

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

حل فعالیتها و کار در کلاسها و تمرینهای کتاب آمار و احتمال

کتاب چاپ 1400

سال یازدهم

رشته ریاضی

فصل اول

[09213102271](tel:09213102271) - [09125102271](tel:09125102271)

مجازی

← فضای @moharrammahdi

@Riazi101112forall2 →

کانال تلگرام

@Mahdi_math_for_all

↓
صفحه‌ی اینستاگرام

مهر

آشنایی با مبانی ریاضیات

۱

درس ۱ آشنایی با منطق ریاضی

- ۱ آشنایی با منطق ریاضی
- ۲ مجموعه - زیر مجموعه
- ۳ قوانین و اعمال بین مجموعه ها - جبر مجموعه ها

کار در کلاس

صف ۲

نتیجه استدلال های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکبی، عددی اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه :

۴ عدد اول نیست

صف ۳

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آن گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش بینی شده است.

نتیجه : ... فردا مدارس تعطیل است .

این استدلال ها، از جمله های خبری تشکیل شده است. به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست

یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره^۲ می گوئیم. معمولاً گزاره ها را با حروف p, q, r و ... نمایش می دهند.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می گوئیم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره

نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می دهیم.

یک گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد؛ یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد.

تعریف گزاره

صف ۱

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند؛ زیرا خبری را بیان نمی‌کنند. جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند؛ بنابراین، گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً در کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آتمیز کیست؟ (پرسشی)

نکته مهم

کار در کلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

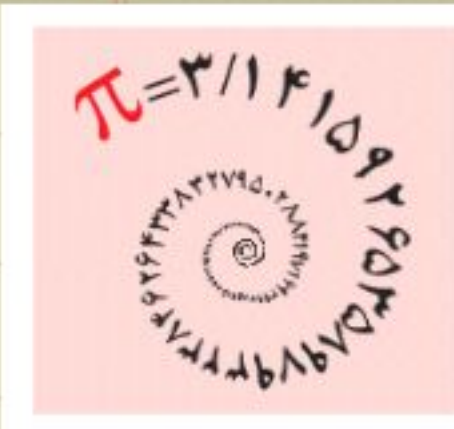
- ایران کشور آسیایی است.
- در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با $\frac{1}{3}$ است.

گزاره ← درست

گزاره ← درست

گزاره نیست جمله عاطفی

گزاره نیست جمله پرسشی



ص ۴

- ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.
- آیا $3+2$ برابر با ۵ است؟
- هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.
- هر معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
- صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.

گزاره نادرست

گزاره ارزش ناشخص

ریشه مساوی $\Delta = 0$

ریشه ندارد $\Delta < 0$

گزاره نادرست ص ۲

کار در کلاس

ص ۴۱

ارزش های سه گزاره p ، q و r ، طبق جدول روبه رو $2^3=8$ حالت دارد. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	→	ن
→	ن	→
د	ن	ن
ن	د	→
→	د	ن
ن	→	→
→	→	→

– به نظر شما جدول ارزش های چهار گزاره، چند حالت دارد؟ $2^4 = 16$ حالت

– با توجه به اینکه هر گزاره می تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت، جدول ارزش های آن گزاره ها چند حالت دارد؟

2^n

گزاره نما

ص ۴۵

فعالیت

عبارت های خبری زیر را در نظر بگیرید:

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{4}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. $(3x+2y=6)$

۱ ارزش کدام یک از جملات بالا را می توانید تعیین کنید؟ **هیچکدام**

۲ اگر به جای متغیر در جمله « a عددی فرد است» قرار دهیم $a=3$ در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید.

اگر در آن $a=4$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

← $a=3$ ← عددی فرد است → درست

← $a=4$ ← عددی فرد است → نادرست

ص ۳

تعریف:

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود. گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می نامیم.

کار در کلاس

مره

جاهای خالی را پر کنید:

اگر در جمله «ب» قرار دهیم $A = \{1, 3, 5\}$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می شود. به نظر شما چه مجموعه هایی را به جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

اگر در جمله «ب» قرار دهیم $A = \{2, 4\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جمله «ب» قرار دهیم $x = 0$ و $y = 3$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x = \dots, 1, \dots$ و $y = \dots, 2, \dots$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

← هر زیر مجموعه ۳ عضوی از $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $A = \{2, 3, 5\}$ — اعداد اول
 $A = \{2, 4, 4\}$ اعداد زوج

دامنه متغیر گزاره نما

D

در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که می توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند.

مجموعه جواب

در هر گزاره نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آنها، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویند و آن را با حرف S نمایش می دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$.

صفحه ۲

کار در کلاس

ص ۴

دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. ($D = \mathbb{Z}$)

ب) $15x^2 - 7x - 8 = 0$ ($D = \mathbb{R}$)

پ) ناس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$ ($D = \{1, 2, \dots, 6\}$)



$$\text{الف) } D = \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{ \dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots \}$$

$$\text{ب) } D = \mathbb{R} \rightarrow 15x^2 - 7x - 8 = 0$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 a b c

$$a + b + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-8}{15} \end{cases} \rightarrow S = \left\{ -\frac{8}{15}, 1 \right\}$$

$$\text{پ) } D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(\{x\}) = \frac{1}{6} \rightarrow S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

صفحه ۵

فعالیت

۶۴

فَعْلًا حُرِّ

۱ هر یک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. ← ۲ گزاره
- عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است. ← ۲ گزاره
- اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است. ← ۲ گزاره
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. ← ۱ گزاره نادرست
- اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. ← ۲ گزاره

توجه

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های گزاره‌ای (ادان ربط)، گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند.

و یا اگر... آنگاه

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره p درست باشد، در این صورت، ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت « \sim » ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

توجه: $\sim(\sim p) \equiv p$
 هم‌ارز صنفی \sim

ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p با q » را که به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسند،

ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « \vee » فاصل گفته می‌شود.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول ارزش ترکیب فصلی گزاره

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » که خوانده می‌شود « p و q » را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « \wedge » عطف گفته می‌شود.

فعالیت

ص ۱

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.
 «سوگند فارغ التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است».
 آیا ارزش این گزاره مرکب درست است؟
 فرض کنید:

p : سوگند فارغ التحصیل شد.

q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

- اگر ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**
- اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**
- هرگاه ارزش دو گزاره p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**
- هرگاه ارزش دو گزاره p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **درست**

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به صورت روبه‌رو است:

صفحه ۱

کار در کلاس

صحنه و صحنه کتاب

۱ جدول زیر را کامل کنید.

ارزش $p \wedge q$	ارزش $p \vee q$	ارزش q	ارزش p	گزاره q	گزاره p
>	>	>	>	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	هفته هفت روز دارد.
ن	>	>	ن	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	عدد ۳ زوج است
ن	>	ن	>	عدد ۵ بر ۲ بخش پذیر است	عدد ۲ اول است
ن	ن	ن	ن	عدد ۲۱ بر ۳ بخش پذیر است	۵، ۲، ۱، ۰، ...
ن	د	>	ن	$\sqrt{۲۷} = ۳ \dots$	(-۷) اول است

۲ با کامل کردن جدول ارزش ها، نشان دهید که گزاره های $(p \vee q) \sim$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ هم ارز منطقی هستند.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	>	د	>	د

همان طور که ملاحظه می کنید، همه حالت های ارزش دو گزاره $(p \vee q) \sim$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ یکسان اند پس $(p \vee q) \sim \equiv \sim p \wedge \sim q$ در منطق ریاضی به این هم ارزی قانون دمورگان گفته می شود.

ارزش این استون برابر است

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

صحنه

دمورگان ←

۲ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

ص ۹ کتاب

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
>	>	>	ن	ن	ن	ن
>	ن	ن	>	ن	>	>
ن	>	ن	>	>	ن	>
ن	ن	ن	>	>	>	>

این استون هم ارزشمند

دورگان ← $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

خواندنی

گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را به صورت‌های «شرط کافی برای q است» و «شرط لازم برای p است» نیز می‌خوانیم.

ص ۹

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است.

با توجه به جدول ملاحظه می کنید که :

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

1 هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن گاه ارزش گزاره مرکب

$p \Rightarrow q$ همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد.

در این حالت می گویند : ارزش $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است.

2 ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست

باشد.

صورت کتاب

کار در کلاس

1 با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	>
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	>	>
ن	د	د	>	>

این ۲ ستون هم ارز اند

هم :

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی

صفحه ۱۰

۲ گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

این دو گزاره هم‌ارز هستند

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

۲ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید:

(الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

(ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

(الف)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

(ب)

صفتی !!

گزاره‌هایی نظیر $(p \Rightarrow p)$ یا $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

F T

ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر p ، آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q است» و « p اگر و تنها اگر q »

صفحه ۱۲ کتاب

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	>	>	>
د	ن	ن	>	ن
ن	د	>	ن	ن
ن	ن	>	>	>

با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

صفحه ۱۲

با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

$$p \vee q = q \vee p$$

الف) قوانین جابه‌جایی

$$p \wedge q = q \wedge p$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

ب) قوانین شرکت‌پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \checkmark$$

ب) قوانین توزیع‌پذیری

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

توزیع ۸ روی ۷

p	q	r	q ∨ r	p ∧ q	p ∧ r	p ∧ (q ∨ r)	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

الف)

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	p ∧ q	q ∧ p	p	q	p ∨ q	q ∨ p
>	>	>	>	>	>	>	>
>	ن	ن	ن	>	ن	>	>
ن	>	ن	ن	ن	>	>	>
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

هم‌ارز هستند

صفحه ۱۳

هم‌ارز هستند

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

بشرکت پذیری :

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
>	>	>	>	>	>	>
>	>	ن	>	ن	ن	ن
>	ن	>	ن	ن	ن	ن
>	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	>	>	ن	>	ن	ن
ن	>	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	>	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

این آزمون هم از دست نده

بنابراین :

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv q \wedge (p \wedge r)$$

صفحه ۱۱

ب) شرکت پتری :

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
>	>	>	>	>	>	>
>	>	ن	>	>	>	>
>	ن	>	>	>	>	>
>	ن	ن	>	ن	>	>
ن	>	>	>	>	>	>
ن	>	ن	>	>	>	>
ن	ن	>	ن	>	>	>
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

این ۲ ستون هم ارزش دهند
بنابراین :

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv q \vee (p \vee r)$$

صفحه ۱۵

توزیع بندبری (بخشی)

S

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	S
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	ن	ن	>	>	>	>
>	ن	>	ن	>	>	>	>
>	ن	ن	ن	>	>	>	>
ن	>	>	>	>	>	>	>
ن	>	ن	ن	ن	>	ن	ن
ن	ن	>	ن	ن	ن	>	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

این دو ستون معملاً برابر هستند

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

بخش لاری \wedge ←

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$$

برعکس بالا (فکتور)

صفحه ۱۶

سورها

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف‌اند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد \forall و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.

ص ۳۳ کتاب

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان ریاضی	عبارت با زبان طبیعی
$\forall x \in \mathbb{R} ; x \geq 0$	برای هر عدد حقیقی x داریم: $x \geq 0$
$\forall a \in \mathbb{E} ; a = 2k (k \in \mathbb{Z})$	همه اعداد زوج، <u>مضرب هستند</u>
$\exists p \in \mathbb{P} ; p = 2k (k \in \mathbb{Z})$	<u>بعضی از اعداد اول زوج هستند</u>
$\exists a \in \mathbb{E} ; a \in \mathbb{P}$	بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با E مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش داده‌ایم.

\forall توجه

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره ما صدق کند؛ به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

\exists

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن نهی نباشد.

صفحه ۱۷

کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.
 الف) هر عدد اول، فرد است. ← نادرست
 مثال نقض: عدد ۲ اول است ولی فرد نیست.

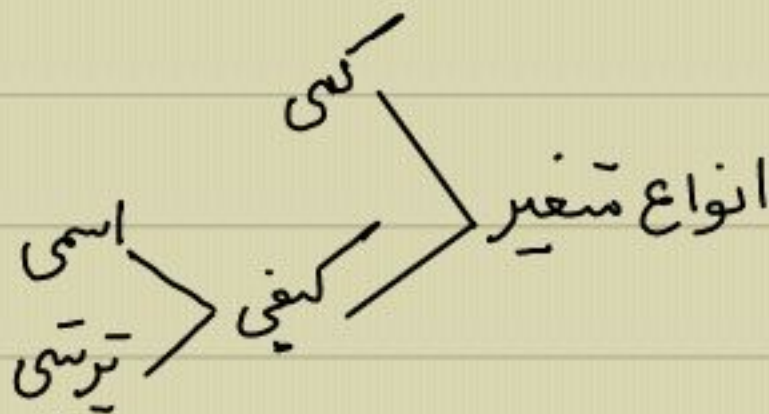
ب) $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$
 نادرست
 ج) $\exists x \in \mathbb{Z}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$
 درست
 د) هر عدد زوج، غیر اول است.
 ن) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است.

$2x^2 + 3x + 1 = 0$
 $a + c = b \rightarrow x_1 = -1 \notin \mathbb{N}$
 $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$
 $\epsilon \mathbb{Z}$

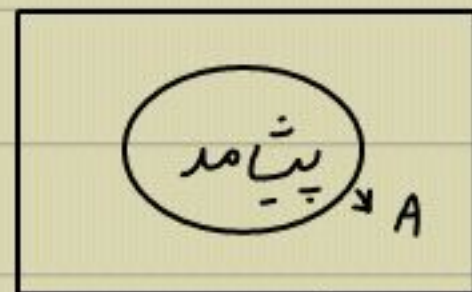
چ) در احتمال، هر مجموعه پشامد زیر مجموعه فضای نمونه است.
 چ) در فضای نمونه S ، پشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > 1$. ← نادرست
 ح) طول هر پاره خط، عدد حقیقی است. ← درست
 $n(A) \leq n(S) \Rightarrow P(A) \leq 1$

ت) نادرست مثال نقض = عدد ۲ زوج ولی اول است.

ث) درست است



ج) درست است



S فضای نمونه

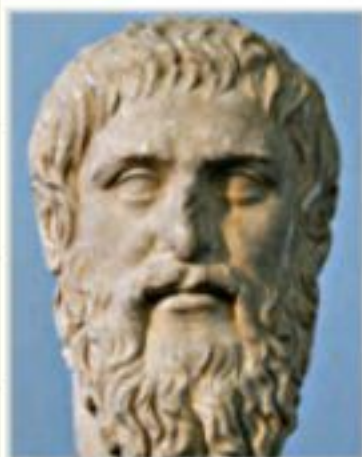
نقیض گزاره‌های سوری

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

تمرین

۱۸۴



۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است، ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

- | | |
|--------------------------------|---|
| (الف) خیام پزشک ایرانی است. | (ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. |
| (پ) $3+5 > 6$ | (ت) تخته سیاه را پاک کنید. |
| (ث) $\{1\} \in \{1, 2, 3, 4\}$ | (ج) چه باران شدیدی می‌آید. |
| (ج) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. | (ح) $\emptyset \subset \mathbb{R}$ |
| (خ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ | (د) عدد $5^8 + 8$ عددی اول است. |
| (ذ) به امید کامیابی شما. | (ر) اماره، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. |

ب) گزاره است درست

الف) گزاره است نادرست

ت) گزاره نیست جمله امری

پ) گزاره است درست

ج) گزاره نیست جمله عاطفی

ث) گزاره است نادرست

ح) گزاره است نادرست

ج) گزاره است نادرست بر ۳ بخش درست

د) گزاره است نادرست

خ) گزاره است نادرست

ر) گزاره است درست

ذ) گزاره نیست جمله عاطفی صفحه ۱۹

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-7 \times \square = -7$	ب) $5 + \square \in \mathbb{Z}$
پ) $\frac{8 \times \square}{4} \in \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$	ن) $\frac{10 \times 9}{3} \square 5 \times 3$
ث) $\square \times \sqrt{2} = 0$	ج) $1 \square \{1\}$
ح) $5(\square - 2) = 20$	ح) $7(\square - 3) = 35$

۲ دامنه متغیر هر یک از گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.
 الف) x مربع کامل است.
 ب) a یک واحد از مضرب 5 بیشتر است.

ن) $\{n(n+1) = 0 \mid n \in \mathbb{W}\}$

پ) $\frac{2x+1}{3} \leq -1$

الف) $S = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

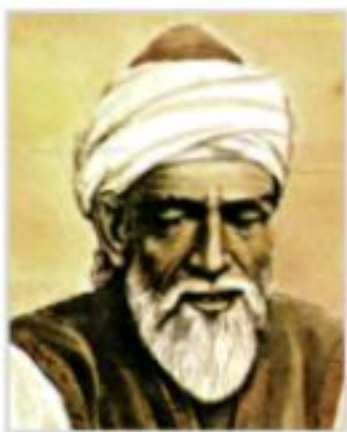
ب) $S = \{a = 2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

پ) $\frac{2x+1}{3} \leq -1 \xrightarrow{\times 3} 2x+1 \leq -3 \rightarrow 2x \leq -4 \rightarrow x \leq -2$

$S = \{-2, -3, -4, -5, \dots\}$

ت) $n(n+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=0 \rightarrow \in \mathbb{W} \\ n+1=0 \rightarrow n=-1 \notin \mathbb{W} \end{cases} \rightarrow S = \{0\}$

صفحه ۲۰



۲ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.
 الف) $4 \leq 3$ ←
 ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است. ←
 پ) $a \in \{b, c, d\}$ ←
 ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.
 ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.
 ج) اگر ۳ زوج باشد، آن گاه ۲ فرد است.

ت) ۲ عددی زوج نیست و عدد π گویا نیست

ث) خورشید به دور زمین نمی‌چرخد یا سنندج مرکز استان کردستان نیست

توجه: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

ج) ۱ زوج است و ۲ فرد نیست

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$
 ب) $(\frac{1}{4} \neq \frac{3}{6}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$
 ت) در لوزی مفروض دو قطر با هم برابرند.
 ج) $2 > 3 \leftrightarrow -2 < -3$
 ب) $(5 > 3) \vee ((-1)^2 + 1 = 0)$
 ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن گاه ۴ مربع کامل نیست.
 ج) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.
 ح) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس.

$n \equiv n \wedge n \rightarrow n < 3 \wedge (2 + 3 = 10)$ الف)
 $T \wedge F \equiv F$ صفتی ۲۱

$$\text{ب) } (5 > 3) \vee ((-1)^2 + 1 = 0) \rightarrow \begin{matrix} \text{N} \equiv \text{N} \\ \text{V} \quad \text{F} \\ \text{T} \quad \text{T} \end{matrix}$$

$$\text{پ) } \left(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}\right) \vee (1 \in \{2, 3, 4\}) \rightarrow \begin{matrix} \text{N} \vee \text{N} \equiv \text{N} \\ \text{F} \vee \text{F} \quad \text{F} \end{matrix}$$

$$\text{ت) } \text{مربع کامل است} \Rightarrow \text{فرر باشد} \rightarrow \text{N} \Rightarrow \text{N} \equiv \text{N}$$

$$\text{ث) } \text{قطرهای مثلث برابرند} \Rightarrow \text{مثلث لوزی است} = \text{F}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $\text{T} \quad \Rightarrow \quad \text{F}$

$$\text{ج) } \text{مربع کامل است} \Leftrightarrow \text{اعداد اول است} \rightarrow \text{N} \Leftrightarrow \text{N} \equiv \text{N}$$

$$\text{چ) } 2 > 3 \Leftrightarrow -2 < -3 \rightarrow \text{N} \Leftrightarrow \text{N} \equiv \text{N}$$

$$\text{ح) } a \in \{b\} \Leftrightarrow a = b \rightarrow \begin{matrix} \text{N} \Leftrightarrow \text{N} \equiv \text{N} \\ \text{F} \quad \text{F} \quad \text{T} \end{matrix}$$

جدول زیر را کامل کنید.

ارزش $(p \wedge q)$	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش q	ارزش p	گزاره q	گزاره p
د	>	>	>	عدد ۹ مربع کامل است	عدد ۲ زوج است.
ن	ن	ن	>	۱۴۲	عدد ۵ اول است
ن	ن	ن	>	$\sqrt{2}$ عدد طبیعی است	$2 \in \{1, 2\}$
>	د	>	>	عدد ۷ اول است.	۸۴ مضرب ۴ است

جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$	ب) $\sim p \wedge p$
پ) $\sim p \vee p$	ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$
ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$	ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	الف) $p \wedge \sim q$	ب) $\sim p \wedge p$	پ) $\sim p \vee p$	ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$	ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$	ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$
>	>	ن	ن	>	ن	ن	>	ن	>	>
>	ن	ن	>	>	>	ن	>	ن	>	ن
ن	>	>	ن	>	>	ن	>	>	>	ن
ن	ن	>	>	ن	>	ن	>	ن	>	>

ف یعنی همیشه نادرست
 آ یعنی همیشه درست

صفحه ۲۳

با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید که :

$p \vee F \equiv p$ (ب)
 $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ (ت)
 $p \vee (q \wedge p) \equiv p$ (ج)
 $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg p \Leftrightarrow q$ (ح)

$p \Rightarrow p \equiv T$ (الف)
 $p \wedge T \equiv p$ (ب)
 $p \wedge (q \vee p) \equiv p$ (ت)
 $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ (ج)

P	P	$P \Rightarrow P$
>	>	>
ن	ن	>
		$\equiv T$
		الف

P	F	$P \vee F$
>	ن	>
ن	ن	ن
		$\equiv P$
		ب

P	T	$P \wedge T$
>	>	>
ن	>	ن
		$\equiv P$
		ب

P	q	$\sim q$	$P \Rightarrow q$	$\sim(P \Rightarrow q)$	$P \wedge \sim q$
>	>	ن	>	ن	ن
>	ن	>	ن	>	>
ن	>	ن	>	ن	ن
ن	ن	>	>	ن	ن

$q \vee p$	$P \wedge (q \vee p)$
>	>
>	>
>	ن
ن	ن

هم ارزش هستند

$\equiv P$

قانون جذب

P	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
>	>	>	>
>	ن	ن	>
ن	>	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$\equiv P$

ج

✓ پیچ * $P \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (P \wedge q) \Rightarrow r$

P	q	r	$P \wedge q$	$q \Rightarrow r$	$P \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(P \wedge q) \Rightarrow r$
>	>	>	>	>	>	>
>	>	ن	>	ن	ن	ن
>	ن	>	ن	>	>	>
>	ن	ن	ن	>	>	>
ن	>	>	ن	>	>	>
ن	>	ن	ن	ن	>	>
ن	ن	>	ن	>	>	>
ن	ن	ن	ن	>	>	>

همه درست هستند
صفحه ۲۵

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \quad (7)$$

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
>	>	ن	>	ن	ن
>	ن	ن	ن	>	>
ن	>	>	ن	>	>
ن	ن	>	>	ن	ن

این استون هم از ریس اند

9 ثابت کنید هر گاه n عددی صحیح و n' مضرب 3 باشد، آن گاه n نیز مضرب 3 است.

$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ عکس نقیض گزاره شرطی را ثابت می کنیم

$$\sim q \rightarrow n \text{ مضرب 3 نیست} \rightarrow n = 3k + 1 \rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1$$

$$n = 3k + 2 \rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

$$n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3k' + 1$$

یعنی n^2 هم مضرب 3 نیست $(\sim p)$

$$n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3k' + 1$$

یعنی n^2 هم مضرب 3 نیست $(\sim p)$

صفحه 24

- ۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای \exists, \forall بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.
- (الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.
- (ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^2 < 0$.
- (پ) همه اعداد اول فرداند.
- (ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $1 - 2x > 5$.
- (ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است.
- (ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^2 = x$.

الف) $\forall x \in \mathbb{N} : x \in O \vee x \in E$ درست

هر عدد طبیعی یا زوج است یا فرد

ب) $\exists a \in \mathbb{W} : a^2 < 0$ نادرست

چون مربع هر عدد حسابی بزرگتر یا مساوی صفر است

پ) $\forall x \in \mathbb{P} : x \in O$ نادرست

مثال نقض عدد ۲

ت) $\exists x \in \mathbb{Z}^+ : 1 - 2x > 5$ نادرست

$$1 - 2x > 5 \rightarrow -2x > 4 \xrightarrow{\div -2} x < -2 = \{-3, -4, -5, \dots\}$$

ث) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : x + \frac{1}{x} \gg 2$ نادرست

مثال نقض: اعداد منفی

ج) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = x$ $x = \{0, 1\}$ درست

صفحه ۲۷

۱۱ هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

(ب) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$

(الف) $\exists x \in A; x + 4 = 10$

(ن) $\forall x \in A; x + 1 \geq 6$

(ب) $\exists x \in A; x + 3 \leq 4$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

نادرست $4 \notin A$ $x + 4 = 10 \rightarrow x = 6$ (الف)

درست $x + 2 \leq 9 \rightarrow x \leq 7$ (ب)

همه اعضای A این خاصیت را دارند

درست $1 \in A$ $x + 3 \leq 4 \rightarrow x \leq 1$ (پ)

نادرست $5 \in A$ $x + 1 \geq 6 \rightarrow x \geq 5$ (ت)

چون گزاره سوری گفته به ازای همگی مقادیر

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

(ب) $\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in \mathbb{P}$

(الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

(ن) $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0$

(ب) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$

نادرست $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ (الف)

به ازای $x = 1$

نقیض: $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$ صفتی ۲۸

تعریف نمی شود

ب) $\forall n \in \mathbb{N} : (2^n + 1) \in \mathcal{P}$ (مثال نقض) نادرست

$2^4 + 1 = 15 \notin \mathcal{P}$ ← $n = 4$

نقیض: $\exists n \in \mathbb{N} : (2^n + 1) \notin \mathcal{P}$

پ) $\forall x \in (-\infty, 0) : x - \frac{1}{x} \leq -2$ نادرست

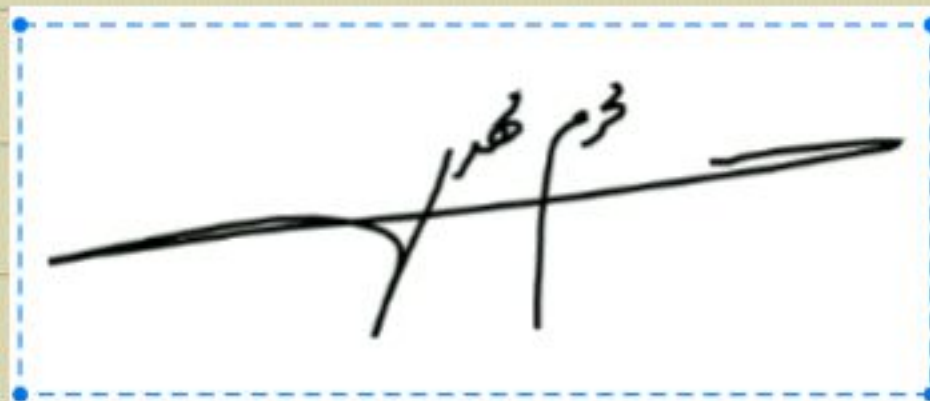
مثال نقض $x = -2 \rightarrow -2 - \frac{1}{-2} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} > -2$

نقیض: $\exists x \in (-\infty, 0) : x - \frac{1}{x} > -2$

ت) $\exists y \in \mathbb{R} : \frac{y-3}{5} = 0$ درست

$y-3=0 \rightarrow y=3$

نقیض: $\forall y \in \mathbb{R} : \frac{y-3}{5} \neq 0$



صفحه ۲۹