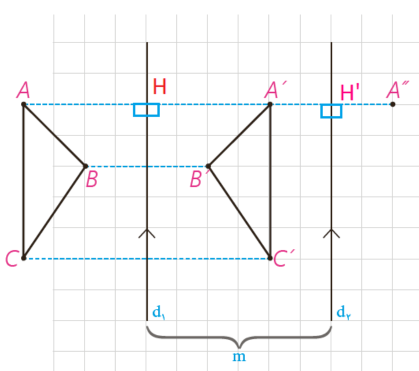
۲ــ در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر **چهارضلعی محدب** ABCD تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه های ساعت است .

خیر نمی توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می کند.

۳ــ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.



الف) نشان دهید : $AA''=۲m$

$$AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' \xrightarrow[A'H'=H'A'']{AH=HA'} AA'' = ۲HA' + ۲A'H'$$

$$\Rightarrow AA'' = ۲(\underbrace{HA' + A'H'}_{m}) \Rightarrow AA'' = ۲m$$

ب) اندازهٔ BB'' و CC'' چقدر است؟

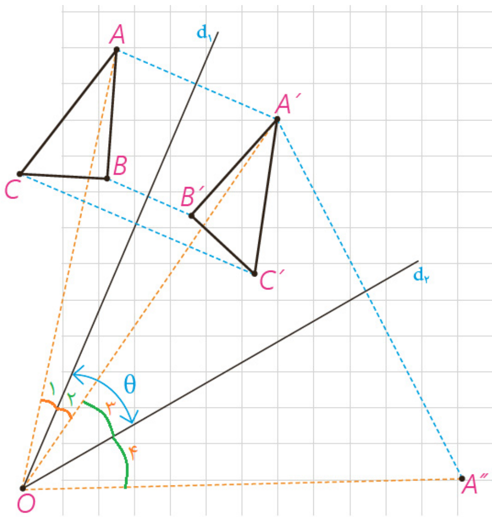
بنا براثبات قسمت الف به روش مشابه نتیجه می گریم که : $BB'' = CC'' = ۲m$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می گیرید؟

با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازهٔ آن دوبرابر فاصله ی بین دو خط بازتاب d_1 و d_2 یعنی $۲m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است ، می توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست.

نتیجه می گیریم ، ترکیب دو بازتابی که محور های بازتاب موازی یکدیگر هستند یک انتقال است.

۴ــ در شکل، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با زاویهٔ θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط $d_۱$ است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط $d_۲$ رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.



الف) نشان دهید : $\widehat{AOA''} = ۲\theta$

خط $d_۱$ محور بازتابت است پس نیمساز زاویه AOA' است یعنی: $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

خط $d_۲$ محور بازتابت است پس نیمساز زاویه $A'OA''$ است یعنی: $\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$

$$\widehat{AOA''} = \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ + \hat{O}_۴ \xrightarrow[\hat{O}_۳=\hat{O}_۴]{\hat{O}_۱=\hat{O}_۲} \widehat{AOA''} = ۲\hat{O}_۲ + ۲\hat{O}_۳$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA''} = ۲(\underbrace{\hat{O}_۲ + \hat{O}_۳}_{\theta}) \Rightarrow \widehat{AOA''} = ۲\theta$$

ب) اندازهٔ $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

بنا بر اثبات الف به روش مشابه : $\widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = ۲\theta$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با دورانی به مرکز O نقطه ی برخورد دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ و زاویه ای به اندازهٔ دو برابر زاویه بین دو خط (۲θ) می توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست.

نتیجه می گیریم ، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.

تجانس

در شکل‌های متشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازهٔ همهٔ پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را **تجانس** می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k\neq ۰$، آن را **نسبت تجانس (مقیاس)** می‌نامیم، بزرگ یا کوچک می‌شود.

تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است :

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k\neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O، M و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM' = |k|.OM$

پ)
– اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند.

مثال: $OM' = 2\,OM$  $k=2$

$OM' = \frac{1}{2}OM$  $k=\frac{1}{2}$

– اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

مثال: $OM' = 2\,OM$  $k=-2$

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k.OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطهٔ M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطهٔ O بین نقاط M و M' باشد و $OM'=|k|.OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k، نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M به نسبت k و نقطهٔ M مجانس نقطهٔ M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

اگر در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M به نسبت k باشد آنگاه :

$$k>0 \Rightarrow OM' = k.OM \xrightarrow{\times(\frac{1}{k})} \frac{1}{k}.OM' = OM$$

$$k<0 \Rightarrow OM' = |k|.OM \xrightarrow{\times\left|\frac{1}{k}\right|} \left|\frac{1}{k}\right|.OM' = OM$$

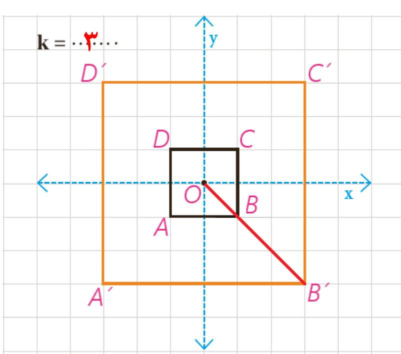
بنا براین نقطهٔ M مجانس نقطهٔ M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است .

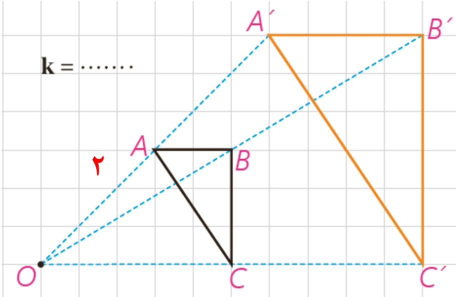
فعالیت

۱ــ این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.

الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

با توجه به تعریف تجانس نقاط B و B' در یک طرف O قرار دارند پس $K>0$





در نتیجه: $OB' = k.OB \Rightarrow k = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow k = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow k = ۳$

$OC' = k.OC \Rightarrow k = \frac{OC'}{OC} \Rightarrow k = \frac{۱۰}{۵} \Rightarrow k = ۲$

ب) آیا تجانس طولپاست؟ چرا؟

خیر زیرا اندازهٔ پاره خط ها حفظ نمی شود.

پ) در این شکل‌ها، طول هر پاره‌خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

در مربع : $A'B' = ۳AB \;,\; B'C' = ۳BC \;,\; C'D' = ۳CD \;,\; D'A' = ۳DA$

طول تصویر هر پاره خط ۳ برابر شده و درواقع این عدد همان نسبت تجانس است .

همچنین محیط شکل نیز ۳ برابر می شود.

در مثلث : $A'B' = ۲AB \;,\; B'C' = ۲BC$

$AC = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳} \;,\; A'C' = \sqrt{۱۶+۳۶} = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow A'C' = ۲AC$

طول تصویر هر پاره خط ۲ برابر شده و درواقع این عدد همان نسبت تجانس است .

همچنین محیط شکل نیز ۲ برابر می شود.

ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

در مربع : $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{۳۶}{۴} = ۹ = ۳^۲$

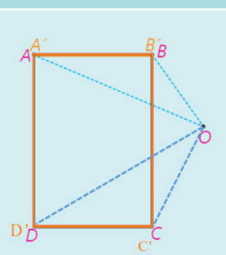
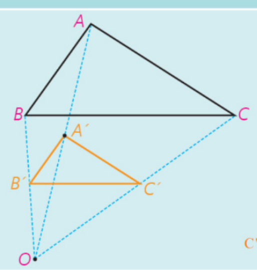
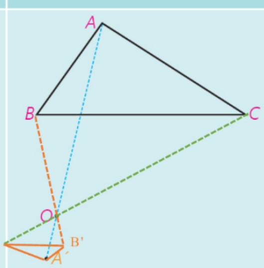
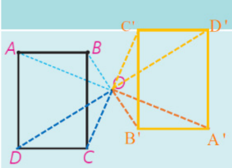
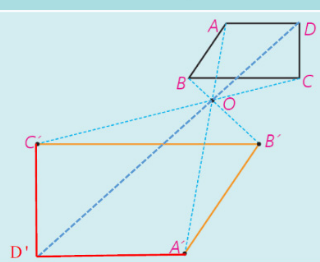
در مثلث : $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}\times۴\times۶}{\frac{۱}{۲}\times۲\times۳} = ۴ = ۲^۲$

مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس است.

۲ــ در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی : $k > ۱$.

حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می کنیم.

الف) در هر حالت مراحل باقی‌مانده را کامل کنید.

k	$k = ۱$	$۰ < k < ۱$	$-۱ < k < ۰$
مثال		$k = \frac{۱}{۲}$	$k = -\frac{۱}{۳}$
			
k	$k = -۱$	$k < -۱$	
مثال		$k = -۲$	
			

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :

			طولپاست	اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
تجانس	$k>0$	$k>1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
		$k=1$	درست	درست	درست	درست	درست
		$0<k<1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
	$k<0$	$-1<k<0$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
		$k=-1$	درست	درست	درست	درست	درست
		$k<-1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

پ) شرط اینکه تجانس طولپا باشد، این است که $K=1$ یا $K=-1$ به عبارتی $|k|=1$

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می‌کند، یعنی خطوط AA'، BB' و . . . نسبت به هم چه وضعی دارند؟

این خطوط در مرکز تجانس یعنی نقطهٔ O همرسند.

در تجانس به مرکز O و نسبت k:

اگر $k>0$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.

اگر $k<0$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.

اگر $|k|<1$ تصویر شکل کوچک‌تر می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.

اگر بزرگ‌تر تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

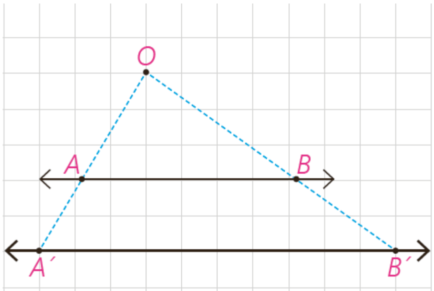
فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D[1]، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد :

الف) نقطهٔ O روی خط AB است.

حل : در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.

۱ــ Dilation



ب) نقطهٔ O غیر واقع بر خط AB است.

حل : در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم :

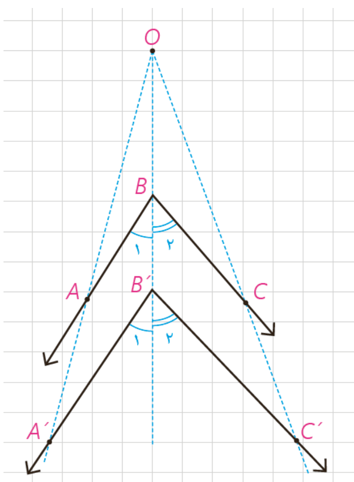
$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB. \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k.$$

$$\Rightarrow AB \| A'B'$$ (چرا؟) بنا بر عکس قضیه تالس

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی‌اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین :

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

فعالیت



می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه $\widehat{ABC}$ را در نظر می‌گیریم.

مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می‌کنیم.

به کمک قضیهٔ قبل و شکل داده شده، ثابت کنید : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

با توجه به شکل و قضیه قبل داریم :

$AB \| A'B'$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا برقضیه خطوط موازی $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$ (۱)

$BC \| B'C'$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا برقضیه خطوط موازی $\hat{B}_2 = \hat{B}'_2$ (۲)

در نتیجه از جمع دو طرف رابطه ی (۱) و (۲) داریم : $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}'_1 + \hat{B}'_2 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

نتیجهٔ این فعالیت را در قالب قضیهٔ زیر مطرح می‌کنیم :

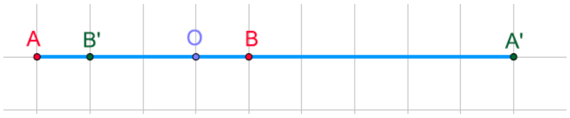
قضیه: تجانس، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

کاردرکلاس

۱ــ الف) فرض کنید پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد؛ نشان دهید : $\frac{A'B'}{AB} = |k|$

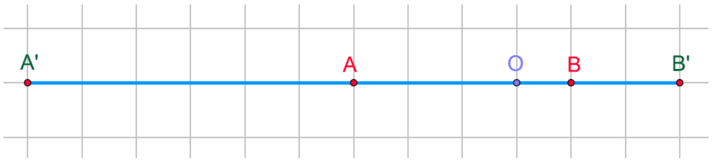
۱) در این حالت نقطهٔ O روی پاره خط AB قرار دارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow[OB'=|k|.OB]{OA'=|k|.OA} A'B' = |k|.OA + |k|.OB = |k|(\underbrace{OA+OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



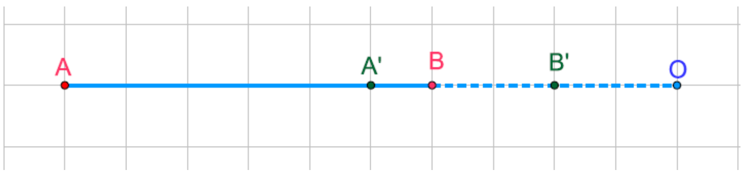
۲) در این حالت نقطهٔ O روی پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow[OB'=k.OB]{OA'=k.OA} A'B' = k.OA + k.OB = k(\underbrace{OA+OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



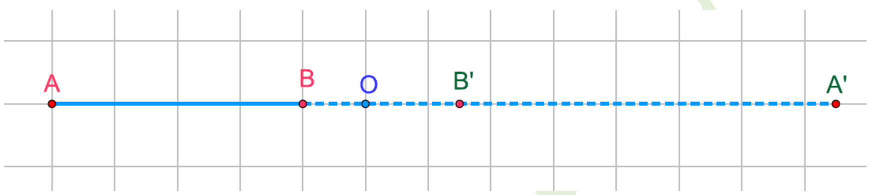
۳) در این حالت نقطهٔ O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow[OB'=k.OB]{OA'=k.OA} A'B' = k.OA - k.OB = k(\underbrace{OA-OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



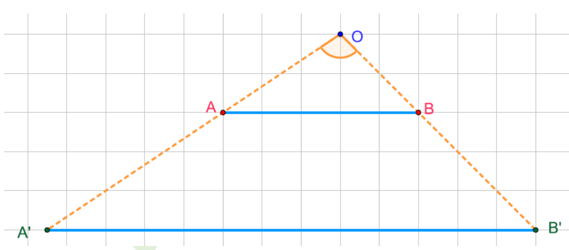
۴) در این حالت نقطهٔ O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k < 0$ در نتیجه :

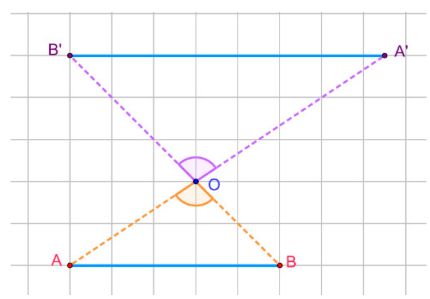
$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow[OB'=|k|.OB]{OA'=|k|.OA} A'B' = |k|.OA - |k|.OB = |k|(\underbrace{OA-OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



۵) در این حالت نقطهٔ O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$\left.\begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$





۶) در این حالت نقطهٔ O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \\ \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث}} A\overset{\Delta}{O}B \sim A'\overset{\Delta}{O}B' \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

ب) اگر nضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس nضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو nضلعی با هم متشابه‌اند.

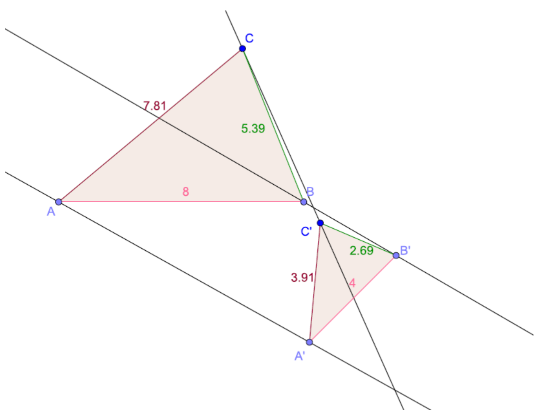
فرض کنیم $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ یک n ضلعی و نقطه ی O مرکز تجانس و k نسبت تجانس باشد

و چند ضلعی $A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$ مجانس آن باشد بنا بر تعریف تجانس داریم :

$$\left.\begin{array}{l} OA'_1 = |k| OA_1 \\ OA'_2 = |k| OA_2 \\ OA'_3 = |k| OA_3 \\ \vdots \\ OA'_n = |k| OA_n \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{OA'_2}{OA_2} = \frac{OA'_3}{OA_3} = \dots = \frac{OA'_n}{OA_n} = |k|$$

پس چون اضلاع همه متناسب هستند بنا بر قضیه ۳ تشابه نتیجه می گیریم که این دو چند ضلعی متشابه اند.

۲ــ با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.



کافی است که دو شکل متشابه رسم کنیم که وقتی هر نقطه را به تصویرش وصل می کنیم و امتداد می دهیم همرس نشوند. به این ترتیب مرکز تجانس وجود نخواهد داشت و در این صورت تجانسی هم در کار نیست.

در شکل مقابل مثلث های ABC و A'B'C' متشابه اند اما متجانس نیستند

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$؛ این نقاط را .. ~~ثابت~~.تبدیل.. نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، **هر نقطهٔ صفحه** را به **خود آن نقطه** نظیر می‌کند؛ چنین تبدیل‌هایی را **تبدیل همانی** می‌نامیم.

تعریف: تبدیل T را تبدیل همانی گوییم، هر گاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل‌های همانی را با I نمایش می‌دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

انتقال زمانی همانی است که بردار انتقال برابر با بردار صفر باشد .

دوران زمانی تبدیل همانی است که زاویه دوران صفر درجه یا ۳۶۰ درجه باشد .

تجانس زمانی تبدیل همانی است که در آن $k=1$.

ب) آیا تبدیل همانی طولپاست؟

بله تبدیل همانی یک تبدیل طولپا است زیرا هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می کند .

اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند و تحت یک تبدیل همانی بخواهیم تصویر آن ها را بیابیم داریم :

$T(A) = A \ , \ T(B) = B \Rightarrow AB = AB$

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱ــ انتقال غیرهمانی :

خیر نمی توان نقاط ثابت داشت یا به عبارتی هر نقطه باید تحت یک بردار غیر صفر در صفحه بلغزد و نمی تواند بر روی خودش بلغزد.

۲ــ دوران غیرهمانی :

اگر نقطه ی مورد نظر روی مرکز دوران باشد تحت هر دورانی ثابت می ماند.پس مرکز دوران نقطهٔ ثابت تبدیل است.

۳ــ تجانس غیرهمانی :

اگر نقطه مورد نظر روی مرکز تجانس باشد تصویرش روی خودش قرار می گیرد . پس مرکز تجانس نقطهٔ ثابت تبدیل است.

کار در کلاس

۱ــ درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب	درست	درست	نادرست	نادرست	درست
انتقال	درست	درست	درست	درست	درست
دوران	درست	درست	نادرست	درست	درست
تجانس	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

تمرین

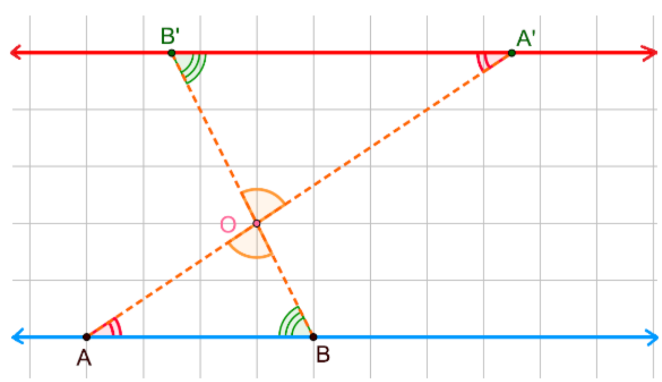
۱ــ در تجانسی با نسبت $k<0$ و مرکز تجانس O نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۱) درحالتی که نقطهٔ O روی خط AB قرار دارد و $k<0$ بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس های نقاط A و B روی خط AB واقع می شوند؛ بنا براین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب تغییر نمی کند.

۲) در حالتی که نقطهٔ O روی خط AB قرار ندارد و $k<0$ در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب ، مجانس های نقاط A و B باشند ، طبق تعریف داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA'=k.OA\\ OB'=k.OB\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=k\\ \widehat{A'OB'}=\widehat{AOB}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث}} A\overset{\Delta}{O}B\sim A'\overset{\Delta}{O}B'\Rightarrow \widehat{OB'A'}=\widehat{OBA}\ ,\ \widehat{OA'B'}=\widehat{OAB}$$



پس بنا برعکس قضیه خطوط موازی خط AB موازی خط $A'B'$ است . و شیب خط ها در صورت وجود باهم برابر است.

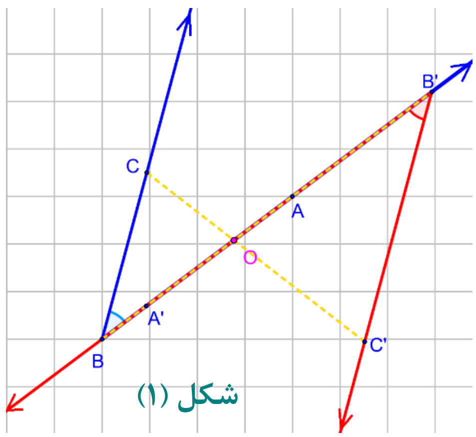
ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

زاویهٔ $\widehat{ABC}$ را در صفحه در نظر می گریم :

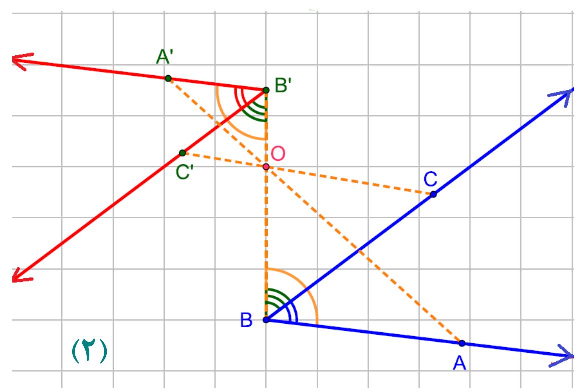
۱) اگر نقطهٔ O روی رأس زاویه یعنی نقطهٔ B باشد آنگاه مجانس زاویه یعنی $\widehat{A'B'C'}$ روی خود $\widehat{ABC}$ منطبق می شود.پس اندازه ی آن حفظ می شود.

۲) اگر نقطهٔ O روی یکی از اضلاع باشد مانند شکل (۱) آنگاه با توجه به قضیه، تجانس شیب خط را حفظ می کندپس:

$$BC \parallel B'C',\ BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$



شکل (۱)



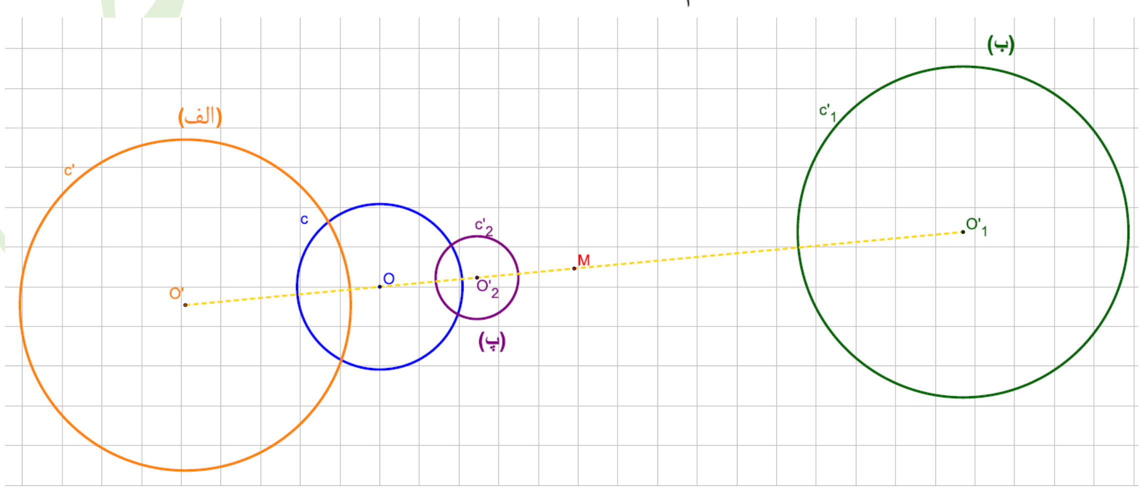
(۲)

۳) اگر نقطهٔ O نه روی اضلاع ونه روی رأس زاویه باشد مانند شکل (۲) با توجه به بند قبلی ، تجانس شیب خط را حفظ می کند پس :

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel B'C',\ BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{CBB'} = \widehat{C'B'B} \\ AB \parallel A'B',\ BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABB'} - \widehat{CBB'} = \widehat{A'B'B} - \widehat{C'B'B} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

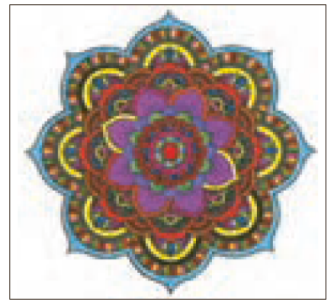
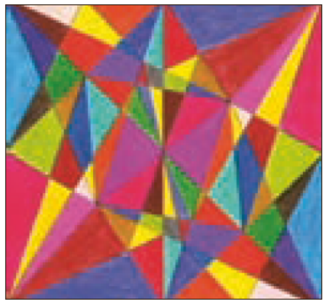
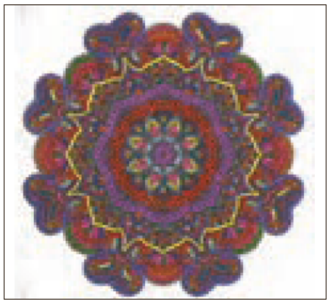
۲ــ دایره $C(O,R)$ و نقطهٔ M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطهٔ M در هر حالت رسم کنید.

الف) $k=۲$ ب) $k=-۲$ پ) $k=\frac{۱}{۲}$



مجله ریاضی

تصاویر زیر، نمونه‌هایی از نقاشی‌های دانش‌آموزان است که استفاده از بازتاب در آن نقشی عمده دارد.

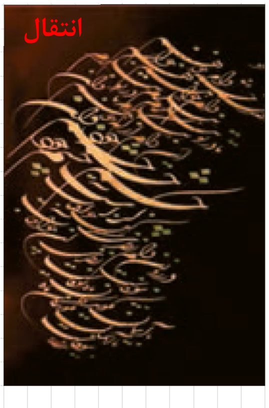
درس دوم

کاربرد تبدیل‌ها

تبدیل‌های هندسی شامل بازتاب، انتقال، دوران و تجانس به طور مستقیم و غیر مستقیم در زندگی واقعی کاربرد دارد؛ برای مثال در سال‌های گذشته با کاربرد برخی تبدیل‌ها در کاشی‌کاری آشنا شدید. آیا می‌توانید با تأمل در محیط اطراف خود به نمونه‌هایی اشاره کنید که تبدیل‌های هندسی در آن به‌کار رفته‌اند؟

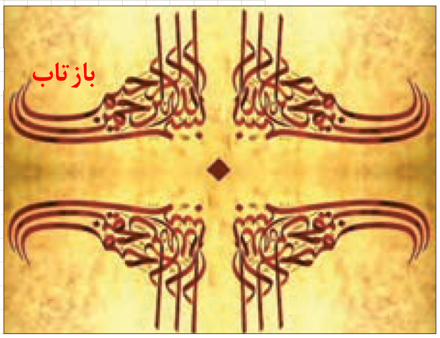
نقش قالی ، خطاطی ، کاغذ دیواری و ....

به این تصاویر دقت کنید. کدام‌یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟



بازتاب

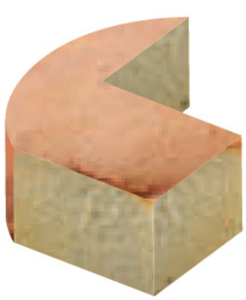
دوران

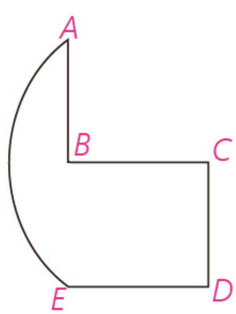


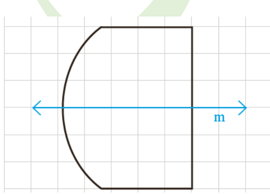
کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینهٔ تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.

۱ــ می‌خواهیم کیکی به شکل زیر را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع BCDE و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری‌که A و B و E روی یک خط هستند.

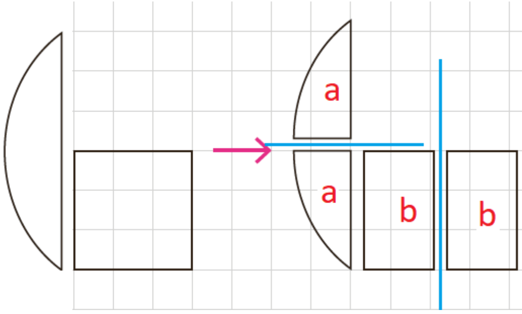






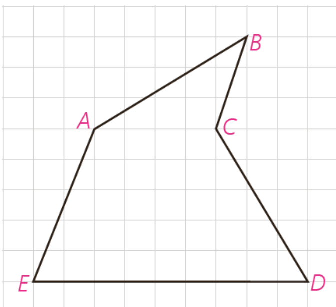
اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کنیم.

این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن کیک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.



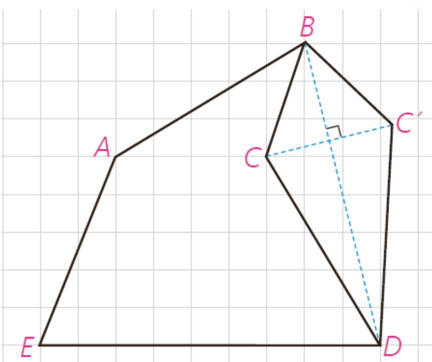
شکل های a نسبت به محور بازتاب قرینه اند پس با هم اندازه اند.
همچنین شکل های b هم نسبت به محور بازتاب خود قرینه اند و در نتیجه هم اندازه اند حالا به ره نفر یک شکل a و یک شکل b می دهیم.

۲ــ یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل **هم‌پیرامونی** یا **هم‌محیطی** معروف‌است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.



برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازهٔ حصارکشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.

به کمک تصویر روبه‌رو توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.



در شکل از نقطهٔ B به D وصل می کنیم. سپس آن را به عنوان محوربازتاب در نظر می گریم . و تصویر نقاط B، C و D را نسبت به این محور به دست می آوریم.
واضح است که تصویر نقاط B و D روی خودشان منطبق است ولی تصویر نقطهٔ C نقطهٔ C' است .

چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC'DE یکی است؟

با توجه به این که بازتاب یک تبدیل طولپا است پس داریم:

$$BC = BC' \ , CD = C'D$$

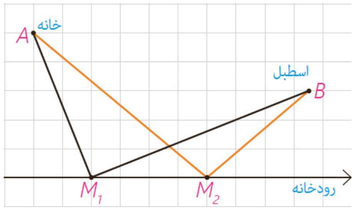
$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA \xrightarrow[CD=C'D]{BC=BC'} P_{ABCDE} = AB + BC + C'D + DE + EA$$

$$\Rightarrow P_{ABCDE} = P_{ABC'DE}$$

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

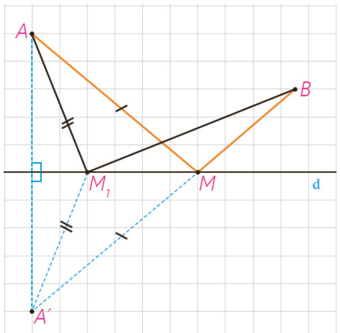
الف) هرون، ریاضی‌دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده‌اند. او که در فاصلهٔ زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می‌کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد.

او با این مسئله روبه‌رو شده بود که :



«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل[1] ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

مسئله، پیدا کردن نقطهٔ M روی خط d است به گونه‌ای که AM+MB کمترین مقدار ممکن باشد.



هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A' نامید. خط فرضی $A'B$ خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و AM+MB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم :

۱ــ برای هر نقطهٔ دلخواه دیگری نظیر $M_۱$ داریم $M_۱A= M_۱A'$ (و به همین ترتیب $AM=A'M$)؛ چرا؟

زیرا با توجه به تعریف بازتاب خط d عمود منصف پاره خط AA' است و نقاط M و $M_۱$ روی این خط هستند. بنا بر خاصیت عمود منصف $AM = A'M$ و $AM_۱ = A'M_۱$.

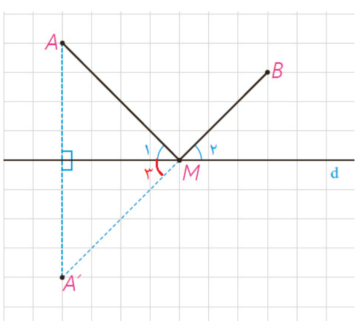
۲ــ در مثلث $A'M_۱B$ داریم $A'M_۱ +M_۱B > A'B$؛ چرا؟

بنابر قضیه نامساوی مثلثی ، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است.

از تساوی $A'B=A'M+MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

$$A'B = A'M + MB \xrightarrow{A'M=AM} \left.\begin{array}{l} A'B = AM + MB \\ A'B < A'M_۱ + M_۱B \end{array}\right\} \Rightarrow AM + MB < A'M_۱ + M_۱B$$

و چون نقطهٔ $M_۱$ دلخواه بود پس ادعای هرون ثابت می شود.



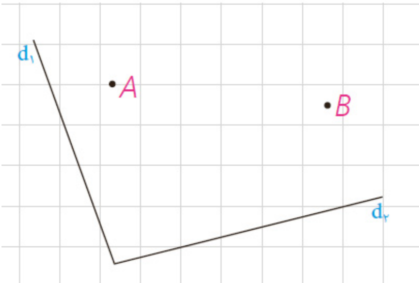
سؤال : در همین مسئله فرض کنید که d یک آینهٔ تخت و A یک نقطهٔ نورانی است. نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطهٔ B می‌گذرد (به عبارتی نشان دهید که $\widehat{M_۱} = \widehat{M_۲}$).

نقطهٔ M روی عمودمنصف AA' است بنا براین $MA = MA'$ پس مثلث MAA' متساوی الساقین است در نتیجه خط d نیمساز زاویهٔ $\widehat{AMA'}$ است.

$$\left.\begin{array}{l} M_۱ = M_۳ \\ M_۳ = M_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow M_۱ = M_۲$$

متقابل به رأس

۱ــ جایی سرپوشیده برای نگهداری چهارپایان به ویژه اسب

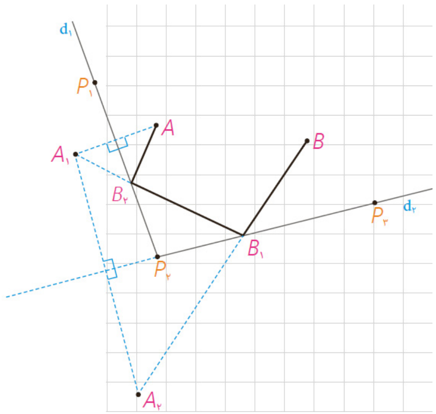


ب) دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند. چگونه می‌توان با طی کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A آغاز به حرکت کرد و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 از نقطهٔ B گذشت؟

حل :

برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر به روش زیر عمل می‌کنیم :

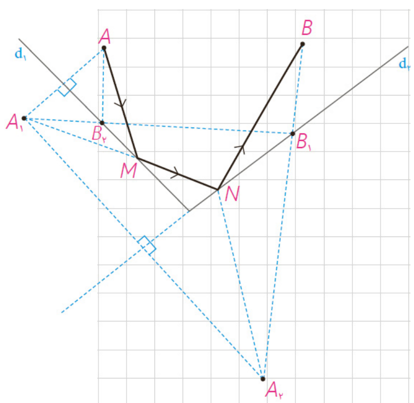
قرینهٔ A را نسبت به خط d_1، نقطهٔ A_1 و قرینهٔ A_1 را نسبت به خط d_2، نقطهٔ A_2 می‌نامیم.



از A_2 به B وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با d_2، B_1 می‌نامیم.

به همین ترتیب از B_1 به A_1 وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با d_1، B_2 می‌نامیم. از A به B_2 وصل می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که مسیر مورد نظر AB_2B_1B است.

تذکر: این مسئله را فقط در حالتی مطرح می‌کنیم که A و A_1 هر دو در یک طرف خط P_2P_3 باشند و پاره‌خط‌های A_2B و P_2P_3 متقاطع باشند.



کافی است نشان دهیم این مسیر از تمام مسیرهای دیگر کوتاه‌تر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که طول این مسیر با طول پاره‌خط A_2B برابر است.

(۱)

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_2 = AB_2 \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 = A_1B_1 \\ A_1B_1 = A_2B_1 \Rightarrow A_1B_1 + B_1B = A_2B \end{array}\right\} \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 + B_1B = A_2B$$

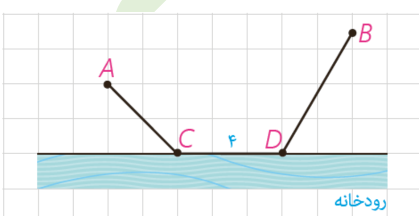
(۲) حال مسیر دلخواه دیگری مانند AMNB را درنظر می‌گیریم؛ داریم :

$$AM = A_1M \Rightarrow AM + MN = A_1N$$

$$A_1N = A_2N \Rightarrow \underbrace{AM+MN}_{A_1N} + NB = A_2N + NB$$

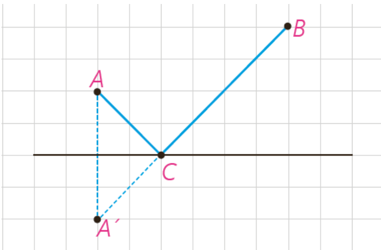
حال با توجه به مثلث BNA_2 داریم :

طول مسیر اول $\boxed{>}$ طول مسیر دوم



پ) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری‌که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

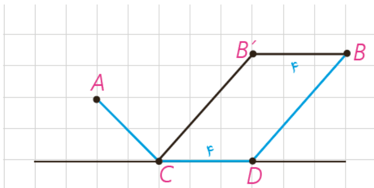
حل : مسئله را در چند مرحله حل می‌کنیم.



۱ــ اگر جادهٔ ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر CD=۰، این مسئله به کدام‌یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده‌اید؟

مسئلهٔ هرون مردی که از رودخانه می خواهد آب بردارد و به اسطبل ببرد.

۲ــ با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسیری به شکل مسیر ACDB باشد؛ اما :

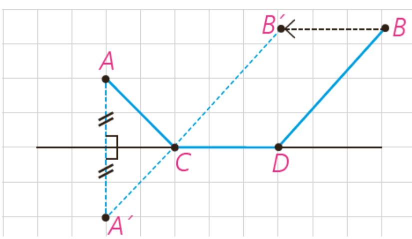


(چرا؟) طول مسیر ACB′B = طول مسیر ACDB

در واقع نقطه ی C تحت بردار انتقالی به طول ۴ به D منتقل شده و نقطهٔ B' نیز تحت همان بردار به B منتقل شده است بنا براین با توجه به خواص تبدیل انتقال چهارضلعی CDBB' متوازی الاضلاع است . پس

$$\text{مسیر } ACDB = AC + CD + DB \xrightarrow[CB'=DB]{CD=B'B} ACDB = AC + CB' + B'B = ACB'B \text{ مسیر}$$

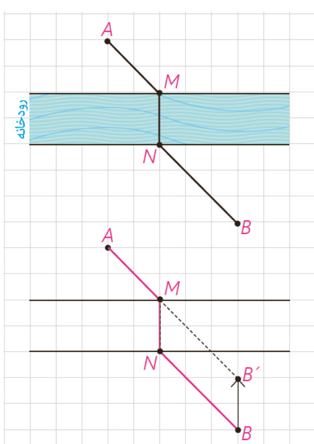
بنابراین : ۴ + طول مسیر ACB′ = طول مسیر ACDB



۳ــ پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن به شکل ACDB مسیر را به گونه‌ای انتخاب کنیم که طول ACB′ کوتاه‌ترین طول ممکن باشد.

۴ــ به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه‌رو توضیح دهید که رسم کوتاه‌ترین مسیر ACDB چگونه است.

ابتدا نقطهٔ B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ و موازی رودخانه ودر جهت شهر A به نقطهٔ B' انتقال می دهیم؛ حالا مسئله شبیه مسئله ی اسطبل می شود . بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط کنار رودخانه به دست می آوریم یعنی نقطهٔ A' سپس از A' به B' وصل می کنیم نقطهٔ C به دست می آید. از نقطهٔ C موازی رودخانه به سمت شهر B و به طول ۴ متر حرکت می کنیم تا نقطهٔ D به دست آید.به این ترتیب کوتاه ترین مسیر رسم می شود.



کاردرکلاس

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری‌که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقهٔ رسم مسیر AMNB را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

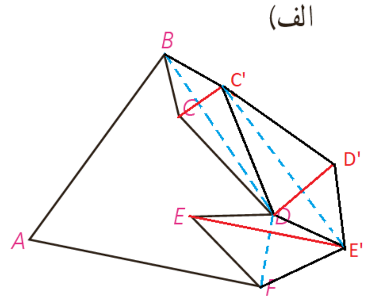
نقطهٔ B را تحت برداری مساوی وعمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطهٔ B' انتقال می دهیم. سپس از B' به A وصل می کنیم . تا نقطهٔ M به دست آید ازنقطهٔ M بر رودخانه عمود می کنیم تا نقطهٔ N به دست آید. به این ترتیب محل احداث پل MN به دست می آید به طوری که مسیر AMNB کوتاه ترین مسیر است. مشابه مسئله ی قسمت (پ) می دانیم که مسیر AMB'B کوتاه ترین است پس :

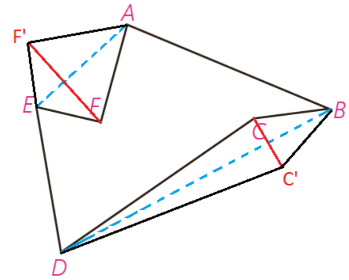
$$AMB'B_{\text{مسیر}} = AM + MB' + BB' \xrightarrow{MB'=NB} AMB'B_{\text{مسیر}} = AM + NB + MN = AMNB_{\text{مسیر}}$$

تمرین

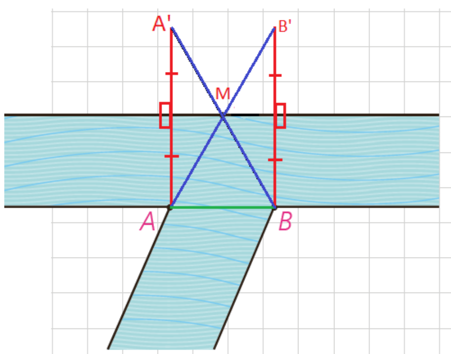
۱ــ دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

الف) ب)



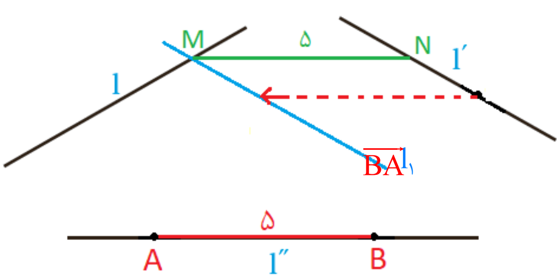


۲ــ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟



با توجه به شکل واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت در نظر گرفته شده است. پس یا از نقطهٔ B یا از A روش هرون را برای پیدا کردن نقطهٔ M اجرا می کنیم.

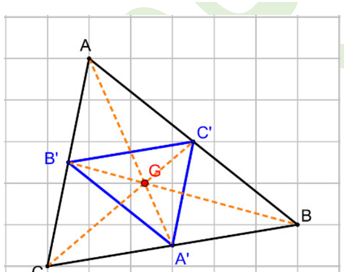
۳ــ سه خط دو به دو ناموازی l و l′ و l″ در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به‌طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l′، و موازی l″ باشد.



ابتدا روی خط l″ پاره خط دلخواه AB به طول ۵ سانتی متر را مشخص می کنیم. خط l′ را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می دهیم تا خط l_1 به دست آید این خط l را در نقطه ای مانند M قطع می کند.از نقطهٔ M موازی خط l″خطی رسم می کنیم تا خط l′ را در نقطهٔ N قطع کند.

پاره خط MN جواب مسئله است .

۴ــ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث A′B′C′ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{1}{2}$ باشد.



الف) جایگاه رأس‌های A′ و B′ و C′ نسبت به مثلث ABC کجاست؟

A′ وسط BC، B′ وسط AC و C′ وسط AB قرار دارند.

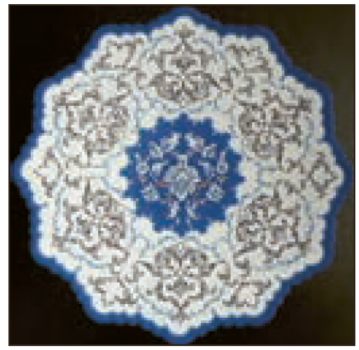
باتوجه به خاصیت مرکز ثقل می دانیم که $GA'=\frac{1}{2}GA$ همچنین نقطهٔ G بین A و A' پس نقطهٔ A' مجانس نقطهٔ A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است . همین مطلب در مورد نقاط B′ و C′ نیز صدق می کند.

ب) مساحت مثلث A′B′C′ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

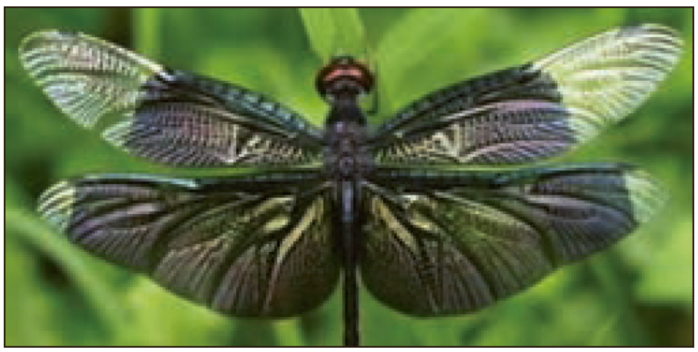
با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث A′B′C′ ، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC است.

مجله ریاضی (خـوانـدنـی)

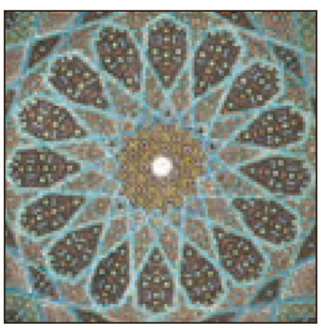
تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی

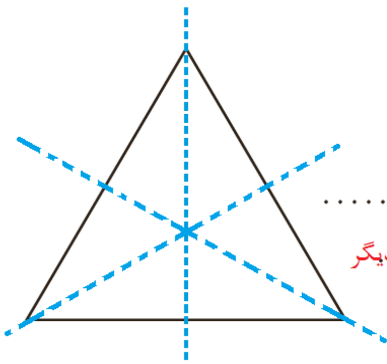






در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این درس تبدیل‌هایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحهٔ بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.





مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید :

الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟. . .خود مثلث است.

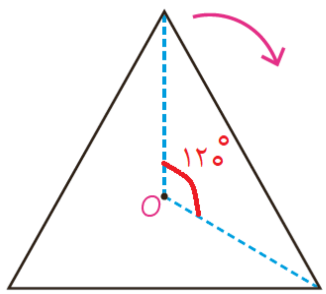
ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟. . .خیر . . .

پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟ . . .بله . . . . .

ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟ . .بله عمودمنصف.دو.ضلع دیگر

این مثلث چند خط بازتاب دارد؟. .سه.تا. .

ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟. . بله.دوران. . .



برای مثال آیا با مرکز O (نقطه همرسی نیمسازها) می‌توانید دوران‌هایی معرفی کنید که شکل را بر خودش منطبق کند؟. . ۱۲۰° . . .

اگر $۰ < \alpha \leq ۳۶۰$ زاویهٔ دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویهٔ α می‌توانید مشخص کنید؟ . .۱۲۰°و. .۲۴۰° و ۳۶۰°

تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)** دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویهٔ $۰ < \alpha \leq ۳۶۰$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن دورانی (چرخشی)** دارد.

همان‌گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می‌توان معرفی کرد که نقاط این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

به عبارتی، تحت این تبدیل‌ها تصویر این مثلث بر خودش منطبق می‌شود؛ چنین تبدیل‌هایی را **تبدیل‌های تقارنی** این مثلث می‌نامیم. در این کتاب برای شناسایی تبدیل‌های تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است.

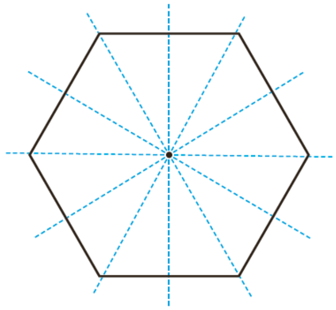
دقت کنید که دوران ۳۶۰°، تبدیل انتقال با بردار صفر و تبدیل تجانس با نسبت تجانس k=۱، هر شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند که پیش از این، آنها را «تبدیل‌های همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیل‌های همانی فقط تبدیل تقارنی به شمار می‌رود.

تعریف: تبدیل طولپای T را **تبدیل تقارنی** شکلF می‌نامیم به شرط اینکه تبدیل‌یافتهٔ شکل F، تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

تعریف: تقارن دورانی با زاویه ۱۸۰° را **تقارن مرکزی** نیز می‌نامند.
در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند.

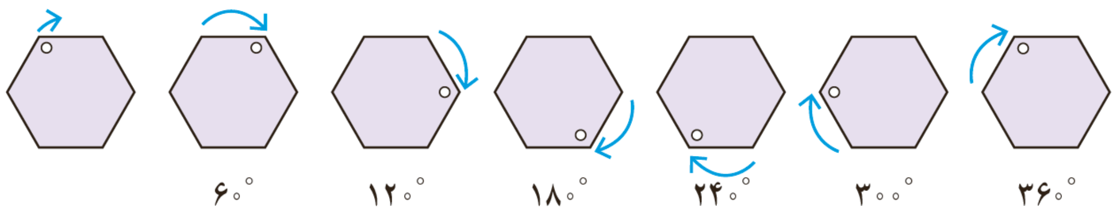
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.



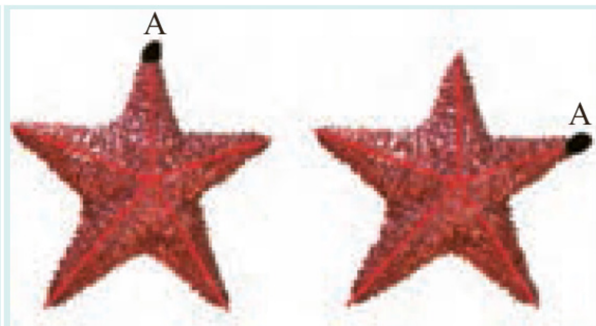
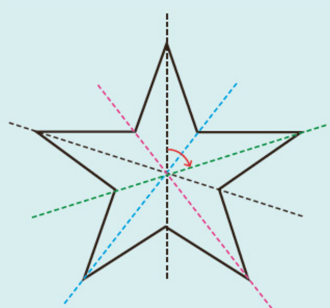
تقارن‌های بازتابی :

تقارن‌های دورانی :



همان‌طور که اشاره شد تقارن دورانی با زاویهٔ °۳۶۰، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس k=۱ تبدیل‌های همانی هستند.

تبدیل‌های همانی را تقارن همانی نیز می‌نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.

		
تقارن‌های دورانی	**تعداد تقارن‌های بازتابی**	**تعداد کل تقارن‌ها**
۷۲°، ۱۴۴، ۲۱۶، ۲۸۸ ، ۳۶۰	....۵ تا....	.....۱۰تا...

تعداد تبدیل‌های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.

الف) پاره‌خط　　　ب) خط　　　پ) دایره

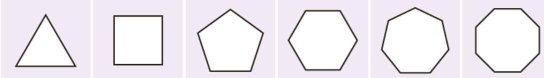
الف) پاره خط دو تقارن دورانی دارد که مرکز آن وسط پاره خط و زاویه های آن °۱۸۰ و °۳۶۰ است. و یک تقارن بازتابی دارد که عمود منصف پاره خط است.

ب) خط بی شمار تقارن دورانی و بی شما ر تقارن بازتابی دارد.

پ) دایره بی شمار تقارن دورانی و بی شمار تقارن بازتابی دارد.

مسائلی برای علاقمندان

۱ــ الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل‌های تقارنی nضلعی منتظم را مشخص کنید.

nضلعی منتظم	n=۳	n =۴	n=۵	n=۶	n=۷	n=۸	...	n
								
تعداد تقارن‌های بازتابی	۳ تا	۴تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۸ تا		nتا
تعداد تقارن‌های دورانی	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۸ تا		nتا
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی	۶ تا	۸تا	۱۰ تا	۱۲ تا	۱۴ تا	۱۶ تا		۲nتا
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟	خیر	بله	خیر	بله	خیر	بله		

ب) nضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

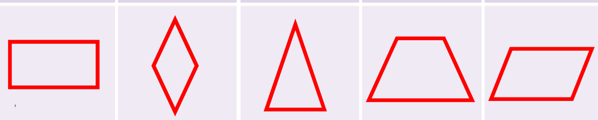
اگر n زوج باشد شکل مرکز تقارن دارد .

پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه‌های دوران در تقارن‌های دورانی یک nضلعی منتظم ارائه کنید.

$$\frac{۳۶۰^\circ}{n}, (\frac{۳۶۰^\circ}{n}\times ۲), (\frac{۳۶۰^\circ}{n}\times ۳), ..., (\frac{۳۶۰^\circ}{n}\times n)$$

۲ــ تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را مشخص کنید و در جدولی بنویسید.

کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

چند ضلعی	مستطیل	لوزی	مثلث متساوی الساقین	ذوزنقه متساوی الساقین	متوازی الاضلاع
					
تعداد تقارن‌های بازتابی	۲ تا	۲ تا	یک	یک	ندارد
تعداد تقارن‌های دورانی	۲ تا	۲ تا	یک	یک	۲ تا
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی	۴ تا	۴ تا	۲ تا	۲ تا	۲ تا
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟	بله	بله	خیر	خیر	بله

محور بازتاب مستطیل عمود منصف های طول و عرض است و مرکز دوران محل برخورد عمودمنصف ها (یا قطر ها) است.

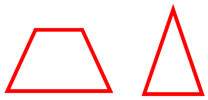
محور بازتاب لوزی قطرهای آن و مرکزدوران محل برخورد قطر ها است.

محور بازتاب مثلث متساوی الساقین عمودمنصف قاعده است و مرکز دوران محل برخورد عمود منصف های سه ضلع است.زاویه دوران ۳۶۰° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

محور بازتاب ذوزنقه متساوی الساقین محل عمود منصف قاعده ها است و مرکز دوران محل برخورد قطر ها است. زاویه دوران ۳۶۰° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

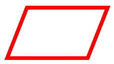
مرکز دوران متوازی الاضلاع محل برخورد قطر های آن است.

۳ــ الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته‌باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).



مثلث و ذوزنقهٔ متساوی الساقین خط بازتاب دارند ، ولی تقارن دورانی غیر همانی ندارند.

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته‌باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).

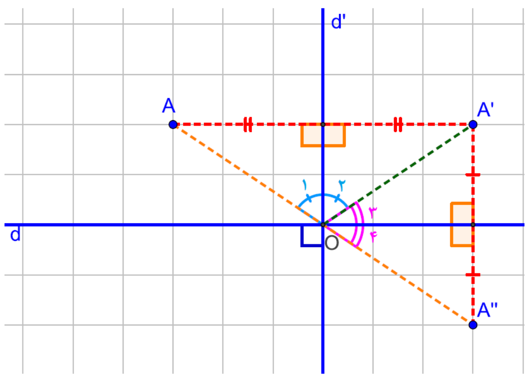


متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد ولی خط بازتاب ندارد.

۴ــ نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

d و d' دو خط بازتاب عمود بر هم هستند و نقطهٔ A یک نقطه ی دلخواه از شکل است.

$$\left.\begin{aligned} S(A)=A' &\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ S(A')=A'' &\Rightarrow \hat{O}_3=\hat{O}_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{AOA''}=\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4=2\hat{O}_2+2\hat{O}_3=2(\underbrace{\hat{O}_2+\hat{O}_3}_{90^\circ}) \Rightarrow \widehat{AOA''}=180^\circ \quad (1)$$



$$\left.\begin{aligned} S(A)=A' &\Rightarrow OA=OA' \\ S(A')=A'' &\Rightarrow OA'=OA'' \end{aligned}\right\} \Rightarrow OA=OA'' \quad (2)$$

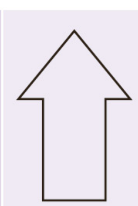
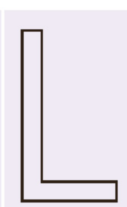
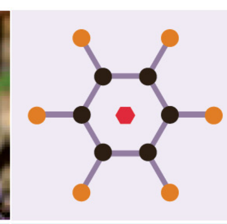
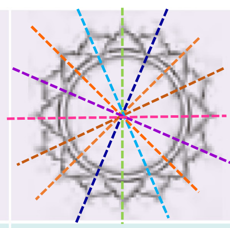
از (۱) و (۲) نتیجه می گریم که نقطهٔ O مرکز دوران به زاویه 180° است.

با توجه به جدول سؤال قبل مستطیل و لوزی همین خاصیت را دارند.

اما سؤال این است که آیا اگر شکلی مرکز تقارن داشته باشد حتماً دو محور بازتاب عمود برهم دارد؟ پاسخ با یک مثال نقض داده می شود

متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد یعنی یک دوران با زاویه 180° اما محور بازتاب ندارد.

۵ــ جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی	یک	ندارد	۳ تا	۶ تا	۸ تا
تقارن دورانی	یک	یک	۳ تا	۶ تا	۸ تا
تعداد تبدیل‌های تقارنی	۲ تا	یک	۶ تا	۱۲ تا	۱۶ تا