

بنا م خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

# آمار و احتمال

پایه یازدهم ریاضی و فیزیک

## فصل ۳



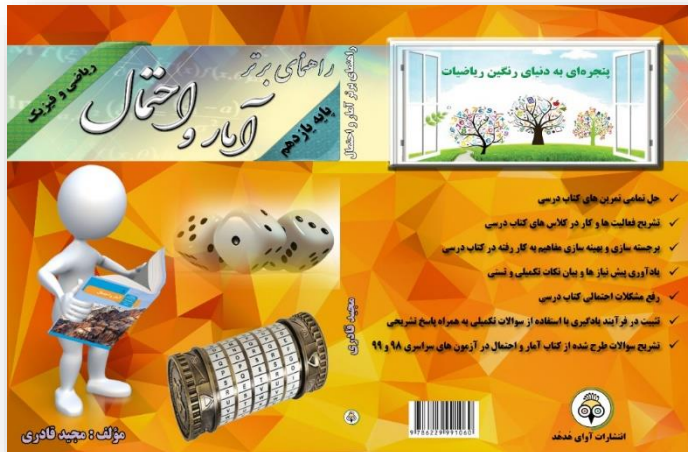
توصیف و نمایش داده ها



معیارهای گرایش به مرکز



معیارهای پراکندگی



@MATHCLASS2



Majid.ghaderi.mathclass.2



m.ghaderi.5165@gmail.com



09177635165

## معیارهای پراکندگی

فصل ۳

درس ۳

### اهداف

- آشنایی با مفهوم دامنه تغییرات
- آشنایی با مفهوم انحراف معیار و واریانس
- آشنایی با طریقه استفاده از انحراف معیار و واریانس
- درک مفهوم انحراف معیار و روش محاسبه آن
- آشنایی با مفهوم دامنه میان چارکی و روش محاسبه آن
- آشنایی با روش رسم نمودار جعبه ای

## معیارهای پراکندگی (Measures of dispersion)

معیارهای پراکندگی میزان پراکندگی یا تغییراتی که در بین داده های یک توزیع وجود دارد را نشان می دهند و برای توصیف پراکندگی داده هایی که به صورت کمی مطرح می شوند ضروری هستند.

(۱) دامنه تغییرات ( $R$ )

(۲) دامنه میان چارکی ( $IQR$ )

(۳) واریانس ( $Var$ )

(۴) انحراف معیار ( $\sigma$ )

(۵) ضریب تغییرات ( $C.V$ )

معیارهایی که در این درس می خوانیم شامل :

## دامنه تغییرات (Range)

اختلاف بین بزرگترین ( $x_{max}$ ) و کوچکترین داده ( $x_{min}$ ) را نشان می دهد و با  $R$  نشان داده می شود.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

دامنه تغییرات ساده ترین شاخص پراکندگی است.

مقدار دامنه تغییرات با تغییر تعداد و مقدار داده های میانی، تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده ها باشد.

### تمرین تکمیلی

سوال ۱: دامنه تغییرات داده های زیر را به دست آورید.

۵, ۱۸, ۸, ۱۷, ۱۴, ۱۰

$$R = 18 - 5 = 13$$

## تمرین تکمیلی

سوال ۲: نمره درس آمار دانش آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است:

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲

$$Q_2 = 10$$

۰, ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰

$$Q_2 = 10$$

الف) میانه نمره این دو کلاس را محاسبه کنید.

ب) میانگین نمره این دو کلاس را محاسبه کنید.

$$\bar{x}_A = \frac{8 + 9 + 10 + 11 + 12}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\bar{x}_B = \frac{0 + 5 + 10 + 15 + 20}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

پ) به نظر شما یک معلم آمار ترجیح می دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

$$R_A = 12 - 8 = 4$$

$$R_B = 20 - 0 = 20$$

کلاس A زیرا پراکندگی نمرات در آن کمتر است.

پراکندگی بیشتر برابر است با ریسک بالاتر

## ویژگی های دامنه تغییرات

۱) دامنه تغییرات ساده ترین شاخص پراکندگی است.

۲) تحت تاثیر دو عدد اول و آخر توزیع یعنی همان بزرگترین و کوچکترین داده است.

۳) اگر همه داده ها با هم برابر باشند، دامنه تغییرات برابر صفر می شود. همچنین، اگر دامنه تغییرات برابر صفر باشد، همه داده ها با هم برابر هستند.

۴) اگر همه داده های آماری با عددی جمع یا تفریق شوند، دامنه تغییرات تغییری نمی کند.

۵) اگر همه داده های آماری در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند؛ دامنه تغییرات، در **قدر مطلق** آن عدد ضرب یا بر **قدر مطلق** آن عدد تقسیم می شود.

## تمرین تکمیلی

سوال ۳: آزمون میان ترم درس آمار، در مقیاس ۲۰ نمره برگزار شده است. بیشترین نمره ۱۹ و نیز دامنه تغییرات ۵ می باشد. معلم کلاس تصمیم گرفته به هر دانش آموز یک نمره اضافه کند. کمترین نمره ای که در لیست نمرات وارد می شود، چه نمره ای است؟

$$R = x_{max} - x_{min} \Rightarrow x_{min} = 20 - 5 = 15$$

## تمرین تکمیلی

سوال ۴: آزمون درس آمار، در مقیاس ۱۰ نمره برگزار شده است. بیشترین نمره ۹ و نیز دامنه تغییرات ۴ می باشد. کمترین نمره ای که در لیست نمرات در مقیاس ۲۰ نمره وارد می شود، چه نمره ای است؟

$$R = x_{max} - x_{min} \Rightarrow x_{min} = 18 - 8 = 10$$

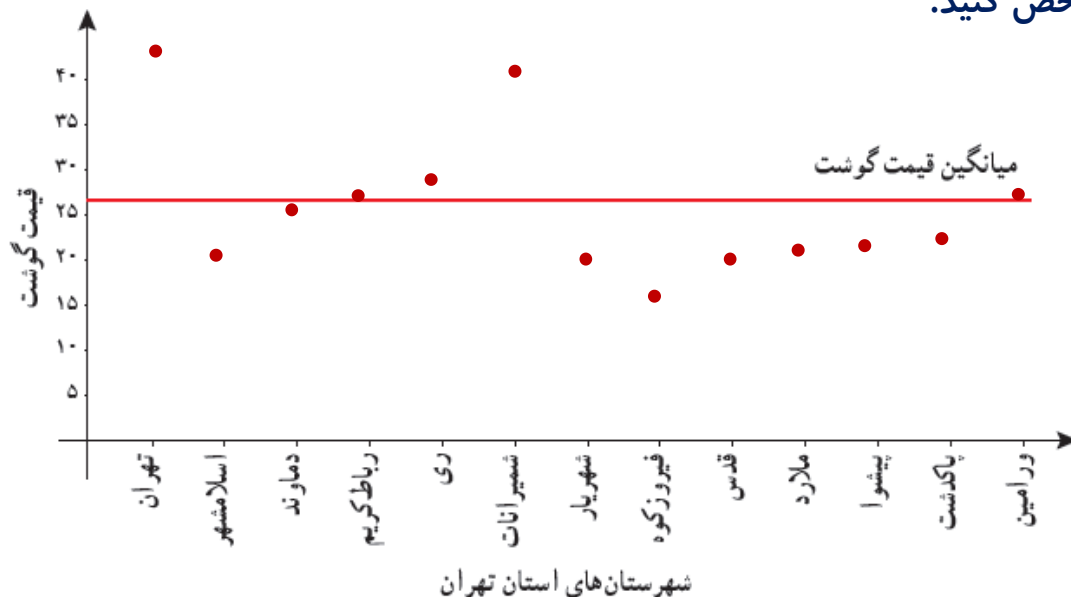
## فعالیت صفحه ۹۳ و ۹۴ کتاب درسی

در جدول مقابل قیمت گوشت قرمز در سال ۱۳۹۵ در شهرستان های استان تهران گردآوری شده است.

میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان های استان تهران را به دست آورید؟

$$\bar{x} = \frac{328}{13} \approx 25/23$$

در نمودار زیر، میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان های استان تهران نشان داده شده است. قیمت گوشت قرمز در هر یک از شهرستان های استان تهران را با کشیدن نقطه روی نمودار مشخص کنید.





## فعالیت صفحه ۹۳ و ۹۴ کتاب درسی

۱) چند نقطه بالای خط قرمز، چند نقطه پایین خط قرمز و چند نقطه روی خط قرمز قرار دارند؟

۵ نقطه بالا و ۸ نقطه پایین خط قرمز قرار دارند.

۲) منظور از پراکندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. هر چقدر نقاط یا همان قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان های استان تهران حول خط قرمز یا همان میانگین قیمت گوشت قرمز نزدیک تر باشند، نشان دهنده چیست؟

یک دست بودن قیمت ها

هرچقدر دورتر باشند چطور؟

پراکندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است.

۳) معیاری را برای اندازه گیری پراکندگی قیمت گوشت قرمز یا همان نقاط حول خط قرمز می توانید معرفی کنید؟

واریانس و انحراف معیار

صفحه ۹۴ کتاب درسی

## واریانس یا پراش (*Variance*)

میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین آنها را **واریانس** می نامند و از نماد  $\sigma^2$  یا  $Var$  برای نمایش آن استفاده می شود.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

به عبارتی دیگر باید ابتدا میانگین داده ها را محاسبه کنید سپس اختلاف هر عدد با میانگین داده ها را حساب کنید، به توان ۲ برسانید؛ و در نهایت میانگین اعداد حاصل را به دست آورید.

## تمرین تکمیلی

سوال ۵: واریانس داده های ۲، ۴، ۹، ۵ را محاسبه کنید.

$$\bar{x} = \frac{۲ + ۴ + ۵ + ۹}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(۲ - ۵)^2 + (۴ - ۵)^2 + (۵ - ۵)^2 + (۹ - ۵)^2}{۴}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-۳)^2 + (-۱)^2 + (۰)^2 + (۴)^2}{۴}$$

$$\sigma^2 = \frac{۹ + ۱ + ۰ + ۱۶}{۴} = \frac{۲۶}{۴} = ۶/۵$$

تمرین تکمیلی

سوال ۶: نمره درس آمار دانش آموزان دو کلاس A و B،

به تفکیک گزارش شده است:

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

واریانس نمرات درس آمار دانش آموزان دو کلاس A و B، را با تکمیل جداول زیر بدست آورید.

کلاس A		
$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۸	$۸ - ۱۰ = -۲$	۴
۹	$۹ - ۱۰ = -۱$	۱
۱۰	$۱۰ - ۱۰ = ۰$	۰
۱۱	$۱۱ - ۱۰ = ۱$	۱
۱۲	$۱۲ - ۱۰ = ۲$	۴
مجموع	۰	۱۰

کلاس B		
$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۰	$۰ - ۱۰ = -۱۰$	۱۰۰
۵	$۵ - ۱۰ = -۵$	۲۵
۱۰	$۱۰ - ۱۰ = ۰$	۰
۱۵	$۱۵ - ۱۰ = ۵$	۲۵
۲۰	$۲۰ - ۱۰ = ۱۰$	۱۰۰
مجموع	۰	۲۵۰

$$\sigma^2 = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

پراکندگی نمرات در کلاس B خیلی بیشتر از کلاس A است.

$$\sigma^2 = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$$

مجموع اختلافات از میانگین همواره باید صفر باشد.

دقت کنید

## ویژگی های واریانس

(۱) هر چه واریانس به صفر نزدیکتر باشد، پراکندگی بین داده ها کمتر خواهد بود.

(۲) اگر تمام داده های آماری یکسان باشند، واریانس برابر صفر است و برعکس یعنی اگر واریانس برابر صفر باشد، تمام داده ها برابر هستند.

(۳) اگر همه داده های آماری را با عددی جمع یا تفریق کنیم، واریانس تغییر نمی کند.

(۴) اگر همه داده های آماری را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنیم؛ واریانس در مجذور آن عدد ضرب، یا بر مجذور آن عدد تقسیم می شود.

(۵) اگر واریانس داده های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر  $\sigma^2$  باشد، واریانس داده های  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$  برابر  $a^2 \sigma^2$  خواهد شد.

(۶) واحد واریانس برابر با توان دوم واحد داده مورد نظر (متغیر) است.

به عنوان مثال: اگر واحد متغیر سانتی‌متر باشد، واحد واریانس سانتی‌متر مربع خواهد بود.

(۷) داده های دورافتاده در آن تاثیر گذار هستند.

(۸) اگر داده های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  بدهند، آنگاه واریانس برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{d^2(n^2 - 1)}{12}$$

## تمرین تکمیلی

**سوال ۷:** دبیر درس ریاضی، آزمونی را در مقیاس ۱۰ نمره برگزار کرده است. سپس او به ۲ برابر نمرات یک نمره اضافه و وارد لیست نمرات می کند. حداکثر نمره وارد شده در لیست ۸ می باشد. اگر واریانس نمرات وارد شده در لیست، ۸ باشد. واریانس نمرات اولیه دانش آموزان چند بوده است؟

داده ها دو برابر شده و یک واحد اضافه شده اند پس نتیجه می شود که واریانس آنها ۴ برابر شده است. چون واریانس نمرات درون لیست برابر ۸ است پس نتیجه می شود واریانس نمرات اولیه ۸ تقسیم بر ۴ یعنی ۲ بوده است.

صفحه ۹۴ کتاب درسی

## انحراف معیار (Standard Deviation)

به جذر واریانس؛ **انحراف معیار** می گویند و از نماد  $\sigma$  برای نمایش آن استفاده می شود.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{n}}$$

به عبارتی دیگر باید اختلاف هر عدد با میانگین داده ها را حساب کنید، به توان ۲ برسانید؛ سپس میانگین اعداد حاصل را به دست آورید و در نهایت از آن جذر بگیرید.

به بیان دیگر، در تفسیر داده ها معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می خواهیم، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز داریم، که همان **انحراف معیار** است.

اگر انحراف معیار مجموعه داده ها عدد کوچکی باشد، بدین معناست که پراکندگی داده ها حول میانگینشان کم و در نتیجه داده ها به هم نزدیک تر هستند و اگر انحراف معیار مجموعه داده ها عددی بزرگ باشد، بدین معناست که پراکندگی داده ها حول میانگینشان زیاد و در نتیجه داده ها از هم دورتر هستند.

## کار در کلاس صفحه ۹۵ کتاب درسی

$(x_i - \bar{x})^2$	$x_i - \bar{x}$	قیمت گوشت قرمز
۲۸۱/۲۳	$۴۲ - ۲۵/۲۳ = ۱۶/۷۷$	۴۲
۲۷/۳۵	$۲۰ - ۲۵/۲۳ = -۵/۲۳$	۲۰
۰/۰۵	$۲۵ - ۲۵/۲۳ = -۰/۲۳$	۲۵
۰/۵۶	$۲۶ - ۲۵/۲۳ = ۰/۷۷$	۲۶
۳/۱۳	$۲۷ - ۲۵/۲۳ = ۱/۷۷$	۲۷
۲۱۸/۱۵	$۴۰ - ۲۵/۲۳ = ۱۴/۷۷$	۴۰
۲۷/۳۵	$۲۰ - ۲۵/۲۳ = -۵/۲۳$	۲۰
۸۵/۱۹	$۱۶ - ۲۵/۲۳ = -۹/۲۳$	۱۶
۲۷/۳۵	$۲۰ - ۲۵/۲۳ = -۵/۲۳$	۲۰
۱۷/۸۹	$۲۱ - ۲۵/۲۳ = -۴/۲۳$	۲۱
۱۰/۴۳	$۲۲ - ۲۵/۲۳ = -۳/۲۳$	۲۲
۴/۹۷	$۲۳ - ۲۵/۲۳ = -۲/۲۳$	۲۳
۰/۵۶	$۲۶ - ۲۵/۲۳ = ۰/۷۷$	۲۶
۱۲۴۸/۰۶	.	مجموع

انحراف معیار و واریانس مربوط به داده های قیمت گوشت قرمز در شهرستان های تهران را می توانید با تکمیل جدول روبه رو محاسبه کنید.

$$\bar{x} = \frac{۳۲۸}{۱۳} \cong ۲۵/۲۳$$

$$\sigma^2 = \frac{۷۰۴/۲۱}{۱۳} = ۵۴/۱۷$$

$$\sigma = \sqrt{۵۴/۱۷} \cong ۷/۳۶$$



## ویژگی های انحراف معیار

(۱) اگر همه داده های آماری یکسان باشند، انحراف معیار برابر صفر است و برعکس، یعنی اگر انحراف معیار برابر صفر باشد، تمام داده ها با یکدیگر برابر هستند.

(۲) اگر همه داده های آماری را با عددی جمع یا تفریق کنیم، انحراف معیار تغییر نمی کند.

(۳) اگر همه داده های آماری را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنیم؛ انحراف معیار در اندازه (قدرمطلق) آن عدد ضرب، یا بر اندازه آن عدد تقسیم می شود.

(۴) اگر انحراف معیار داده های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر  $\sigma$  باشد، انحراف معیار داده های  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$  برابر  $|a|\sigma$  خواهد شد.

(۵) واحد انحراف معیار از نوع واحد داده مورد نظر (متغیر) است.

به عنوان مثال: اگر واحد متغیر سانتی متر باشد، واحد انحراف معیار نیز سانتی متر خواهد بود.

(۶) داده های دورافتاده در آن تاثیر گذارند.

## تمرین تکمیلی

سوال ۸: دبیر درس ریاضی، آزمونی را در مقیاس ۰ انمره برگزار کرده است. سپس او به ۲ برابر نمرات ۲ نمره اضافه و وارد لیست نمرات می کند. حداکثر نمره وارد شده در لیست ۲۰ می باشد. اگر واریانس نمرات وارد شده در لیست، ۲۵ باشد. انحراف معیار نمرات اولیه دانش آموزان چند بوده است؟

داده ها دو برابر شده و ۲ واحد اضافه شده اند پس نتیجه می شود که انحراف معیار ۲ برابر شده است. چون واریانس نمرات درون لیست برابر ۲۵ است پس انحراف معیار نمرات درون لیست برابر ۵ می شود. پس نتیجه می شود که انحراف معیار نمرات اولیه ۵ تقسیم بر ۲ یعنی ۲٫۵ بوده است.

صفحه ۹۶ کتاب درسی

## ضریب تغییرات (Coefficient of variation)

یکی از شاخص های پراکندگی که فقط برای داده های مثبت تعریف می شود و از تقسیم انحراف معیار بر

میانگین به دست می آید، ضریب تغییرات نام دارد و آن را با  $C.V$  نشان می دهند.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

فقط برای داده های مثبت تعریف می شود.

هر قدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده ها کمتر خواهد شد که این موضوع برای ما مطلوب است.

تمرین تکمیلی

سوال ۹: ضریب تغییرات داده های زیر را به دست آورید.

۲، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۵، ۵، ۵، ۵، ۶، ۸

$$\bar{x} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{4(2-4)^2 + 2(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + (6-4)^2 + (8-4)^2}{12} = \frac{42}{12} = 3.5$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{3.5} = 1.87$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow C.V = \frac{1.87}{4} = 0.4675$$

## فعالیت صفحه ۹۶ کتاب درسی

براساس داده های به دست آمده میانگین طول عمر لاستیک ها در دو کارخانه و انحراف معیار آنها به شرح جدول روبه رو است:

انحراف معیار	میانگین	کارخانه
۵۰ کیلومتر	۵۴۰۰۰ کیلومتر	کارخانه الف
۱۰۰ کیلومتر	۶۵۰۰۰ کیلومتر	کارخانه ب

۱) شما ترجیح می دهید از کدام کارخانه لاستیک بخرید؟ **کارخانه الف**

۲) آیا می توان براساس میانگین و انحراف معیار و نمونه های در نظر گرفته شده قضاوت کرد؟

$$\text{کارخانه الف} \quad C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow C.V = \frac{50}{54000} = 0.0009$$

$$\text{کارخانه ب} \quad C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow C.V = \frac{100}{65000} = 0.0015$$

## کار در کلاس صفحه ۹۷ کتاب درسی

الف) با کامل کردن جدول زیر، ضریب تغییرات مربوط به طول عمر لاستیک ها در دو کارخانه را محاسبه کنید.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه الف	۵۴۰۰۰ کیلومتر	۵۰ کیلومتر	۰/۰۰۰۹
کارخانه ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	۰/۰۰۱۵

ب) حال با تغییر واحد اندازه گیری در جدول قبلی میانگین و انحراف معیار طول عمر لاستیک ها در دو کارخانه «الف» و «ب» به صورت زیر گزارش داده شده است.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه الف	۵۴۰۰۰۰۰۰ متر	۵۰۰۰۰ متر	۰/۰۰۰۹
کارخانه ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	۰/۰۰۱۵

همان طور که ملاحظه می کنید میانگین و انحراف معیار لاستیک ها برای کارخانه «الف» بر حسب واحد اندازه گیری متر و برای کارخانه «ب» بر حسب کیلومتر است. در این حالت نیز ضریب تغییرات را در جدول زیر محاسبه کنید.

آیا ضریب تغییرات به واحد اندازه گیری وابسته است؟ **مخیر**

## تمرین تکمیلی

**سوال ۱:** موجودی حساب پس انداز علی و محمد و امید در ابتدای یک سال به ترتیب  $A$ ،  $B$  و  $C$  ریال است.  $A$ ،  $B$  و  $C$  دو به دو متمایزند. اگر این سه نفر ماهانه صد هزار تومان به حساب خود واریز کرده و هیچ مبلغی برداشت نکنند، ضریب تغییرات موجودی های آنها در پایان سال نسبت به ابتدای سال چه تغییری خواهد کرد؟ افزایش می یابد یا کاهش؟ چرا؟

کاهش می یابد. زیرا، با اضافه کردن یک مقدار مثبت به همه داده ها، انحراف معیار تغییری نمی کند؛ اما، آن مقدار مثبت به میانگین اضافه می شود، در نتیجه نسبت انحراف معیار به میانگین کاهش می یابد.

## ویژگی های ضریب تغییرات

۱) ضریب تغییرات فقط برای داده های مثبت استفاده می شود.

۲) تغییرات را به نسبت میانگین می سنجد.

۳) ضریب تغییرات، تنها شاخص پراکندگی بدون واحد است. بنابراین، برای مقایسه پراکندگی بین دو جامعه آماری متفاوت که واحد سنجش متغیر آنها یکسان نیست، از ضریب تغییرات استفاده می کنیم.

۴) اگر همه داده های آماری با هم برابر باشند، ضریب تغییرات برابر صفر است و برعکس یعنی اگر ضریب تغییرات برابر صفر باشد، تمام داده های آماری با هم برابر هستند.

۵) اگر همه داده های آماری را در یک عدد مثبت ضرب و یا بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم، ضریب تغییرات تغییری نمی کند.

۶) اگر به همه داده ها یک مقدار مثبت اضافه کنیم، ضریب تغییرات کوچک می شود. زیرا، با اضافه کردن یک مقدار مثبت به همه داده ها، انحراف معیار تغییری نمی کند؛ اما، آن مقدار مثبت به میانگین اضافه می شود.

## تمرین تکمیلی

سوال ۱۱: فرض کنید درآمد ماهانه حضار در انجمن یک باشگاه ورزشی در سال جاری به صورت زیر باشد:

محمدی	گلشن	احمدی	قادری	درویشی	عادلی	فخاری	درآمد (میلیون ریال)
۲۵	۲۲	۳۰	۳۲	۲۸	۱۲	۴۰	

الف) انحراف معیار درآمد اعضاء را محاسبه کنید.

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۴۰	۱۳	۱۶۹
۱۲	-۱۵	۲۲۵
۲۸	۱	۱
۳۲	۵	۲۵
۳۰	۳	۹
۲۲	-۵	۲۵
۲۵	-۲	۴
مجموع	۰	۴۵۸

$$\bar{x} = \frac{189}{7} = 27$$

$$\sigma^2 = \frac{458}{7} \cong 65.43$$

$$\sigma = \sqrt{65.43} \cong 8.08$$



تمرین تکمیلی

ب) اگر یک میلیارد در با درآمد ماهانه یک میلیارد ریال، به عضویت انجمن باشگاه درآید، انحراف معیار درآمد حضار چه تغییری می کند؟ (بیشتر مردم به او ثروتمند می گویند و آمارشناسان او را داده دور افتاده می نامند). انحراف معیار درآمد اعضاء را محاسبه کنید.

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۴۰	-۱۰۸/۶۲۵	۱۱۷۹۹/۴
۱۲	-۱۳۶/۶۲۵	۱۸۶۶۶/۴
۲۸	-۱۲۰/۶۲۵	۱۴۵۵۰/۴
۳۲	-۱۱۶/۶۲۵	۱۳۶۰۱/۴
۳۰	-۱۱۸/۶۲۵	۱۴۰۷۱/۹
۲۲	-۱۲۶/۶۲۵	۱۶۰۳۳/۹
۲۵	-۱۲۳/۶۲۵	۱۵۲۸۳/۱۴
۱۰۰۰	۸۵۱/۳۷۵	۷۲۴۸۳۹/۴
مجموع	.	۸۲۸۸۴۵

$$\bar{x} = \frac{1189}{8} = 148.625$$

$$\sigma^2 = \frac{828845}{8} \cong 103605.625$$

$$\sigma = \sqrt{103605.625} \cong 321.88$$

خیلی زیاده !! چه کنیم؟  

زمانی که با داده دورافتاده مواجه ایم، معیار پراکندگی که تعریف می شود، انحراف معیار نیست.

از چه معیاری استفاده می شود؟؟؟

معیار مورد استفاده را دامنه میان چارکی می نامیم و با  $IQR$  نشان می دهیم.

## دامنه میان چارکی یا انحراف چارکی (IQR)

اگر برای داده های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم، چارک اول یا  $Q_1$  را یافته ایم و به همین صورت میانه داده های بعد از میانه، چارک سوم یا  $Q_3$  خواهد بود.

دامنه میان چارکی برابر است با تفاضل چارک اول از چارک سوم است.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

داده های دور افتاده در آن تاثیری ندارند به همین علت کارایی بیشتری نسبت به دامنه تغییرات دارد.

### تمرین تکمیلی

سوال ۱۲: دامنه میان چارکی داده های زیر را تعیین کنید.

۱، ۲، ۲، ۳، ۴، ۵، ۵، ۸، ۸، ۱۰، ۱۳، ۱۳، ۱۵

$$Q_1 = \frac{2 + 3}{2} = 2.5$$

$$Q_2 = 5$$

$$Q_3 = \frac{10 + 13}{2} = 11.5$$

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

$$IQR = 11.5 - 2.5 = 9$$

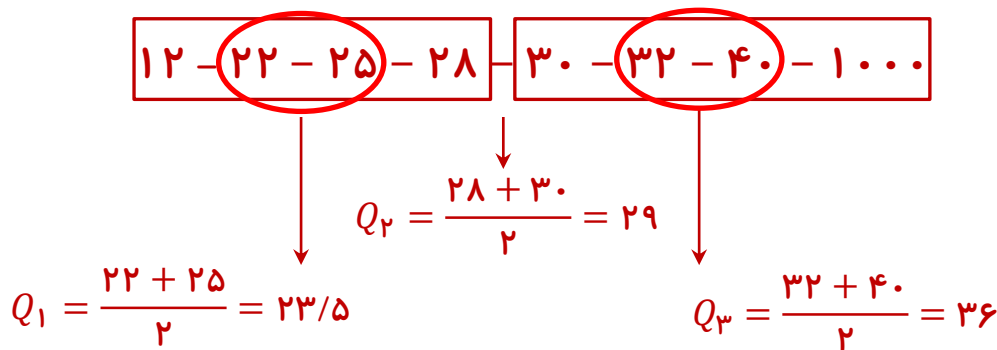
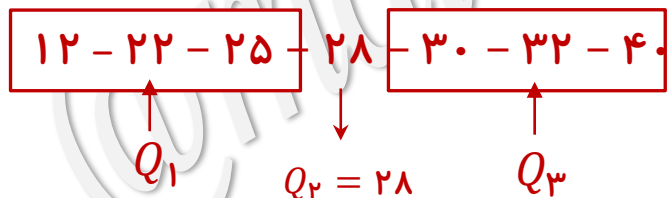
تمرین تکمیلی

سوال ۱۳: فرض کنید درآمد ماهانه حضار در انجمن یک باشگاه ورزشی در سال جاری به صورت زیر باشد:

محمدی	گلشن	احمدی	قادری	درویشی	عادلی	فخاری	درآمد (میلیون ریال)
۲۵	۲۲	۳۰	۳۲	۲۸	۱۲	۴۰	

اگر یک میلیارد در با درآمد ماهانه یک میلیارد ریال، به عضویت انجمن باشگاه درآمد، دامنه میان چارکی درآمد حضار چه تغییری می کند؟

$IQR$	$Q_3$	$Q_2$	$Q_1$	
۱۰	۳۲	۲۸	۲۲	درآمد ماهانه اعضای انجمن
۱۲/۵	۳۶	۲۹	۲۳/۵	درآمد ماهانه اعضای انجمن بعد از ورود میلیارد



## تمرین تکمیلی

سوال ۱۴: دو دسته داده زیر، قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه بر حسب هزار ریال نشان می دهد.

۸	۱۳	۹	۱۲	۱۰	۱۱	۱۲	۹	۱۰	۱۱	۱۰	بازار الف
۱۰	۱۳	۸	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱	۹	۱۰	بازار ب

$$\begin{array}{c}
 \boxed{8 - 9 - 9 - 10 - 10} - 10 - \boxed{11 - 11 - 12 - 12 - 13} \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 Q_1 = 9 \qquad \qquad \qquad Q_3 = 12
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{8 - 9 - 9 - 10 - 10} - 10 - \boxed{10 - 10 - 11 - 11 - 13} \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 Q_1 = 9 \qquad \qquad \qquad Q_3 = 11
 \end{array}$$

الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟

بازار الف :  $IQR = 12 - 9 = 3$

بازار ب :  $IQR = 11 - 9 = 2$

بازار «الف» پراکندگی بیشتری دارد

ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.

بازار الف :  $R = 13 - 8 = 5$

بازار ب :  $R = 13 - 8 = 5$

در این حالت دامنه تغییرات پراکندگی را یکسان نشان می دهد.

پ) ترجیح می دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟

«بازار ب» پراکندگی کمتری دارد؛ بنابراین خرید از این بازار را ترجیح می دهیم.

صفحه ۹۷ و ۹۸ کتاب درسی

## نمودار جعبه‌ای (Box plot)

نمودار جعبه‌ای نموداری است که برای توصیف تغییرات داده به کار می‌رود. این نمودار روشی مناسب برای نمایش دامنه‌ها (دامنه متغیر، دامنه میان چارکی) و میانه می باشد و پراکندگی داده‌ها از روی آن بهتر بررسی می‌شود.

در یک نمودار جعبه‌ای می‌توان بیش از یک مجموعه داده را نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

## روش ترسیم نمودار

برای این منظور، کمترین مقدار و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهید. سپس چارک اول، میانه و چارک سوم را محاسبه کنید و آنها را با کشیدن خط با طول دلخواه روی یک محور نمایش دهید.

برای مشخص کردن حدود دامنه میان چارکی، با وصل کردن خطوط نشانگر چارک‌ها یک جعبه رسم می‌کنیم.

برای مشخص کردن دامنه دو خط (سیل نمودار)، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم.



فعالیت صفحه ۹۷ کتاب درسی

میزان بارش برف سالانه در دو پیست اسکی «الف» و «ب» برای هفت سال اندازه گیری و نتایج، در جدول زیر گردآوری شده است:

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸
میزان بارش در پیست الف	۸۲۵	۷۲۸	۴۷۲	۷۸۷	۳۳۵	۱۹۰	۵۵۱
میزان بارش در پیست ب	۵۶۶	۵۸۱	۹۳	۱۰۱۶	۵۲۵	۰	۲۷۱

عدد صفر در جدول به این معناست که میزان بارش کمتر از اسانتی متر است.

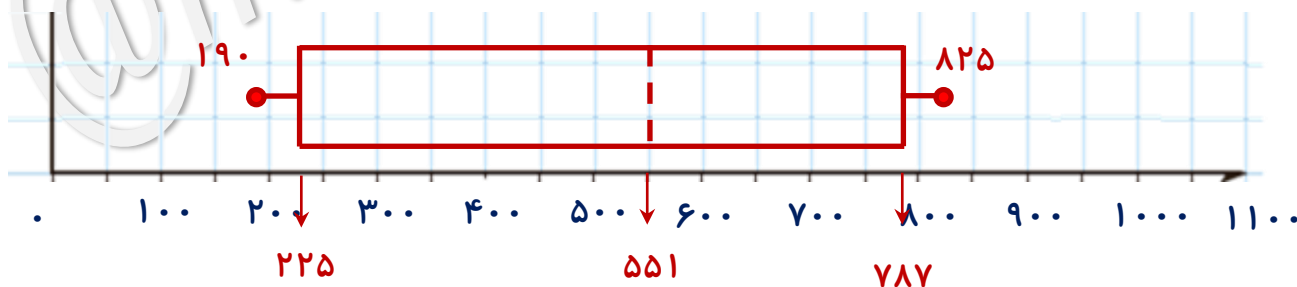
برای رسم نمودار آماری پیست «الف»، مراحل زیر را انجام می دهیم.

ابتدا ابتدا داده ها را مرتب از کوچک به بزرگ نوشته سپس جدول زیر را درباره پیست «الف»، کامل می کنیم.

۱۹۰، ۲۲۵، ۴۷۲، ۵۵۱، ۷۲۸، ۷۸۷، ۸۲۵

بیشترین میزان بارش	چارک سوم بارش	میانه بارش	چارک اول بارش	کمترین میزان بارش
۸۲۵	۷۸۷	۵۵۱	۲۲۵	۱۹۰

حال مقادیر جدول را روی یک محور نمایش می دهیم.



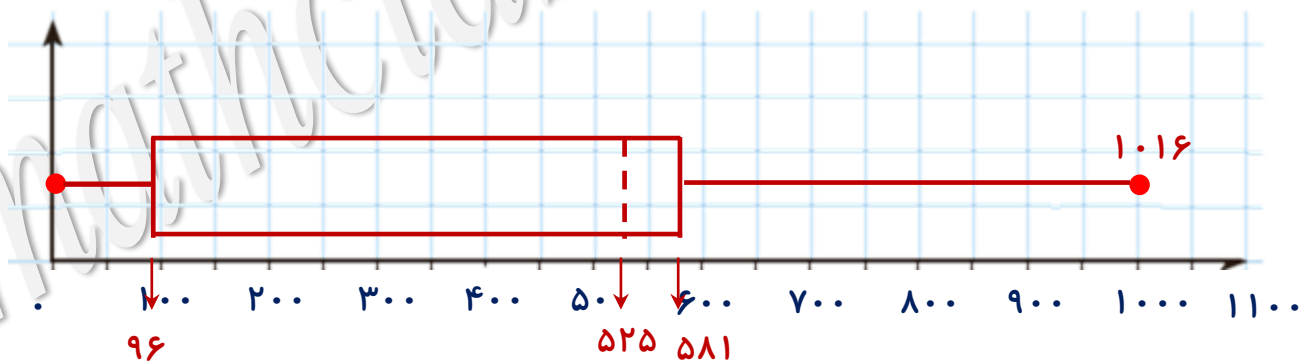
## کار در کلاس صفحه ۹۸ کتاب درسی

نمودار جعبه ای مربوط به پیست «ب» در فعالیت قبل را رسم کنید. و سپس با نمودار جعبه ای پیست «الف» مقایسه کنید.

اگر داده دور افتاده ای در داده ها باشد، نمودار جعبه ای چه تغییری می کند؟

۰ - ۹۶ - ۲۷۱ - ۵۲۵ - ۵۶۶ - ۵۸۱ - ۱۰۱۶

بیشترین میزان بارش	چارک سوم بارش	میانه بارش	چارک اول بارش	کمترین میزان بارش
۱۰۱۶	۵۸۱	۵۲۵	۹۶	۰



با توجه به سبیل های نمودار، می توانید به نامتقارن بودن داده ها پی ببرید.

**تمرین تکمیلی**

سوال ۱۵: مربی تیم بسکتبال می خواهد بر اساس نتایج بازی های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب شده توسط آنها به صورت زیر است. الف) نمودار جعبه ای امتیازهای آن ها را رسم کنید.

۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	امتیاز کسب شده
۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱	تعداد بازی

۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۷	۶	۳	امتیاز کسب شده
۱	۱	۱	۳	۲	۱	۲	تعداد بازی

بازیکن «ب»

بازیکن «الف»

۷، ۸، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۲، ۱۳

۳، ۳، ۶، ۷، ۷، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۳۰

$Q_1 = 9$

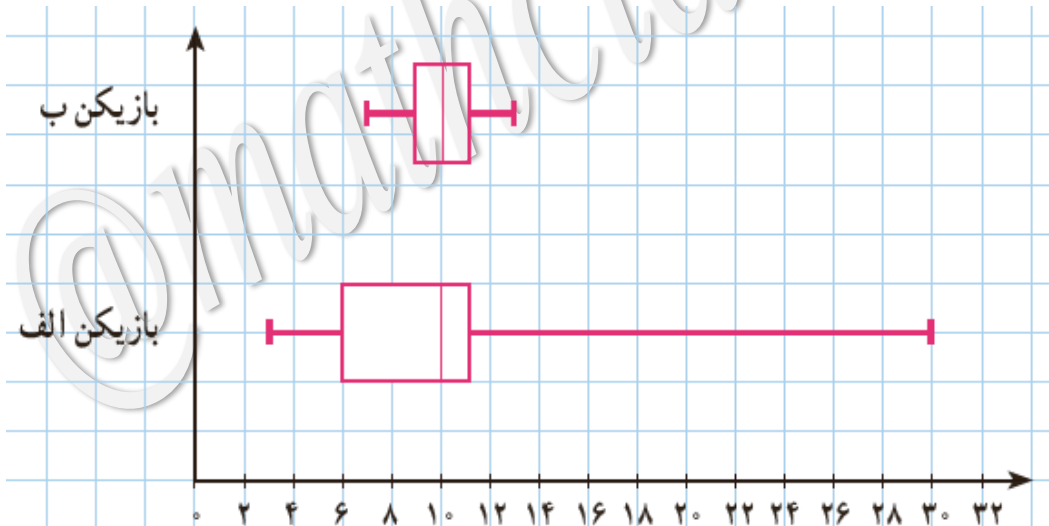
$Q_2 = 10$

$Q_3 = 11$

$Q_1 = 6$

$Q_2 = 10$

$Q_3 = 11$



ب) مربی کدام بازیکن را انتخاب می کند؟

بازیکن «ب» زیرا پراکندگی امتیازات وی کمتر است.

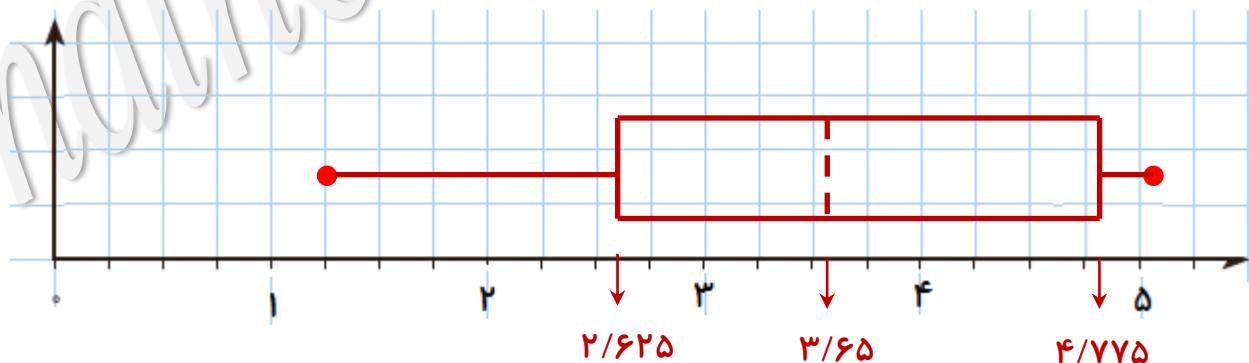


## تمرین تکمیلی

سوال ۱۶: برای مجموعه داده های زیر، نمودار جعبه ای بکشید.

 $\frac{4}{8}, \frac{2}{75}, \frac{4}{1}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{25}, \frac{4}{75}, \frac{4}{95}, \frac{5}{1}$ 

$$\begin{array}{c}
 \boxed{1/25, 1/5, 2/5, 2/75, 3/1, 3/2} \quad \boxed{4/1, 4/25, 4/75, 4/8, 4/95, 5/1} \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 Q_1 = \frac{2/5 + 2/75}{2} = 2/625 \qquad Q_2 = \frac{3/2 + 4/1}{2} = 3/65 \qquad Q_3 = \frac{4/75 + 4/8}{2} = 4/775
 \end{array}$$



## نکته ها

معيار پراكنندگي كه معمولا با ميانگين بيان مي شود، انحراف معيار است.

معيار پراكنندگي كه معمولا با ميانه بيان مي شود، دامنه ميانه چاركي نام دارد.

وقتي با داده دور افتاده مواجه هستيد، دامنه ميانه چاركي معمولا بازتاب بهتري از داده ها مي دهد تا انحراف معيار.

زمانی که تعداد داده ها زیاد باشد، می توانید از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و پراکنندگی نتیجه بگیرید که داده دور افتاده وجود داشته است.

مزیت های میانه و دامنه میانه چارکی به نسبت میانگین و انحراف معیار:

(الف) تفسیر سریع و ساده تر ب) ثبات بالاتر و عدم تاثیر پذیری نسبت به داده های دور افتاده

# جمع بندی

دامنه تغییرات	دامنه میان چارگی	واریانس	انحراف معیار	ضریب تغییرات
تغییر نمی کند	تغییر نمی کند	تغییر نمی کند	تغییر نمی کند	اگر به همه داده ها یک مقدار مثبت اضافه کنیم، ضریب تغییرات کوچک می شود.
در قدرمطلق آن عدد ضرب یا بر قدرمطلق آن عدد تقسیم می شود.	در قدرمطلق آن عدد ضرب یا بر قدرمطلق آن عدد تقسیم می شود.	در مجذور آن عدد ضرب، یا بر مجذور آن عدد تقسیم می شود.	در اندازه آن عدد ضرب، یا بر اندازه آن عدد تقسیم می شود.	تغییر نمی کند.
بله	خیر	بله	بله	بله
نسبت به داده دور افتاده تاثیر پذیر است؟				
از نوع واحد داده مورد نظر (متغیر)	از نوع واحد داده مورد نظر (متغیر)	توان دوم واحد داده مورد نظر (متغیر)	از نوع واحد داده مورد نظر (متغیر)	بدون واحد
واحد اندازه گیری				

## تمرین ۱ صفحه ۹۹ کتاب درسی

فرض کنید سن افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده اند، به صورت زیر است:

۳۲، ۵۹، ۲۶، ۵۳، ۷۴، ۱۷، ۴۵، ۲۳، ۶۴، ۵۰، ۶۱

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۳۲	-۱۳/۸۲	۱۹۱
۵۹	۱۳/۱۸	۱۷۳/۷۱
۲۶	-۱۹/۸۲	۳۹۲/۴۳
۵۳	۷/۱۸	۵۱/۵۵
۷۴	۲۸/۱۸	۷۹۴/۱۱
۱۷	-۲۸/۸۲	۸۳۰/۵۹
۴۵	-۰/۸۲	۰/۶۷
۲۳	-۲۲/۸۲	۵۲۰/۷۵
۶۴	۱۸/۱۸	۳۳۰/۲۴
۵۰	۴/۱۸	۱۷/۴۷
۶۱	۱۵/۱۸	۲۳۰/۴۳

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سن افراد را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{۵۰۴}{۱۱} \cong ۴۵/۸۲$$

$$\sigma^2 = \frac{۳۵۳۳/۲۲}{۱۱} = ۳۲۱/۲$$

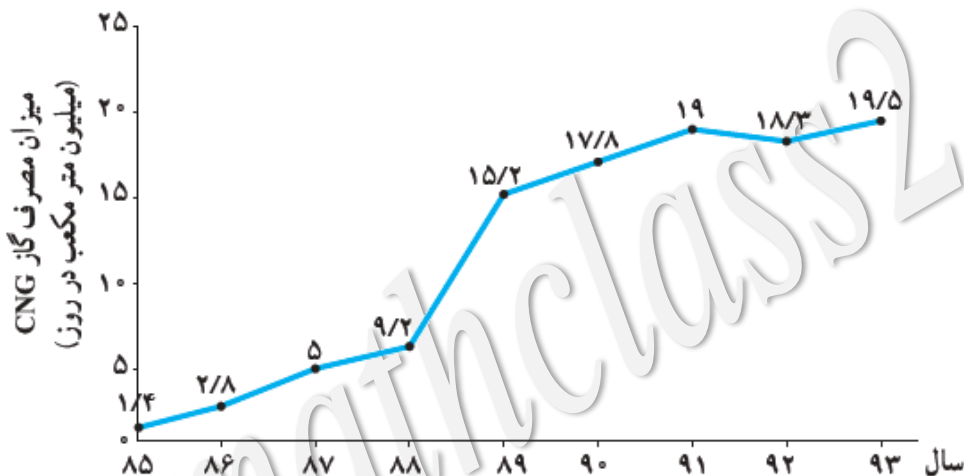
$$\sigma = \sqrt{۳۲۱/۲} \cong ۱۷/۹۲$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱۷/۹۲}{۴۵/۸۲} \cong ۰/۳۹$$

## تمرین ۲ صفحه ۹۹ کتاب درسی

نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.

میزان مصرف گاز CNG در سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳



$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۱/۴	-۱۰/۶۲	۱۱۲/۷۸
۲/۸	-۹/۲۲	۸۵/۰۱
۵	-۷/۰۲	۴۹/۲۸
۹/۲	-۲/۸۲	۷/۹۵
۱۵/۲	۳/۱۸	۱۰/۱۱
۱۷/۸	۵/۷۸	۳۳/۴۱
۱۹	۶/۹۸	۴۸/۷۲
۱۸/۳	۶/۲۸	۳۹/۴۴
۱۹/۵	۷/۴۸	۵۵/۹۵

$$\bar{x} = \frac{108/2}{9} = 12/02$$

$$\sigma^2 = \frac{442/65}{9} = 49/18$$

$$\sigma = \sqrt{49/18} \cong 7/01$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7/01}{12/02} \cong 0/58$$

## تمرین ۳ صفحه ۹۹ کتاب درسی

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	واریانس	انحراف معیار	ضریب تغییرات
۱۰۰، ۱۲، ۸، ۱۶، ۱۰، ۴، ۷	$1015/39$	$31/86$	$1/42$
۳، ۲، ۱، ۰، ۰، -۳، -۲، -۱	$3/5$	$1/87$	—
$10/11$ ، $11/36$ ، $10/11$ ، $9/88$ ، $9/42$ ، $9/76$ ، $9/62$	$0/35$	$0/59$	$0/06$
۲، ۳۰۰۰، ۲۵۰، ۲۰۰۰	$1295000/75$	$1137/98$	$0/61$

## تمرین ۴ صفحه ۹۹ کتاب درسی

اعداد دلخواه را بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای آنها به دست آورید.

۷۵، ۵۰، ۶۰، ۶۴، ۶۹، ۶۲، ۷۱، ۸۵

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۸۵	$۸۵ - ۶۷ = ۱۸$	۳۲۴
۷۱	$۷۱ - ۶۷ = ۰$	۴
۶۲	$۶۲ - ۶۷ = -۵$	۲۵
۶۹	$۶۹ - ۶۷ = ۲$	۴
۶۴	$۶۴ - ۶۷ = -۳$	۹
۶۰	$۶۰ - ۶۷ = -۷$	۴۹
۵۰	$۵۰ - ۶۷ = -۱۷$	۲۸۹
۷۵	$۷۵ - ۶۷ = ۸$	۶۴

$$\bar{x} = \frac{۵۳۶}{۸} = ۶۷$$

$$\sigma^2 = \frac{۷۸۰}{۸} = ۹۷/۵$$

$$\sigma = \sqrt{۹۷/۵} \cong ۹/۸۷$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۹/۸۷}{۶۷} \cong ۰/۱۵$$

## تمرین ۵ صفحه ۱۰۰ کتاب درسی

اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ و میانگین آنها ۴ باشد، واریانس داده ها را به دست آورید.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 2 = \frac{\sigma}{4} \Rightarrow \sigma = 2 \times 4 = 8 \Rightarrow \sigma^2 = 64$$

## تمرین ۶ صفحه ۱۰۰ کتاب درسی

اگر  $n$  داده را  $c$  برابر کنیم، ضریب تغییرات داده ها چند برابر می شود؟

ضریب تغییرات تغییر نمی کند، زیرا می دانیم اگر میانگین داده های  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  را  $\bar{x}$  بنامیم، آنگاه میانگین

$$(\bar{x})_{new} = c\bar{x} \quad \text{برابر } c x_1, c x_2, c x_3, \dots, c x_n \text{ خواهد بود. به عبارتی دیگر}$$

همچنین می دانیم اگر  $n$  داده را  $c$  برابر کنیم، انحراف معیار داده ها  $|c|$  برابر می شود. به عبارتی دیگر  $(\sigma)_{new} = |c|\sigma$

پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \\ (C.V)_{new} = \frac{|c|\sigma}{c\bar{x}} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{(C.V)_{new}}{C.V} = \frac{\frac{|c|\sigma}{c\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{|c|}{c} = \pm 1$$

ضریب تغییرات تغییر نمی کند.



## تمرین ۷ صفحه ۱۰۰ کتاب درسی

فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل های هر بوته را شمرده ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

۲، ۱، ۵، ۵، ۲، ۲، ۲، ۲، ۳، ۱، ۱، ۱، ۲، ۴، ۷، ۱، ۴، ۶، ۸، ۳، ۴، ۷

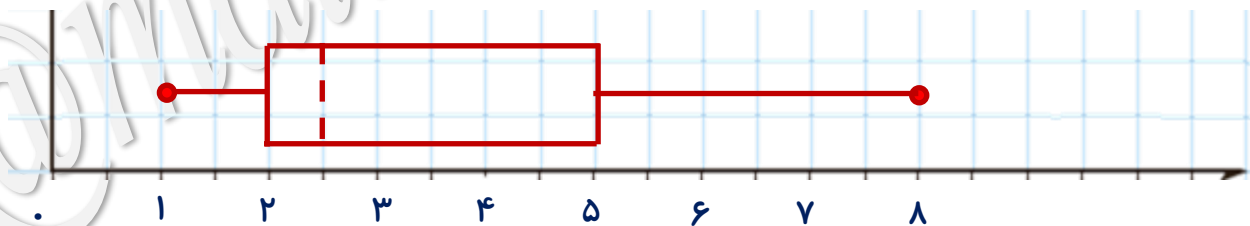
نمودار جعبه ای این داده ها را رسم کنید.

۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴، ۵، ۵، ۶، ۷، ۷، ۸

$$Q_1 = 2$$

$$Q_2 = \frac{2 + 3}{2} = 2.5$$

$$Q_3 = 5$$

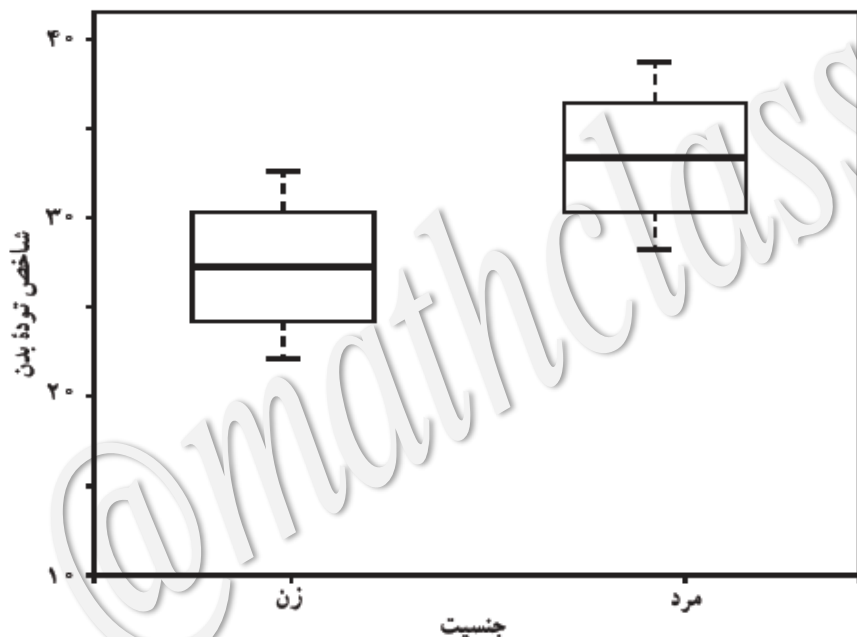


## تمرین ۸ صفحه ۱۰۰ کتاب درسی

نمودار جعبه ای مربوط به شاخص توده بدن ( $BMI$ ) به تفکیک جنسیت رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانگین شاخص توده بدن در خانم ها بیشتر است یا آقایان؟

ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم ها بیشتر است یا آقایان؟



الف) میانگین شاخص توده بدن در آقایان بالاتر است.

ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در هر دو گروه یکسان است.

تمرین ۹ صفحه ۱۰۰ کتاب درسی

داده های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است:

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۳/۵	۱۲/۳	۱۲/۲	۱۰/۴	۳۰/۱

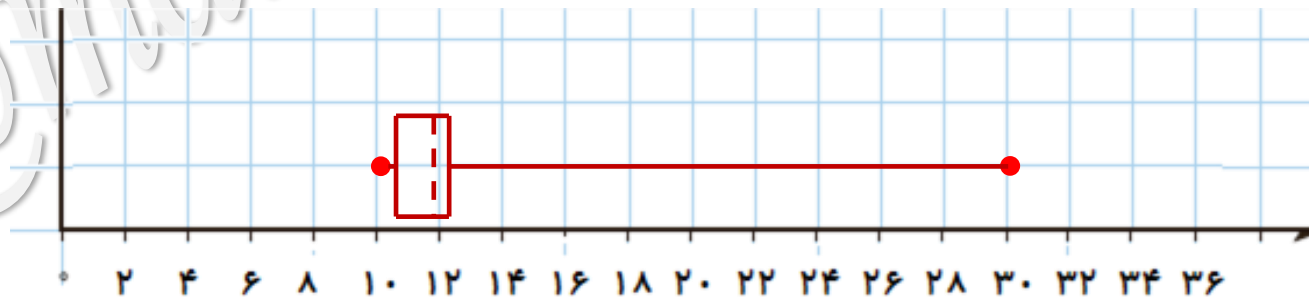
نمودار جعبه ای این داده ها را رسم کنید.

۱۰/۴، ۱۰/۴، ۱۰/۵، ۱۱/۳، ۱۱/۵، ۱۱/۹، ۱۲/۲، ۱۲/۳، ۱۳/۵، ۳۰/۱

$$Q_1 = 10/5$$

$$Q_2 = \frac{11/5 + 11/9}{2} = 11/7$$

$$Q_3 = 12/3$$



## روش دیگر برای محاسبه واریانس

این دستور محاسبه واریانس معمولاً هنگامی مورد استفاده قرار می گیرد که مجموع مجذور داده ها برای ما مشخص باشد. در این روش برای محاسبه واریانس، میانگین مجذور داده ها را منهای مجذور میانگین داده ها می کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2$$

### تمرین تکمیلی

سوال ۱۷: اگر مجموع ۸ داده آماری برابر ۳۲ و مجموع مجذور همان ۸ داده برابر ۴۰۰ باشد؛ واریانس داده ها را بیابید.

$$\bar{x} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{400}{8} - (4)^2 = 50 - 16 = 34$$

## تمرین تکمیلی

سوال ۱۸: واریانس داده های زیر را بیابید.

۲۱، ۱۳، ۱، ۵، ۱۷، ۹

پس از مرتب کردن اعداد، می بینیم داده ها دنباله ای از اعداد با قدر نسبت ۴ هستند، پس داریم:

۱ - ۵ - ۹ - ۱۳ - ۱۷ - ۲۱

$$\sigma^2 = \frac{d^2(n^2 - 1)}{12} \xrightarrow[\begin{matrix} n = 6 \\ d = 4 \end{matrix}]{\hspace{1cm}} \sigma^2 = \frac{4^2(6^2 - 1)}{12}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{560}{12} \cong 46.7$$

## تمرین تکمیلی

سوال ۱۹: در یک جامعه آماری  $\bar{x} = ۲۴$  و  $\sigma^2 = ۱۶$  می باشد. اگر همه داده های آماری را ۳ برابر کنیم و سپس از هر داده ۶ واحد کم کنیم، ضریب تغییرات چه تغییری می کند؟

$$\sigma^2 = ۱۶ \Rightarrow \sigma = ۴$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow C.V = \frac{۴}{۲۴} = \frac{۱}{۶}$$

$$(\sigma)_{new} = ۳\sigma = ۳(۴) = ۱۲$$

$$(\bar{x})_{new} = ۳\bar{x} - ۶ = ۳(۲۴) - ۶ = ۶۶$$

$$(C.V)_{new} = \frac{(\sigma)_{new}}{(\bar{x})_{new}} \Rightarrow (C.V)_{new} = \frac{۱۲}{۶۶} = \frac{۲}{۱۱} \Rightarrow \frac{(C.V)_{new}}{C.V} = \frac{\frac{۲}{۱۱}}{\frac{۱}{۶}} = \frac{۱۲}{۱۱}$$

# پایان درس سوم

