

۱- اگر نقطه‌ی (۱, ۲)، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = x^3 + bx^2 + d$  باشد، مقادیر  $b$  و  $d$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(x) = x^3 + bx^2 + d \xrightarrow{(2, 1)} 1 = 8 + 4b + d \Rightarrow 4b + d = -7 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx = 0 \xrightarrow{x=2} 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3 \xrightarrow{(1)} 4(-3) + d = -7 \Rightarrow d = 5$$

۲- مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13$  ;  $x \in [-1, 2]$

ب)  $g(x) = x^3 + 2x - 5$  ;  $x \in [-2, 1]$

« پاسخ »

الف)  $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13$  ;  $x \in [-1, 2]$

$$f'(x) = -6x^2 + 18x = 0 \Rightarrow -6x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ق ق ن} \\ \text{ق ق ن} \end{matrix}$$

$x = -1 \Rightarrow y = -2$	$\min(0, -13)$	$\max(2, 7)$
$x = 0 \Rightarrow y = -13$	مطلق	مطلق
$x = 2 \Rightarrow y = 7$		

ب)  $g(x) = x^3 + 2x - 5$  ;  $x \in [-2, 1]$

$$g'(x) = 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3} \quad \text{ق ق ن}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -17$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -2$$

$\min(-2, -17)$	$\max(1, -2)$
مطلق	مطلق

۳- نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

ب)  $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

پ)  $h(x) = \sqrt[3]{x}$

« پاسخ »

الف)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad x = 0 \Rightarrow (0, 2)$  نقطه بحرانی

همچنین نقاط ابتدا و انتهای دامنه  $D_f = [-2, 2]$  نیز نقاط بحرانی هستند در نتیجه این تابع سه نقطه بحرانی دارد:

سه نقطه بحرانی  $\Rightarrow (2, 0), (-2, 0), (0, 2)$

ب)  $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x \xrightarrow{g'(x) = 0} 3x^2 + 6x = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = -2$

نقاط بحرانی:  $(0, -4), (-2, 0)$

پ)  $h(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  در  $x = 0$  مشتق پذیر نیست و نقطه  $(0, 0)$  نقطه بحرانی است

۴- بزرگترین بازه از  $R$  که تابع  $f(x) = x^3 - 12x + 4$  در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

« پاسخ »

$f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x) = 0} 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'	+	•	-	•	+
f		20	-12		

بزرگترین بازه که تابع در آن نزولی اکید است بازه  $(-2, 2)$  است.

۵- اکسترمم‌های مطلق تابع  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  را در بازه  $[-1, 3]$  به دست آورید.

« پاسخ »

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1; 3] \\ x = 1 \end{cases}$

۰/۷۵

$f(1) = -7, f(-1) = 13, f(3) = 45$

$(-7, 1)$  مینیمم مطلق و نقطه  $(3, 45)$  ماکزیمم مطلق (هر قسمت ۰/۲۵)

۶- الف) جدول تغییرات تابع  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید.  
 ب) نقاط بحرانی تابع  $f$  و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه  $(-1, 3)$  مشخص کنید.

« پاسخ »

الف) تکمیل جدول نیم نمره

$x$	-2	1
$f'$	+	-
	Max	Min

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \quad (0/5)$$

ب)

$$f(1) = -7$$

$$f(-2) \notin [-1, 3] \quad (0/25) \Rightarrow \min : (1, -7) \quad (0/25), \max : (3, 45) \quad (0/25)$$

$$f(-1) = 13$$

$$f(3) = 45$$

نقطه بحرانی:  $(1, -7)$   $(0/25)$

۷- ضرایب  $a$  و  $b$  را در تابع  $f(x) = -x^4 + ax + b$  طوری تعیین کنید که در نقطه  $(1, 2)$  ماکزیمم نسبی داشته باشد.

« پاسخ »

$$f'(x) = -4x^3 + a \quad (0/25) \xrightarrow{f'(1)=0} -4 + a = 0 \quad (0/25) \Rightarrow a = 4 \quad (0/25)$$

$$f(1) = 2 \quad (0/25) \Rightarrow -1 + 4 + b = 2 \quad (0/25) \Rightarrow b = -1 \quad (0/25)$$

۸- مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع  $f(x) = x+1 + \frac{4}{x+1}$  را در بازه  $[0, 2]$  در صورت وجود بیابید.

« پاسخ »

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} \quad (0/25) \xrightarrow{f'=0} \begin{cases} x = -3 \quad (0/25) \\ x = 1 \quad (0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 5 \quad \text{ماکسیمم مقدار} \quad (0/25) \\ f(1) = 4 \quad \text{مینیمم مقدار} \quad (0/25) \\ f(2) = \frac{13}{2} \quad (0/25) \end{cases}$$

۹- نقاط اکسترمم مطلق تابع  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  را در بازه  $[-\frac{3}{2}, 3]$  به دست آورید.

« پاسخ »

$$D = \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 3 \quad (0/25)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{قابل قبول} \quad (0/25) \\ x = -1 & \text{قابل قبول} \quad (0/25) \end{cases}$$

$$f(1) = -1 \quad (0/25) \quad \text{مینیمم مطلق} \quad f(-1) = 3 \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{8} \quad f(3) = 19 \quad (0/25) \quad \text{ماکسیمم مطلق}$$

۱۰- نقاط بحرانی تابع  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$  را پیدا کنید.

« پاسخ »

$$D = [0, 4] \quad (0/25)$$

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x}} \quad (0/5)$$

$$-2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \quad (0/25) \quad \text{قابل قبول}$$

$$-x^2 + 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0/25) \quad \text{غیرقابل قبول} \\ x = 4 & (0/25) \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۱۱- نقاط بحرانی تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$  را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R} \quad (0/25) \quad , \quad f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} \quad (0/5) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 & (0/25) \\ f'(x) \text{ ن.ت.} \Rightarrow x = \pm 1 & (0/5) \end{cases} \Rightarrow \{0, 1, -1\} \quad \text{نقاط بحرانی}$$

۱۲- جهت تغییرات و مقدار ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 1$  را در بازه  $[-2, 3]$  مشخص کنید.

« پاسخ »

$$y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 9x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	-2	-1	3
y'	+	0	-
y	-1	$\frac{15}{2}$	$-\frac{97}{2}$

مطلق max =  $\frac{15}{2}$   
مطلق min =  $-\frac{97}{2}$

۱۳- نقاط بحرانی تابع  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  را در صورت وجود تعیین کنید.

« پاسخ »

وجود ندارد  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$  در  $D_f = [-2, 2]$   $f'(0) = 0, f'(2), f'(-2)$

$x = 0, 2, -2$  بحرانی هستند.

۱۴- تابع  $y = x - 2\sqrt{x}$  در کدام بازه صعودی اکید است؟

« پاسخ »

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{y'=0} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = 1, D_f = [1, +\infty)$$

x	0	1	$+\infty$
y'		-	0
y	0	-1	$+\infty$

(0/5)

در بازه  $[1, +\infty)$  صعودی است (0/25).

۱۵- تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$  را در نظر بگیرید. با استفاده از آزمون مشتق اول، بازه‌هایی که تابع بر آن‌ها اکیداً صعودی است را مشخص کنید.

« پاسخ »

$$f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+	-	+	
y	↗	↘	↗	

روی بازه‌ی  $(3, +\infty)$  اکیداً صعودی

روی بازه‌ی  $(-\infty, -1)$  اکیداً صعودی

۱۶- تابع  $y = x + \frac{1}{x}$  در کدام بازه‌ی صعودی و در کدام بازه نزولی است؟

« پاسخ »

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad \text{f'(x) = 0} \rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+

۰/۲۵

تابع در بازه‌های  $(1, +\infty)$  و  $(-\infty, -1)$  صعودی (۰/۵) و در بازه‌ی  $(0, 1)$  و  $(-1, 0)$  نزولی است (۰/۵).

۱۷- نقاط بحرانی تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  را در صورت وجود تعیین کنید.

« پاسخ »

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{۰/۲۵} \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{۰/۵} \Rightarrow \{-1, 1\}$$

نقاط بحرانی (۰/۲۵)

۱۸- در صورت وجود، مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  را در دامنه‌ی آن تعیین کنید.

« پاسخ »

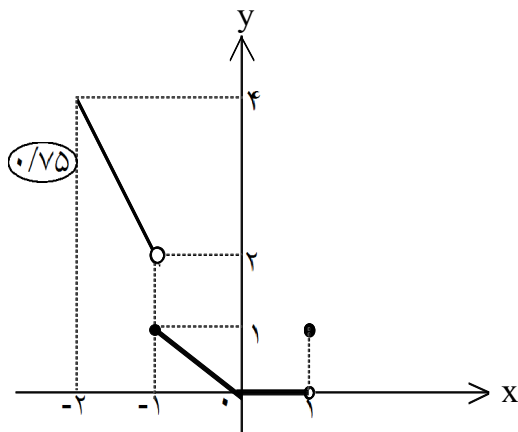
$$D_f = [-3, 3] \quad \text{۰/۲۵}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \quad \text{۰/۲۵} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$f(-3) = 0$ (۰/۲۵)	مینیمم مطلق (۰/۲۵)
$f(0) = 3$ (۰/۲۵)	ماکسیمم مطلق (۰/۲۵)
$f(3) = 0$ (۰/۲۵)	مینیمم مطلق (۰/۲۵)

۱۹- نمودار  $f(x) = x[x]$  را در بازه  $[-2, 1]$  رسم کنید، سپس با توجه به نمودار، نقاط ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی تابع  $f$  را تعیین کنید.

« پاسخ »



$$f(x) = x[x], [-2, 1]$$

نقطه  $(0, 0)$ ، نقطه می نیمم نسبی تابع است. (۰/۲۵)  
و برای هر  $0 < x < 1$ ، تابع هم دارای ماکسیمم نسبی و هم دارای می نیمم نسبی است. (۰/۵)

۲۰- تابع  $y = ax^3 + bx + 2$  مفروض است. ضرایب  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که  $A(1, 0)$  نقطه می نیمم تابع باشد.

« پاسخ »

$$A(1, 0) \in \text{منحنی} \Rightarrow 0 = a + b + 2 \rightarrow a + b = -2 \quad (0/25)$$

$$y' = 3ax^2 + b \Rightarrow 0 = 3a + b \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \quad (0/5)$$

۲۱- تابع  $y = -x^2 + bx + 3$  مفروض است.  $b$  را چنان بیابید که تابع ماکزیممی برابر ۵ داشته باشد.

« پاسخ »

$$y = -x^2 + bx + 3$$

روش اول:

$$y_{\text{Max}} = 5 \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = 5 \quad (0/25) \Rightarrow \frac{-12 - b^2}{-4} = 5 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2} \quad (0/5)$$

$$y' = -2x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{2} \quad (0/25)$$

روش دوم:

$$5 = -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} + 3 \Rightarrow 2 = \frac{-b^2 + 2b^2}{4} \Rightarrow b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2} \quad (0/5)$$

۲۲- تابع  $y = x^2 + bx + 3$  مفروض است.  $b$  را چنان بیابید که تابع، می‌نیممی برابر ۲ داشته باشد.

« پاسخ »

$$y = x^2 + bx + 3$$

روش اول:

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{12 - b^2}{4} = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$y' = 2x + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2}$$

روش دوم:

$$\left(-\frac{b}{2}, 2\right) \Rightarrow 2 = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2}\right) + 3 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

۲۳- تابع  $y = x^2 + 2ax + b$  مفروض است.  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که  $A(2, 4)$  مینیمم تابع باشد.

« پاسخ »

$$y' = 2x + 2a \rightarrow 0 = 4 + 2a \rightarrow a = -2$$

$$4 = 4 + 4a + b \rightarrow 4a + b = 0 \rightarrow -8 + b = 0 \rightarrow b = 8$$

۲۴- تابع  $y = ax^2 + 4x + 3$  داده شده است. ضریب  $a$  را چنان بیابید که نمودار تابع در نقطه‌ای به طول ۱- دارای ماکسیمم یا مینیمم باشد.

« پاسخ »

$$y' = 2ax + 4 \Rightarrow y'(-1) = 0 \rightarrow -2a + 4 = 0 \rightarrow a = 2$$

۲۵- مقدارهای  $a$ ,  $b$  و  $c$  را طوری پیدا کنید که تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  از نقطه‌ی  $(1, 0)$  بگذرد و در نقطه‌ی  $(0, 1)$  می‌نیمم نسبی داشته باشد.

« پاسخ »

$$(0, 1) \in \text{تابع} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

$$(1, 0) \in \text{تابع} \Rightarrow a + b + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -2$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3 \xrightarrow{\text{پس}} c = 1, b = -1, a = -1$$



۲۶- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع  $f(x) = |2x - 3| - |3x - 1|$  روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« پاسخ »

$$f'(x) = \frac{2(2x - 3)}{|2x - 3|} - \frac{3(3x - 1)}{|3x - 1|} = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{3} \\ -5 & \frac{1}{3} < x < \frac{3}{2} \\ -1 & x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس  $f$  در فاصله‌ی  $[-\infty, \frac{1}{3}]$  اکیدا صعودی و در فاصله‌ی  $(\frac{1}{3}, +\infty)$  اکیدا نزولی است.

۲۷- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع  $f(x) = 1 + |3 - x|$  روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« پاسخ »

$$f'(x) = \frac{x - 3}{|x - 3|} = \begin{cases} 1 & x > 3 \\ -1 & x < 3 \end{cases}$$

$f$  در فاصله‌ی  $[-\infty, 3]$  اکیدا نزولی و در فاصله‌ی  $(3, +\infty)$  اکیدا صعودی است.

۲۸- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع  $f(x) = 36x - 3x^2 + 4\sqrt{x^3}$  روی آنها اکیدا صعودی است.

« پاسخ »

$$D_f = [0, +\infty)$$

$$f'(x) = 36 - 6x + 6\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 6(-x + \sqrt{x} + 6) = 6(\sqrt{x} + 2)(3 - \sqrt{x}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Rightarrow x \leq 9$$

پس  $f$  در فاصله‌ی  $[0, 9]$  اکیدا صعودی است.

۲۹- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 11$  روی آنها اکیدا صعودی است.

« پاسخ »

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3, x = \frac{1}{3}$$

x	$\frac{1}{3}$	3	
y'	+	-	+
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

پس f در فاصله‌های  $(-\infty, \frac{1}{3}]$  و  $[3, +\infty)$  اکیدا صعودی است.

۳۰- نقاطی را پیدا کنید که تابع  $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2$  در آنها اکسترمم نسبی دارد.

« پاسخ »

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1)^3 = (x-1)^2(x+1)(5x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1, x = -\frac{1}{5}$$

x	-1	$-\frac{1}{5}$	1	
y'	+	-	+	+
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	max	min		

پس تابع f در  $x = -1$  ماکزیمم نسبی و در  $x = -\frac{1}{5}$  می‌نیمم نسبی دارد.

۳۱- نقاطی را پیدا کنید که تابع  $f(x) = (x+3)^2(x-4)^2$  در آنها اکسترمم نسبی دارد.

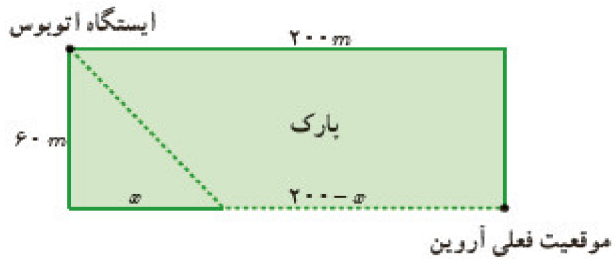
« پاسخ »

$$f'(x) = 2(x+3)(x-4)^2 + 2(x-4)(x+3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x+3)(x-4)(2x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 4, x = \frac{1}{2}$$

x	-3	$\frac{1}{2}$	4
y'	-	+	-
y	↘	↗	↘
	min	max	min

پس این تابع در  $x = -3$  و  $x = 4$  می‌نیمم نسبی و در  $x = \frac{1}{2}$  ماکزیمم نسبی دارد.



۳۲- آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. هم‌چنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت  $2 \frac{m}{s}$  عبور کند. با توجه به شکل، مقدار  $x$  را طوری تعیین کنید که او در کم‌ترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

« پاسخ »

$$t_1 = \frac{200-x}{3} \quad t_2 = \frac{\sqrt{3600+x^2}}{2}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{200-x}{3} + \frac{\sqrt{3600+x^2}}{2} = \frac{1}{6} (400 - 2x + 3\sqrt{3600+x^2})$$

$$t' = \frac{1}{6} \left( -2 + 3 \times \frac{x}{\sqrt{3600+x^2}} \right) \xrightarrow{t'=0} 2 = \frac{3x}{\sqrt{3600+x^2}} \Rightarrow 2\sqrt{3600+x^2} = 3x$$

به توان ۲ می‌رسانیم

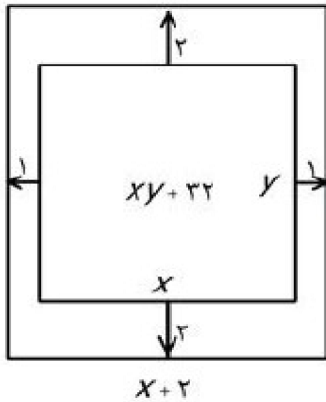
$$4(3600+x^2) = 9x^2 \Rightarrow 5x^2 = 4 \times 3600 \Rightarrow x^2 = 2880$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2880} = 24\sqrt{5}$$

$$t = \frac{1}{6} (400 - 2 \times 24\sqrt{5} + 3\sqrt{3600 + 2880}) = 100$$

۳۳- هر صفحه‌ی مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت  $32 \text{ cm}^2$  خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه  $2 \text{ cm}$  و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

« پاسخ »



$$S_{(x)} = (x+2)(y+2) = xy + 2x + 2y + 4$$

$$\begin{aligned} xy = 32 & \rightarrow S_{(x)} = 2x + 2y + 4. & y = \frac{32}{x} \end{aligned}$$

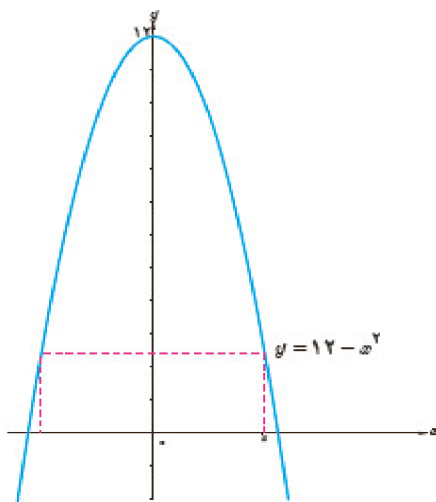
$$S_{(x)} = 2x + \frac{64}{x} + 4.$$

$$S'_{(x)} = 2 - \frac{64}{x^2} = \frac{2x^2 - 64}{x^2} \xrightarrow{S'_{(x)} = 0} 2x^2 - 64 = 0 \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = 4$$

$$y = \frac{32}{x} \rightarrow y = \frac{32}{4} = 8$$

ابعاد جعبه برابر است با:  $(4 + 2 = 6)$  و  $(8 + 2 = 10)$

۳۴- ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور  $x$  ها و دو رأس دیگرش بالای محور  $x$  ها و روی سهمی  $y = 12 - x^2$  باشند.



« پاسخ »

$$S(x) = 2xy = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

$$S'(x) = 24 - 6x^2 \xrightarrow{S'(x) = 0} 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y = 12 - x^2} y = 12 - 4 = 8$$

طول مستطیل برابر با ۸ و عرض آن برابر با ۴ است.

۳۵- اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.

« پاسخ »

$$2x + 2y = 24 \Rightarrow x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x \quad (0/25)$$

$$S(x) = xy = x(12 - x) = 12x - x^2 \quad (0/25)$$

$$S'(x) = 12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6 \quad (0/25), y = 6 \quad (0/25)$$

۳۶- مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۶ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آن‌ها را پیدا کنید.

« پاسخ »

$$x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x \quad (0/25)$$

$$p = xy \Rightarrow p(x) = x(16 - x) = 16x - x^2 \quad (0/25)$$

$$p'(x) = 16 - 2x \quad (0/25) \Rightarrow 16 - 2x = 0 \Rightarrow x = 8 \quad (0/25), y = 8 \quad (0/25) \Rightarrow p_{\max} = 64 \quad (0/25)$$

۳۷- اگر  $2x + y = 60$  باشد، مقادیر  $x$  و  $y$  را چنان بیابید که حاصل ضرب آن‌ها ماکزیمم گردد.

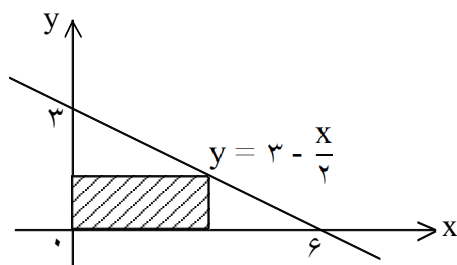
« پاسخ »

$$2x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x \Rightarrow xy = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{60}{4} = 15 \Rightarrow y = 60 - 30 = 30$$

۳۸- در شکل زیر، یک مستطیل به محور  $x$  ها و  $y$  ها و نمودار تابع  $y = 3 - \frac{x}{2}$  محدود شده است. طول و عرض مستطیل

چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟



« پاسخ »

$$S = x \left( 3 - \frac{x}{2} \right) = 3x - \frac{x^2}{2}$$

$$S' = 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{طول} \\ y = 3 - \frac{x}{2} = \frac{3}{2} & \text{عرض} \end{cases}$$

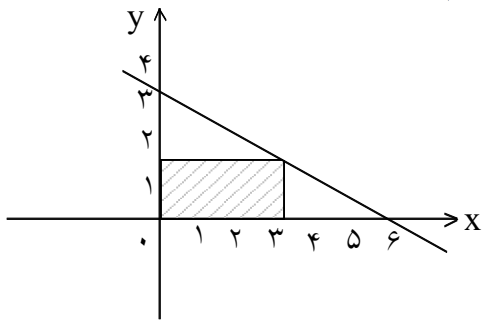
۳۹- طول و عرض مستطیلی را بدست آورید که محیط آن ۲۰۰ متر بوده و مساحت آن ماکزیمم باشد.

« پاسخ »

$$\left. \begin{matrix} x + y = 100 \\ y = 100 - x \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = x \cdot y \Rightarrow S = x(100 - x) \Rightarrow S = 100x - x^2 \Rightarrow S' = 100 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 50 \end{cases}$$

۴۰- یک مستطیل مطابق شکل به محورهای Xها و Yها و نمودار تابع با ضابطه  $y = \frac{6-x}{2}$  (شکل زیر) محدود شده است. طول

و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟



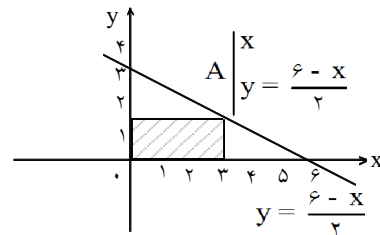
« پاسخ »

$$S = x \cdot y \xrightarrow{y = \frac{6-x}{2}} S = x \left( \frac{6-x}{2} \right)$$

$$\rightarrow S(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2 \text{ تابع مساحت مستطیل}$$

$$\rightarrow S'(x) = 3 - x \xrightarrow{S'(x) = 0} 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \text{ طول مستطیل}$$

$$\rightarrow y = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} \text{ عرض مستطیل}$$



۴۱- دو عدد مثبت چنان بیابید که مجموع برابر ۶ و حاصل ضرب آنها ماکزیمم باشد.

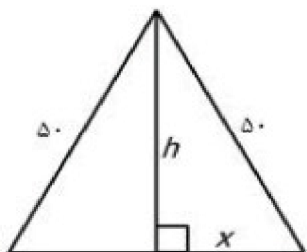
« پاسخ »

$$x + y = 6$$

$$P = xy = x(6-x) = -x^2 + 6x \rightarrow P' = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3, y = 3$$

۴۲- الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم به طوری که قاعده‌ی مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیش‌ترین مساحت ممکن برابر این مثلث چه قدر خواهد بود؟  
 ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

« پاسخ »



$$\text{الف) } h^2 + x^2 = 50^2 \Rightarrow h = \sqrt{2500 - x^2}$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times h = x \left( \sqrt{2500 - x^2} \right) \quad D = [0, 50]$$

$$S'(x) = \sqrt{2500 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{2500 - x^2}} = \frac{2500 - x^2 - x^2}{\sqrt{2500 - x^2}} = \frac{2500 - 2x^2}{\sqrt{2500 - x^2}}$$

$$\xrightarrow{S'(x) = 0} 2500 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2500}{2} = 1250 \Rightarrow x = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$$

$$h = \sqrt{2500 - x^2}$$

$$\xrightarrow{h = \sqrt{2500 - 1250} = \sqrt{1250} \Rightarrow h = 25\sqrt{2}}$$

$$S(x) = (25\sqrt{2})(\sqrt{2500 - 1250}) = 625 \times 2 = 1250$$

ب) با توجه به  $S = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times \sin \theta$  بیش‌ترین مساحت وقتی است که  $\sin \theta = 1$  باشد پس  $\theta = 90^\circ$

$$S = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times 1 = 1250$$

می‌شود پس خواهیم داشت: