تابع معکوس

در حالت کلی: $f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$

اگه تابع f { یک به یک باشه، پس f^{-1} تابعه. / یک به یک نباشه، f^{-1} تابع نیست.

هر تابع یک به یک معکوس پذیر چون معکوس ۱۰۰٪ یک تابعه.
تابع غیر یک به یک معکوس پذیر نیست چون معکوسش تابع نیست.

سؤال۱۳۸: اگر تابع $f=\{(۴,۴),(k,۱),(۲,۱),(۲k,m)\}$ معکوس پذیر باشد، m چیست؟

$f=\{(۴,۴),(k,۱),(۲,۱),(۲k,m)\}$ $\xrightarrow{k=۲}$ $f=\{(۴,۴),(۲,۱),(۴,m)\}\xrightarrow{\text{تابعه } f} m=۴$

چون f معکوس پذیر است قطعاً یک به یک است یعنی هیچ دو عضو متمایزی نباشد مؤلفه های دومشان یکسان باشد.

اگه می خواید بفهمید که نقطه‌ی $A'(\beta,\alpha)$ روی تابع f^{-1} قرار داره یا نه بهتره که غیرمستقیم عمل کنید. یعنی بررسی کنید که $A(\alpha,\beta)$ روی تابع f قرار داره یا نه. اگه A روی f قرار داشت پس A' هم روی f^{-1} قرار داره و در غیر اینصورت خیر.

سؤال۱۳۹: نمودار معکوس تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$ از کدام نقطه می گذرد؟

۱) $\left(\frac{۱}{۲},۱\right)$ ۲) $(۱,۰)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳},\sqrt{۳}\right)$

منظور سؤال اینه که کدوم یک از نقاط داده شده روی تابع f^{-1} قرار داره. کاملاً واضحه که نقطه‌ی $A'\left(\frac{۱}{۲},۱\right)$ روی تابع f^{-1} قرار داره و علتش هم اینکه نقطه‌ی $A\left(۱,\frac{۱}{۲}\right)$ روی تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$ قرار داره.

به نظر شما چه ارتباطی بین دامنه و برد توابع f و f' وجود داره؟

از اونجایی که در عمل معکوس کردن، جای x و y عوض میشه پس می تونیم بگیم که جای دامنه و برد هم عوض میشه.

$$D_f=R_{f^{-1}}\ ,\ R_f=D_{f^{-1}}$$

📖 سؤال۱۴۰: معکوس تابع $y=\sqrt[3]{x-1}-2$ رو به دست بیارید.

$$x=\sqrt[3]{y-1}-2 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1}=x+2 \Rightarrow y-1=(x+2)^3 \Rightarrow \underbrace{y=(x+2)^3+1}_{\text{y تنها شد}}$$

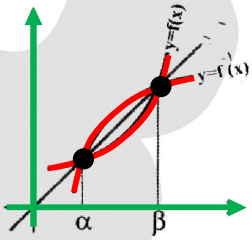
نتیجه $\quad \overset{f}{\boxed{y=\sqrt[3]{x-1}-2}} \Rightarrow \overset{f^{-1}}{\boxed{y=(x+2)^3+1}}$

$$y=x^2-2x+3\ ,\ x<1 \xrightarrow{\text{(معکوس کردن)}} x=y^2-2y+3\ ,\ y<1 \xrightarrow{\text{y تنها کردن}} x=(y-1)^2+2$$

$$\Rightarrow (y-1)^2=x-2 \Rightarrow |y-1|=\sqrt{x-2} \xrightarrow{y<1} -(y-1)=\sqrt{x-2} \Rightarrow y-1=-\sqrt{x-2} \Rightarrow \boxed{y=-\sqrt{x-2}+1}$$

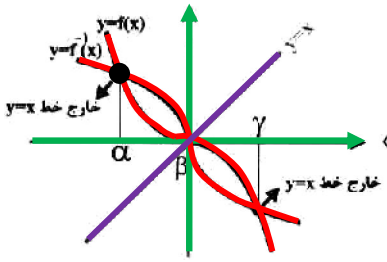
$$\overset{f(x)}{\boxed{y=g(2x+1)+1}} \xrightarrow{\text{معکوس}} x=g(2y+1)+1 \xrightarrow{\text{y تنها کردن}} g(2y+1)=x-1$$

$$\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{از طرفین تسلوی } g^{-1}} g^{-1}(g(2y+1))=g^{-1}(x-1) \Rightarrow 2y+1=g^{-1}(x-1) \Rightarrow 2y=g^{-1}(x-1)-1 \Rightarrow \overset{f^{-1}(x)}{\boxed{y=\frac{g^{-1}(x-1)-1}{2}}}$$



اگه *f* اکیداً صعودی باشه و نقاط برخورد تابع f با f^{-1} رو بخوان کافیه به جای حل معادله‌ی $f(x)=f^{-1}(x)$ ، معادله‌ی $y=f(x)$ رو حل کنیم.

اگه تابع f اکیداً صعودی باشه اون موقع نقاط برخورد f با f^{-1} **روی خط** $y=x$ **قرار داره.**



$f(x)=f^{-1}(x)$ جواب معادله $\rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ x=\beta \\ x=\gamma \end{cases}$

$f(x)=x$ جواب معادله $\rightarrow x=\beta$

سؤال۱۴۳: معکوس تابع $y=\frac{2x-1}{x-2}$ خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می کند؟

$\frac{2x-1}{x-2}=x \rightarrow x^2-2x=2x-1 \rightarrow x^2-4x+1=0 \xrightarrow{\Delta>0}$ دو ریشه و در نتیجه دو نقطه تلاقی داریم.

سؤال۱۴۴: در تابع با ضابطه $f(x)=-x+\sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

کافیه ببینیم به ازای چه x هایی مقدار تابع f مساوی ۴ می شود:

$$f^{-1}(4)=x \Rightarrow f(x)=4$$

$$\rightarrow -x+\sqrt{-2x}=4 \rightarrow \sqrt{-2x}=x+4 \rightarrow \text{۲ توان} \rightarrow -2x=x^2+8x+16 \rightarrow (x+2)(x+8)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-8 \end{cases}$$

اما $x=-8$ قابل قبول نیست زیرا در معادله بالا صدق نمی کند:

$$f^{-1}(4)=-2$$

سؤال۱۴۵: اگر $g(x)=f(3x-4)$,$f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

فرض کنیم $g^{-1}(16)=x$ یعنی: $g(x)=16$

$$f(3x-4)=16 \rightarrow 3x-4=f^{-1}(16) \xrightarrow[f^{-1}(16)=16+\sqrt{16}=16+4=20]{f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}} 3x-4=20 \rightarrow 3x=24 \rightarrow x=8$$

سؤال۱۴۶: اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$,$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟ (خارج از کشور ۸۹)

فرض می کنیم $g^{-1}(6)=x$ یا $g(x)=6$

$$f(x)+\sqrt{f(x)}=6 \xrightarrow{\sqrt{f(x)}=t\geq 0} t^2+t=6 \rightarrow t^2+t-6=0$$

$$\rightarrow (t+3)(t-2)=0 \rightarrow \begin{cases} t=-3 \\ t=2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{f(x)}=2 \rightarrow f(x)=4$$

$$f^{-1}(4)=x \xrightarrow{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}} f^{-1}(4)=\sqrt[3]{8}=2 \rightarrow g^{-1}(6)=x=2$$

سؤال۱۴۷: اگر $f(x)=x+\sin\left(\frac{\pi}{۴}x\right)$ نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در بازه $[-۱,۹]$ چند نقطه مشترک دارند؟

(خارج از کشور ۹۰)

$$f'=۱+\frac{\pi}{۴}\cos\left(\frac{\pi}{۴}x\right)$$

$$-۱\le\cos\left(\frac{\pi}{۴}x\right)\le۱\to-\frac{\pi}{۴}\le\frac{\pi}{۴}\cos\left(\frac{\pi}{۴}x\right)\le\frac{\pi}{۴}\to۰<۱-\frac{\pi}{۴}\le۱+\frac{\pi}{۴}\cos\left(\frac{\pi}{۴}x\right)\le۱+\frac{\pi}{۴}$$

پس $f'>۰$ و تابع صعودی است پس نقاط برخورد نمودارهای f و $f^{-۱}$ همان نقاط برخورد تابع f و خط $y=x$ است.

$$f(x)=x\to x+\sin\left(\frac{\pi}{۴}x\right)=x\to\sin\left(\frac{\pi}{۴}x\right)=۰$$

$$\frac{\pi}{۴}x=k\pi\to x=۴k\xrightarrow{x\in[-۱,۹]}x=۰,۴,۸$$

سؤال۱۴۸: دو تابع $f=[(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)]$, $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروضند تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟(خارج از کشور ۹۰)

$$g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$$

$$fog:\begin{cases}۲\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۲\\ ۳\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}۳\\ ۵\xrightarrow{g}۴\xrightarrow{f}۵\end{cases}\to fog=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

$$(fog)^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

سؤال۱۴۹: دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد a کدام است؟ (خرج تجربی ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

$$(g^{-۱}of^{-۱})(a)=(fog)^{-۱}(a)=۸\Rightarrow fog(۸)=a$$

$$\Rightarrow f(g(۸))=a\Rightarrow f(\sqrt{۵\times۸+۹})=f(\sqrt{۴۹})=f(۷)=۳\Rightarrow a=۳$$

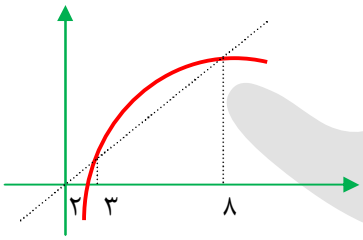
سؤال۱۵۰: دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد a کدام است. (داخل تجربی ۹۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

$$f^{-۱}(g(۲a))=۶\Rightarrow f(۶)=g(۲a)\Rightarrow ۳=g(۲a)\Rightarrow\frac{x}{x-۱}=۳\Rightarrow ۳x-۳=x$$

$$\Rightarrow ۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

سؤال۱۵۱: شکل رو به رو نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است.دامنه تابع با ضابطه $y=\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است. (داخل تجربی ۹۴)

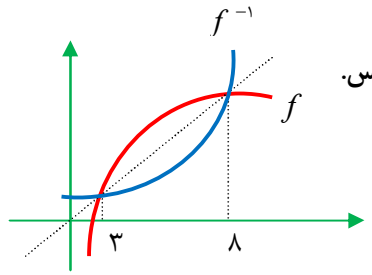


۱) $(۰,۲]$ ۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$ ۴) $[۳,۸]$

نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه هستند پس نمودار f^{-1} را رسم می کنیم.

اگر دقت کنید هر جا که f بالای نیمساز باشد نمودار f^{-1} پایین نیمساز است و بالعکس.



دامنه تابع y : $x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$

پس باید بازه ای را پیدا کنیم که نمودار $f^{-1}(x)$ زیر خط $y=x$ باشد یعنی همان جاهایی که $f(x)$ بالای خط $y=x$ است یعنی بازه $[3,8]$ قابل قبول است.

سؤال۱۵۲: اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$ باشد حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است. (داخل ریاضی ۹۵)

۱) $2x$ ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) x^2-1 ۴) صفر

$$y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4}) \Rightarrow 2y=x+\sqrt{x^2+4} \Rightarrow 2y-x=\sqrt{x^2+4} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$\Rightarrow 4y^2-4xy+x^2=x^2+4 \Rightarrow 4y^2-4=4xy \Rightarrow x=\frac{y^2-1}{y}=y-\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x-\frac{1}{x} \Rightarrow f^{-1}(x)+f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$$

سؤال۱۵۳: ضابطه وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است. (داخل تجربی ۹۱)

۱) $y=\frac{x}{1-|x|},|x|<1$ ۲) $y=\frac{1-|x|}{|x|},|x|>1$

۳) $y=\frac{x}{|x|-1},|x|>1$ ۴) $y=\frac{|x|-1}{x},|x|<1$

$$\begin{cases} x\geq 0: y=\frac{x}{1+x} \Rightarrow y+yx=x \Rightarrow x=\frac{y}{1-y} \xrightarrow{x\geq 0} 0\leq y<1 \\ x<0: y=\frac{x}{1-x} \Rightarrow y-yx=x \Rightarrow x=\frac{y}{1+y} \xrightarrow{x<0} -1<y<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{1-y} & 0\leq y<1 \\ \frac{y}{1+y} & -1<y<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{1-|y|},|y|<1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|},|x|<1$$

روش دوم) $y=\frac{x}{1+|x|} \xrightarrow{\text{مخرج کسر همواره مثبت است}} |y|=\frac{|x|}{1+|x|} \xrightarrow{x,y \text{ هم علامت هستند.}} |y|+|y||x|=|x| \Rightarrow |x|(1-|y|)=|y|$

$$\Rightarrow |x|=\frac{|y|}{1-|y|} \xrightarrow{|x|\geq 0} 1-|y|>0 \Rightarrow |y|<1 \Rightarrow x=\frac{y}{1-|y|},|y|<1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|},|x|<1$$

روش سوم) $\begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} \in f \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{vmatrix} \in f^{-1} \Rightarrow$ گزینه ۱ درست است.

توجه کنید در گزینه۳ هم به ازای $\frac{1}{2}$ مقدار ۱ بدست می آید اما $\frac{1}{2}$ در دامنه آن نیست.

سؤال۱۵۴: اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است. (داخل ریاضی ۹۰)

۱) $\tan x$ ۲) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ ۳) $\cot x$ ۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{x,y \text{ هم علامت اند}} y^2=\frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow y^2+y^2x^2=x^2 \Rightarrow x^2(1-y^2)=y^2$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2} \Rightarrow x=\pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \xrightarrow{x,y \text{ هم علامت اند}} x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{|\cos x|}$$

سؤال۱۵۵: اگر دو خط به معادلات $ax+by=8$ و $2x-3y=b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند. $a+b$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۳)

۱) ± 3 ۲) ± 2 ۳) ۳- و ۲ ۴) ۳ و ۲-

وقتی دو نمودار نسبت به نیمساز ربع اول متقارن هستند یعنی وارون هم هستند. باید وارون خط $2x-3y=b$ یعنی $2y-3x=b$ منطبق بر خط $ax+by=8$ باشد:

$$\begin{cases}2y-3x=b\\ ax+by=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3x+2y=b\\ ax+by=8\end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{a}=\underbrace{\frac{2}{b}=\frac{b}{8}}_{b^2=16 \Rightarrow b=\pm 4} \Rightarrow \begin{cases}b=4 \Rightarrow a=-6 \Rightarrow a+b=-2\\ b=-4 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a+b=2\end{cases} \Rightarrow a+b=\pm 2$$

سؤال۱۵۶: تابع با ضابطه $y=x|x-2|$ در یک بازه با بیشترین طول نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است. (داخل تجربی۹۴)

۱) $1-\sqrt{1+x}\,;x<0$ ۲) $1-\sqrt{1-x}\,;x<1$

۳) $1+\sqrt{1-x}\,;0<x<1$ ۴) $1-\sqrt{1-x}\,;0<x<1$

$$f(x)=x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 2\\ -x^2+2x & x\leq 2\end{cases}$$

شرط نزولی بودن $f'(x)<0$ است داریم:

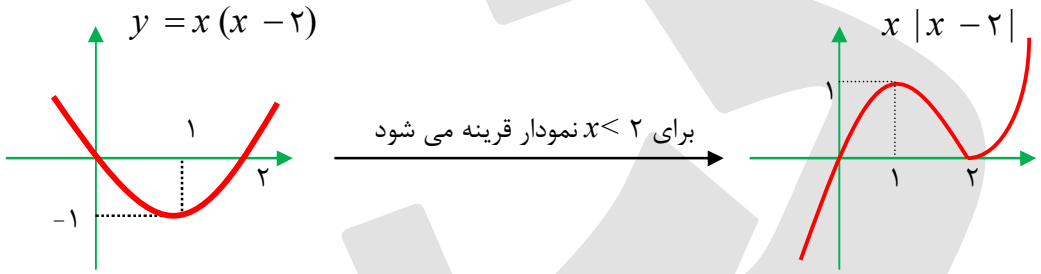
$$f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x>2\\ -2x+2 & x<2\end{cases} \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \begin{cases}2x-2<0 \Rightarrow x<1 & x>2 \Rightarrow \phi\\ -2x+2<0 \Rightarrow x>1 & x<2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<x<2\end{cases}$$

پس تابع f به ازای $1<x<2$ نزولی است که برد آن (دامنه f^{-1}) در این فاصله به صورت $(f(2),f(1))$ یعنی $0<y<1$ می باشد. حال ضابطه f^{-1} را می یابیم:

$$f(x)=-x^2+2x=-x^2+2x-1+1=-(x-1)^2+1 \Rightarrow y=-(x-1)^2+1$$
$$\Rightarrow (x-1)^2=1-y \Rightarrow x-1=\sqrt{1-y} \Rightarrow x=1+\sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}\,,0<x<1$$

گزینه(۳) درست است.

(روش دوم



دامنه f برای نزولی بودن به صورت $1<x<2$ است و برد آن $0<y<1$ می باشد.

به عنوان مثال: $x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}\left|\frac{3}{2}-2\right|=\frac{3}{4}\Rightarrow \left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{4}\end{matrix}\right.\in f \Rightarrow \left|\begin{matrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\right.\in f^{-1}$

گزینه (۳) درست است.

سؤال۱۵۷: نمودار تابع $y=|2x-6|-|x+4|+x$ در یک بازه بیشترین طول اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است. (داخلی ریاضی ۹۴)

۱) $-x+6;x<-4$

۲) $-x+5;x>2$

۳) $-\frac{1}{2}x+1;-4<x<3$

۴) $-\frac{1}{2}x+1;-4<x<10$

$$y=\begin{cases}-(2x-6)+(x+4)+x & x\le -4\\ -(2x-6)-(x+4)+x & -4<x<3\\ (2x-6)-(x+4)+x & x\ge 3\end{cases}=\begin{cases}0 & x\le -4\\ -2x+2 & -4<x<3\\ 2x-10 & x\ge 3\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع در فاصله (۳، ۴-) نزولی است:

$$\begin{cases}f(x)=-2x+2\\ -4<x<3\end{cases}\xrightarrow[f(3)=-4]{f(-4)=10}\begin{cases}f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1\\ -4<x<10\end{cases}$$

دقت کنید که دامنه f^{-1} همان برد f است.

سؤال۱۵۸: تابع با ضابطه $f(x)=2x-|4-2x|$ در بازه ای وارون پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است. (خارج ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{1}{4}x+1;x\ge 4$

۲) $\frac{1}{4}x-1;x\le 4$

۳) $\frac{1}{4}x-1;x\ge 4$

۴) $\frac{1}{4}x+1;x\le 4$

$$f(x)=\begin{cases}2x-(4-2x) & x\le 2\\ 2x-(-(4-2x)) & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}4x-4 & x\le 2\\ 2x+4-2x=4 & x\ge 2\end{cases}$$

یک به یک و وارون پذیر

تابع ثابت و غیر یک به یک

پس باید وارون تابع $f(x)=4x-4$ را با دامنه $x\le 2$ بدست آوریم:

$$x\le 2\Rightarrow y=4x-4\le 4\Rightarrow y=4x-4\Rightarrow 4x=y+4\Rightarrow x=\frac{1}{4}y+1\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+1, x\le 4$$

(روش دوم) $x\le 2 \xrightarrow{\text{به عنوان مثال}} \begin{vmatrix}0\\-4\end{vmatrix}\in f \Rightarrow \begin{vmatrix}-4\\0\end{vmatrix}\in f^{-1}$ گزینه (۴) درست است.

سؤال۱۵۹: ضابطه‌ی معکوس $y=2-\sqrt{x-1}$ کدام است؟ (داخلی تجربی ۹۲)

۱) $y=x^2-4x+5; x\le 2$ ۲) $y=-x^2+4x-5; x\le 2$

۳) $y=-x^2+4x+5; x\ge 1$ ۴) $y=x^2-4x+5; x\ge 1$

$$\sqrt{x-1}=2-y \xrightarrow[y\le 2]{2-y\ge 0} x-1=(2-y)^2\Rightarrow x=1+(2-y)^2\Rightarrow x=1+4-4y+y^2=y^2-4y+5$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-4x+5, x\le 2$$

(روش دوم) $y(5)=2-\sqrt{5-1}=0\Rightarrow \begin{vmatrix}5\\0\end{vmatrix}\in f \Rightarrow \begin{vmatrix}0\\5\end{vmatrix}\in f^{-1}$ گزینه (۱) درست است.

سؤال۱۶۰: تابع با ضابطه $f(x)=x^2-ax+3; x>3$ وارون پذیر است. اگر $f^{-1}(-5)=4$ باشد آنگاه $f^{-1}(-2)$ کدام است. (کانون۸۸)

$$f^{-1}(-5)=4\Rightarrow f(4)=-5\Rightarrow -5=16-4a+3\Rightarrow a=6$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2-6x+3$$

مطلوب مسأله: $f^{-1}(-2)=x\Rightarrow f(x)=-2\Rightarrow -2=x^2-6x+3\Rightarrow x^2-6x+5=0$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5)=0\Rightarrow \begin{cases}x=1\\x=5\end{cases}\xrightarrow{x>3} x=5$$

سؤال۱۶۱: تابع معکوس $y=x|x|$ کدام است؟ (کانون ۹۴)

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$

۳) $f^{-1}(x)=-\sqrt{|x|}$ ۴) تابع f معکوس ناپذیر است.

$$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x\le 0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}\xrightarrow{x\ge 0} x=\sqrt{y}\xrightarrow{x\ge 0} y\ge 0\\ y=-x^2\Rightarrow x^2=-y\Rightarrow x,\pm\sqrt{-y}\xrightarrow{x<0} x=-\sqrt{-y}\xrightarrow{x<0} y<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$$

سؤال۱۶۲: اگر $f(x)=f^{-1}(5)+x-3$ باشد آنگاه $f(5)$ کدام است. (آزمون کانون ۹۴)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

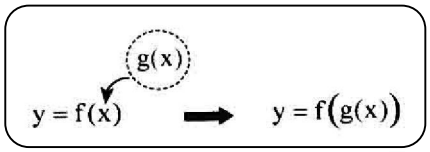
$$\begin{vmatrix}5\\f^{-1}(5)\end{vmatrix}\in f^{-1}(x)\Rightarrow \begin{vmatrix}f^{-1}(5)\\5\end{vmatrix}\in f(x)\xrightarrow[f(x)=5]{x=f^{-1}(5)} 5=f^{-1}(5)+f^{-1}(5)-3\Rightarrow 2f^{-1}(5)=8\Rightarrow f^{-1}(5)=4$$

$$\Rightarrow f(x)=4+x-3\Rightarrow f(x)=x+1\Rightarrow f(5)=5+1=6$$

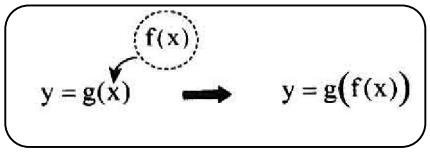
ترکیب دو تابع و دامنه fog و gof

روش بدست آوردن ضابطه‌ی توابع fog و gof

فرض کنید ضابطه توابع f و g رو در اختیار دارید.



۱. برای بدست آوردن ضابطه‌ی تابع $y = f(g(x))$ کافیه که ضابطه‌ی g رو درون f قرار بدید. یعنی به جای x های تابع f ، ضابطه‌ی $g(x)$ رو جایگزین کنید.



۲. برای بدست آوردن ضابطه‌ی تابع $y = g(f(x))$ کافیه که ضابطه‌ی f رو درون g قرار بدید. یعنی به جای x های تابع g ، ضابطه‌ی $f(x)$ رو جایگزین کنید.

سؤال۱۶۳: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد ضابطه‌ی $fof(x)$ کدامست؟

۱) $-x$ ۲) x ۳) $\frac{x+1}{x}$ ۴) $\frac{x-1}{x}$

پاسخ: گزینه (۲)

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

سؤال۱۶۴: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ باشد ضابطه‌ی $fof(x)$ کدامست؟

۱) x^2 ۲) ۱ ۳) x ۴) x^2+1

پاسخ: گزینه (۲)

چون تابع f دو ضابطه ایه باید بفهمیم حرف حسابش چیه.

f میگه: اگه ورودی به من منفی باشه من اون ورودی رو به توان دو می رسونم.

اگه ورودی به من نامنفی باشه من خروجی ۱ تحویل می دم.

$$f(\square) = \begin{cases} \square^2 & \square < 0 \\ 1 & \square \geq 0 \end{cases}$$

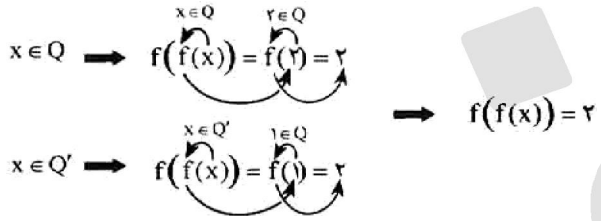
حالا که فهمیدیم f با ورودی های خودش چی کار می کنه، بریم سراغ پیدا کردن ضابطه‌ی $f(f(x))$.

همونطور که می دونید برای تشکیل $f(f(x))$ باید از x هی دامنه‌ی f شروع کنیم، یعنی:

$$\begin{cases} x < 0 \rightarrow f(f(x)) = f(x^2) = 1 \\ x \geq 0 \rightarrow f(f(x)) = f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(f(x)) = 1$$

سؤال۱۶۵: اگر $f(x)=\begin{cases}۲ & x\in Q\\ ۱ & x\in Q'\end{cases}$ **باشد ضابطه‌ی** $fof(x)$ **کدامست؟**

ببینم حرف حساب f چیه. f داره میگه:
- اگه ورودی گویا بهم بدید، خروجی گویای ۲ بهتون می دم.
- اگه ورودی گنگ بهم بدید، خروجی گویای ۱ بهتون می دم.



سؤال۱۶۶: اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ ۴ & x<۰\end{cases}$ **مقدار** $f(f(-f(x)))$ **کدام است. (سنجش)**

$f(x)$ به ازای هر $x\neq ۰$ مقداری مثبت دارد و به ازای $x=۰$ حاصل آن صفر است.

$$\begin{cases}x=۰\Rightarrow f(f(-f(۰)))=f(f(۰))=f(۰)=۰\\ x\neq ۰\Rightarrow f(x)>۰\Rightarrow -f(x)<۰\Rightarrow f(\underbrace{-f(x)}_{\text{منفی}})=۴\Rightarrow f(f(-f(x)))=f(۴)=\sqrt{۴}=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(f(-f(x)))=\begin{cases}۰ & x=۰\\ ۲ & x\neq ۰\end{cases}$$

سؤال۱۶۷: اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ **،** $g(x)=\sin^۴x$ **باشند ضابطه تابع** fog **کدام است. (تجربی۹۲)**

۱) $-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$ ۳) $\frac{۱}{۴}\cos^۲ ۲x$ ۴) $\frac{۱}{۲}\cos^۲ ۲x$

$$f(g(x))=f(\sin^۴x)=\sin^۴x-\sqrt{\sin^۴x}=\sin^۴x-\sin^۲x=\sin^۲x(\sin^۲x-۱)$$
$$=\sin^۲x(-\cos^۲x)=-\sin^۲x\cos^۲x=-(\sin x\cos x)^۲=-\left(\frac{۱}{۲}\sin ۲x\right)^۲=-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$$

سؤال۱۶۸: اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ ، $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ ، $g(f(a))=۵$ **باشد عدد a کدام است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ **(داخلی تجربی۹۱)**

$$g(f(a))=۵\Rightarrow f(a)=۶\Rightarrow a+\sqrt{a}=۶\Rightarrow a+\sqrt{a}-۶=۰$$
$$\Rightarrow(\sqrt{a}-۲)(\underbrace{\sqrt{a}+۳}_{\text{مثبت}})=۰\Rightarrow\sqrt{a}-۲=۰\Rightarrow\sqrt{a}=۲\Rightarrow a=۴$$

سؤال۱۶۹: اگر $f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}$ **مقدار** $f(f(-۱))$ **کدام است. (تجربی ۸۸)**

۱) تعریف نشده ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

$f(-۱)=\sqrt{۲-(-۱)-(-۱)^۲}=\sqrt{۲+۱-۱}=\sqrt{۲}$

$f(f(-۱))=f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-(\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۲}-۲}=\sqrt{\underbrace{-\sqrt{۲}}_{\text{منفی}}}$ تعریف نشده

سؤال۱۷۰: در تابع $f(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x+۴} & x>۳\\ ۲x+۳ & x\le ۳\end{cases}$ مقدار $f(f(۵))+f(f(۱))$ کدام است؟ (تجربی۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

$f(۵)\xrightarrow{۵>۳}۵-\sqrt{۵+۴}=۵-\sqrt{۹}=۲\Rightarrow f(f(۵))=f(۲)\xrightarrow{۲<۳}۲(۲)+۳=۷$

$f(۱)\xrightarrow{۱<۳}۲(۱)+۳=۵\Rightarrow f(f(۱))=f(۵)\xrightarrow{۵>۳}۵-\sqrt{۵+۴}=۲$

$\Rightarrow f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$

سؤال۱۷۱: اگر $f(x)=[x]$, $g(x)=\frac{x}{۱-x}$ آنگاه $fog(\sqrt{۲})$ کدام است؟ (تجربی ۸۶)

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

$g(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}\times(۱+\sqrt{۲})}{(۱-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})}=\frac{\sqrt{۲}+۲}{-۱}=-۲-\sqrt{۲}$

$\Rightarrow f(g(\sqrt{۲}))=f(-۲-\sqrt{۲})=[\underbrace{-۲-\sqrt{۲}}_{\text{حدوداً }-۳/۴}]=-۴$

سؤال۱۷۲: اگر $f(x)=|x|$, $g(x)=x^۲+۲x+۱$ حاصل $fog(۱-\sqrt{۲})-gof(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$ (داخل تجربی ۸۹)

$g(x)=(x+۱)^۲\Rightarrow g(۱-\sqrt{۲})^۲=(۱-\sqrt{۲}+۱)^۲=(۲-\sqrt{۲})^۲=۴-۴\sqrt{۲}+۲=۶-۴\sqrt{۲}\Rightarrow f(g(۱-\sqrt{۲}))$

$=f(۶-۴\sqrt{۲})=|۶-۴\sqrt{۲}|=۶-۴\sqrt{۲}$

$f(۱-\sqrt{۲})=|۱-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow g(f(۱-\sqrt{۲}))=g(\sqrt{۲}-۱)=(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲$

$fog(۱-\sqrt{۲})-gof(۱-\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$

سؤال۱۷۳: اگر $f(x)=x^۲-۲[x]$ مقدار $f\left(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})\right)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

$f(x)=x^۲-۲[x]\Rightarrow f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-۲[\sqrt{۳}]=۳-۲(۱)=۱$

$\Rightarrow f\left(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})\right)=f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲-۲\left[-\frac{۱}{۲}\right]=\frac{۱}{۴}-۲(-۱)\Rightarrow\frac{۱}{۴}+۲=۲/۲۵$

سؤال۱۷۴: اگر $f(x)=|x|-x$ ضابطه $fof(x)$ برابر است با..... (سراسری ۸۳)

$$f(f(x))=f(|x|-x)=\underbrace{|x|-x}_{\text{همواره نامنفی}}|-(|x|-x)=|x|-x-|x|+x=0$$

سؤال۱۷۵: اگر $f(x)=2-|x-2|$ ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۹۰)

$$f(f(x))=f(2-|2-x|)=2-|(2-|2-x|)-2|=2-|-|2-x||=2-|2-x|=f(x)$$

سؤال۱۷۶: اگر $f(x)=2x^2-x-1$ ، $g(x)=5+2x$ ریشه های معادله $fog(x)=0$ کدام است؟ (سنجش)

بهتر است ابتدا ببینیم تابع f چه وقت مساوی صفر می شود: $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0\rightarrow x=-\frac{1}{2},1$

حال کافیه معادله های $g(x)=-\frac{1}{2},g(x)=1$ رو حل کنیم: $\begin{cases}5+2x=1\\5+2x=-\frac{1}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=-\frac{11}{4}\end{cases}$

سؤال۱۷۷: اگر $f(x)=x^2+x-2$ ، $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار می گیرند برابر کدام بازه است.

۱) $(-5,1)$ ۲) $(-1,5)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,5)$ (خارج تجربی ۹۱)

$$f(g(x))<0$$

ابتدا محدوده ای را می یابیم که $x^2+x-2<0$ یعنی یا

$$(x+2)(x-1)<0\Rightarrow -2<x<1$$

پس برای اینکه $f(g(x))<0$ شود باید:

$$-2<g(x)<1\Rightarrow -2<\frac{1}{2}(x-3)<1\Rightarrow -4<(x-3)<2\Rightarrow -1<x<5$$ **گزینه۲**

سؤال۱۷۸: اگر $f(x)=x^2+3x$ ، $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار گیرد برابر کدام بازه است.

۱) $(-4,1)$ ۲) $(-3,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-1,4)$ (داخلی تجربی ۹۱)

$$gof(x)=-\frac{1}{2}g(x)+2=-\frac{1}{2}x(x^2+3x)+2=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

$$gof(x)>0\Rightarrow -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2>0\Rightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2<0\Rightarrow x^2+3x-4<0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-1)<0\Rightarrow -4<x<1$$

راه حل دوم) ابتدا نقاط را پیدا می کنیم که $g(x)>0$ باشد یعنی:

$$-\frac{1}{2}x+2>0\Rightarrow \frac{1}{2}x<2\Rightarrow x<4$$

پس برای اینکه $g(f(x))>0$ باشد باید $f(x)<4$ شود یعنی:

$$x^2+3x<4\Rightarrow x^2+3x-4<0\Rightarrow (x+4)(x-1)<0\Rightarrow -4<x<1$$

سؤال۱۷۹: اگر $fog(x)=8x^2+6x+5, g(x)=2x+1$ **باشد تابع** $f(x)$ **کدام است؟ (خارج تجربی ۹۵)**

۱) $2x^2+3x+1$ ۲) $2x^2-2x+3$ ۳) $2x^2-x+4$ ۴) $2x^2+x+3$

$$\boxed{(2x+1)^2=4x^2+4x+1}$$

$$f(2x+1)=8x^2+6x+5=2(4x^2+4x+1)-(2x+1)+4=2(2x+1)^2-(2x+1)+4$$
$$\Rightarrow f(x)=2x^2-x+4$$

سؤال۱۸۰: اگر $fog(x)=4(x^2-4x+5), g(x)=2x-3$ **تابع** $f(x)$ **کدام است. (داخلی ریاضی ۹۳)**

۱) x^2-4x+3 ۲) x^2-4x+5 ۳) x^2-2x+5 ۴) x^2-2x+3

$$\boxed{(2x-3)^2=4x^2-12x+9}$$

$$f(2x-3)=4x^2-16x+20\Rightarrow(2x-3)^2-2(2x-3)+5\Rightarrow f(x)=x^2-2x+5$$

روش دوم) $x=2: f(g(2))=4(4-8+5)\Rightarrow f(g(2))=4\xrightarrow{g(2)=1} f(1)=4$

تنها گزینه ای که به ازای $x=1$ مقدار ۴ را می دهد گزینه ۳ است.

سؤال۱۸۱: اگر $f(x)=2x+3$ **باشند ضابطه** $g(f(x))=8x^2+22x+20$ **کدام است. (داخل ریاضی ۹۲)**

۱) $2x^2-7x+3$ ۲) $2x^2-3x+7$ ۳) $4x^2-2x+1$ ۴) $4x^2-4x+11$

$$\boxed{(2x+3)^2=4x^2+12x+9}$$

$$g(2x+3)=8x^2+22x+20\Rightarrow 2(2x+3)^2-(2x+3)+5$$
$$\Rightarrow g(x)=2x^2-x+5$$
$$\Rightarrow gof=f(g(x))=2g(x)+3=4x^2-2x+10+3=4x^2-2x+13$$

سؤال۱۸۲: اگر $f(x)=x^2-x-2, f(g(x))=x^2+x-2$ **آنگاه** $(f+g)(x)$ **کدام گزینه می تواند باشد.**

۱) x^2-1 ۲) x^2+1 ۳) x^2-2x ۴) x^2+2x **(خارج تجربی ۹۰)**

$$f(g(x))=(g(x))^2-g(x)-2=g^2-g-2=x^2+x-2$$
$$\Rightarrow g^2-g=x^2+x\Rightarrow g^2-g-x^2-x=0\Rightarrow g^2-x^2-g-x=0$$
$$\Rightarrow (g-x)(g+x)-(g+x)=0\Rightarrow (g+x)(g-x-1)=0$$

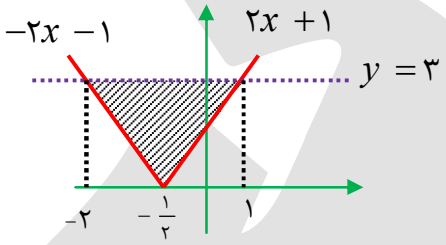
$$\begin{cases} g+x=0\Rightarrow g=-x \\ g-x-1=0\Rightarrow g=x+1 \end{cases} \xrightarrow{f(x)=x^2-x-2} \begin{cases} (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-x-2-x=x^2-2x-2 \\ \text{یا} \\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-x-2+x-1=x^2-1 \end{cases}$$

سؤال۱۸۳: اگر $f(x)=x^2+x, g(x)=\sqrt{4x+1}$ **باشند مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع** ***gof*** **و خط** $y=3$ **به معادله کدام است. (داخل تجربی ۹۵)**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۶

$$g(f(x))=\sqrt{۴f(x)+۱}=\sqrt{۴x^{۲}+۴x+۱}=\sqrt{(۲x+۱)^{۲}}=|۲x+۱|$$

$$|۲x+۱|=۳\Rightarrow\begin{cases}۲x+۱=۳\\۲x+۱=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۲\end{cases}$$



$$\Rightarrow S=\frac{۳\times۳}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

سؤال۱۸۴: اگر $f(x^{۲}+۲x)=\frac{x^{۴}+۴}{x^{۲}-۲x+۲}$ مقدار $f(۵)$ کدام است. (کانون ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۴) ۷ ۴) ۹

$$x^{۴}+۴=x^{۴}+۴x^{۲}+۴-۴x^{۲}=(x^{۲}+۲)^{۲}-۴x^{۲}=(x^{۲}+۲-۲x)(x^{۲}+۲+۲x)$$

$$\Rightarrow f(x^{۲}+۲x)=\frac{(x^{۲}-۲x+۲)(x^{۲}+۲x+۲)}{x^{۲}-۲x+۲}=x^{۲}+۲x+۲$$

$$\Rightarrow f(x)=x+۲\Rightarrow f(۵)=۷$$

سؤال۱۸۵: اگر $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x-\frac{۱}{x}$ ، $g\left(x-\frac{۱}{x}\right)=x+\frac{۱}{x}$ برای مقدار $fog\left(\frac{۵}{۲}\right)$ کدام است.

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

$$\left.\begin{array}{l}f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x-\frac{۱}{x}\\x+\frac{۱}{x}=g\left(x-\frac{۱}{x}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow f\underbrace{\left(g\left(x+\frac{۱}{x}\right)\right)}_{u}=x-\frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow f(g(u))=u\Rightarrow f(g(x))=x\Rightarrow fog\left(\frac{۵}{۲}\right)=\frac{۵}{۲}$$

سؤال۱۸۶: اگر $f(x+\sqrt{۲x-۱})=x^{۲}-۶$ باشد حاصل $f(۱)$ کدام است.

۱) $-۴\sqrt{۲}$ ۲) $-۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

$$x+\sqrt{۲x-۱}=۱\Rightarrow\sqrt{۲x-۱}=۱-x\xrightarrow[۱-x\geq۰]{۲x-۱\geq۰}$$

$$\xrightarrow[x\leq۱]{x\geq\frac{۱}{۲}\text{ به توان }۲}۲x-۱=(۱-x)^{۲}\xrightarrow{\frac{۱}{۲}\leq x\leq۱}۲x-۱=۱+x^{۲}-۲x\xrightarrow{\frac{۱}{۲}\leq x\leq۱}$$

$$x^{۲}-۴x+۲=۰\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۲}\Rightarrow x=۲-\sqrt{۲}\Rightarrow f(۱)=(۲-\sqrt{۲})^{۲}-۶=۴-۴\sqrt{۲}+۲۶=-۴\sqrt{۲}$$

سؤال۱۸۷: اگر $f\left(\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\right)=x+\frac{۱}{x}$ باشد $(x>۰)$ ضابطه $f(\cos x)$ با فرض $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ کدام است.

۱) $\frac{۲}{\sin x}$ ۲) $۲\tan x$ ۳) $\frac{۱}{\sin x}$ ۴) $\tan x$

روش اول)

$$f\left(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\right)=x+\frac{۱}{x}\ ,\ \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}=y\Rightarrow(y+۱)x^۲=۱-y\Rightarrow x^۲=\frac{۱-y}{۱+y}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{۱-y}{۱+y}}\xrightarrow{x>۰}x=\sqrt{\frac{۱-y}{۱+y}}$$

$$\Rightarrow f(\cos x)=\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}}+\sqrt{\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}}=\sqrt{\frac{۲\sin\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}+\sqrt{\frac{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}}$$

$$=\left|\tan\frac{x}{۲}\right|+\left|\cot\frac{x}{۲}\right|\xrightarrow{x\text{ در ناحیه اول}}\tan\frac{x}{۲}+\cot\frac{x}{۲}=\frac{۲}{\sin x}$$

روش دوم) : می دانیم $\cos x=\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$

اگر به جای x، $\tan\frac{x}{۲}$ را قرار دهیم:

$$f\left(\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}\right)=\tan\frac{x}{۲}+\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}=\tan\frac{x}{۲}+\cot\frac{x}{۲}\Rightarrow f(\cos x)=\tan\frac{x}{۲}+\cot\frac{x}{۲}=\frac{۲}{\sin x}$$

سؤال۱۸۸: اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۴}, g(x)=\sqrt{x^۲+۴}, ۰<a<۱$ آنگاه حاصل $f\left(a+\frac{۱}{a}\right)+g\left(a-\frac{۱}{a}\right)$ کدام است؟

$$\sqrt{\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲-۴}+\sqrt{\left(a-\frac{۱}{a}\right)^۲+۴}=\sqrt{\left(a-\frac{۱}{a}\right)^۲}+\sqrt{\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲}$$

$$\underbrace{\left|a-\frac{۱}{a}\right|}_{\text{منفی}}+\underbrace{\left|a+\frac{۱}{a}\right|}_{\text{مثبت}}\qquad ۰<a<۱\rightarrow\frac{۱}{a}>a$$

$$-a+\frac{۱}{a}+a+\frac{۱}{a}=\frac{۲}{a}$$

دامنه‌ی توابع fog و gof

$$y=f(g(x))\rightarrow D_{fog}=\{x\mid x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$$

$$y=g(f(x))\rightarrow D_{gof}=\{x\mid x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}$$

سؤال۱۸۹: اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ ، $g(x)=\log_{۲}^{(x^{۲}+۲x)}$ باشند دامنه fog کدام است. (داخلی تجربی ۹۴)

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[-۴,-۱)\cup(۱,۲]$ ۴) $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

$$D_f: ۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳$$

$$D_g: x^{۲}+۲x>۰\Rightarrow x(x+۲)>۰\Rightarrow \begin{cases} x>۰ \\ \text{یا} \\ x<-۲ \end{cases}$$

$$D_{fog}:\{x\in D_g \mid g\in D_f\}:\{x>۰ \text{ یا } x<-۲ \mid \log_{۲}^{(x^{۲}+۲x)}\leq ۳\}$$

$$\Rightarrow \log_{۲}^{(x^{۲}+۲x)}\leq ۳\Rightarrow x^{۲}+۲x\leq ۸\Rightarrow x^{۲}+۲x-۸\leq ۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)(x-۲)\leq ۰\Rightarrow -۴\leq x\leq ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>۰ \\ \\ x<-۲ \end{cases} \cap -۴\leq x\leq ۲ = -۴\leq ۰<-۲ \text{ یا } ۰<x\leq ۲ = [-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

روش دوم) $f(g(x))=\sqrt{۳-\log_{۲}^{(x^{۲}+۳x)}}$ است عددی که باعث اختلاف در گزینه ها می شود را چک می کنیم.

$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow f(g(۰))=f(۰)= \text{(تعریف نشده)} \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{گزینه ۱ و ۲ نادرست است} \\ x=-۱ \Rightarrow f(g(-۱))= \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{گزینه۳ نادرست است} \end{cases}$

گزینه ۴ درست است.

سؤال۱۹۰: اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ ، $g(x)=\log(x^{۲}-۱۵x)$ باشند دامنه fog کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۵)

۱) $(۰,۵]\cup[۲۰,۲۵)$ ۲) $(-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$ ۳) $[۱۵,۲۰]$ ۴) $[-۵,۰)$

$$D_f: ۲-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲$$

$$D_g: x^{۲}-۱۵x>۰\Rightarrow x(x-۱۵)>۰\Rightarrow \begin{cases} x>۱۵ \\ \text{یا} \\ x<۵ \end{cases}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g\in D_f\}=\{x>۱۵ \text{ یا } x<۰ \mid \log(x^{۲}-۱۵x)\leq ۲\}$$

$$\Rightarrow \{x>۱۵ \text{ یا } x<۰ \mid x^{۲}-۱۵x\leq ۱۰۰\}$$

$$\Rightarrow \{x>۱۵ \text{ یا } x<۰ \mid x^{۲}-۱۵x-۱۰۰\leq ۰\}$$

$$\Rightarrow \{x>۱۵ \text{ یا } x<۰ \mid (x-۲۰)(x+۵)\leq ۰\}$$

$$\Rightarrow \{x>۱۵ \text{ یا } x<۰ \mid -۵\leq x\leq ۲۰\}$$

$$\Rightarrow [-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$$

سؤال۱۹۱: اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^{۲}+x+۲}}$,$g(x)=\left(\frac{۱}{۴}\right)^{x}$ باشند دامنه تابع fog کدام است.(خارج تجربی ۹۴)

۱) $\left(-\frac{۱}{۲},+\infty\right)$ ۲) $\left(\frac{۱}{۲},+\infty\right)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $\left(-۱,\frac{۱}{۲}\right)$

$$\begin{cases} D_g = R \\ D_f : -x^{۲}+x+۲>۰ \Rightarrow x^{۲}-x-۲<۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۲ \end{cases}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid -۱<\left(\frac{۱}{۴}\right)^{x}<۲\}$$

$$\underbrace{-۱<\left(\frac{۱}{۴}\right)^{x}<۲}_{\text{همواره صحیح است}} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۴}\right)^{x}<۲ \Rightarrow ۲^{-۲x}<۲^{۱} \Rightarrow -۲x<۱ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۲}$$

پس دامنه $fog(x)$ برابر $\left(-\frac{۱}{۲},+\infty\right)$ است.

سؤال۱۹۲: اگر تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۲-x^{۲}}}{x}$ و تابع $|x|<\frac{\pi}{۲}$ باشند دامنه fog کدام است. (داخلی تجربی ۸۷)

۱) $\left[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}\right]$ ۲) $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}\right)$ ۳) $\left[-\frac{\pi}{۴},۰\right)\cup\left(۰,\frac{\pi}{۴}\right]$ ۴) $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$

$$D_f : [-۱,۱]-\{۰\}$$

$$D_{fog}=\{x\in Dlg \mid g\in D_f\}=\{|x|<\frac{\pi}{۲} \mid \tan x\in D_f\}$$

$$\Rightarrow -۱\le \tan x\le ۱, \tan x\neq ۰ \Rightarrow -\frac{\pi}{۴}\le x\le \frac{\pi}{۴}, x\neq ۰$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\left[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}\right]-\{۰\}=\left[-\frac{\pi}{۴},۰\right)\cup\left(۰,\frac{\pi}{۴}\right]$$

سؤال۱۹۳: اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$,$g(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۴x}$ دامنه gof کدام است؟ (خارج ۸۷)

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$ ۲) $R-\{۰,۸\}$
۳) $R-\{۰\}$ ۴) $(۰,+\infty)$

$$D_f : x+|x|\ge ۰ \Rightarrow x\in R$$

$$D_g : x^{۲}-۴x\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۰,۴$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f\in D_g\}=\{x\in R \mid \sqrt{x+|x|}\neq ۰,۴\} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+|x|}\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۰ \\ \sqrt{x+|x|}\neq ۴ \Rightarrow x+|x|\neq ۱۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+|x|\neq ۱۶ \xrightarrow{x\ge ۰} ۲x\neq ۱۶ \Rightarrow x\neq ۸$$

$$\Rightarrow D_{gof}=R-\{۰,۸\}$$

لگاریتم و تابع نمایی

$$\log_b^a = c \Leftrightarrow a = b^c$$

توجه: دو رابطه $\log_a^a = ۱$ و $\log_a^۱ = ۰$ به کمک قرارداد ***log*** بوجود اومده. (با شرط $a > ۰, a \neq ۱$)

توجه: $\log_b^a$ رو به فارسی اینجوری می خونیم «لگاریتم عدد ***a*** بر مبنای ***b***» یا«لگاریتم عدد ***a*** بر پایه ***b***» اگه مبنای یک لگاریتم ۱۰ باشه طبق قرارداد می تونید مبنای ۱۰ رو ننویسید یعنی: $\log_{۱۰}^x = \log x$

$$\log_a^{x.y} = \log_a^x + \log_a^y \qquad \log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$$

مثال۱۹۴: اگر $a_n = \log_۲ \frac{n}{n+۱}$ به طوری که $a_۱ + a_۲ + ... + a_n = -۴$ باشد مقدار ***n*** کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه۳

$$a_۱ + a_۲ + ... + a_n = \log_۲ \frac{۱}{۱+۱} + \log_۲ \frac{۲}{۱+۲} + \log_۲ \frac{۳}{۳+۱} + ... + \lg \frac{n}{n+۱} = -۴$$

$$\Rightarrow \log_۲ \left(\frac{۱}{۱+۱} \times \frac{۲}{۲+۱} \times \frac{۳}{۳+۱} \times ... \times \frac{n}{n+۱} \right) = -۴ \Rightarrow \log_۲ \frac{۱}{n+۱} = -۴$$

$$\Rightarrow \log_۲ (n+۱) = ۴ \Rightarrow n+۱ = ۱۶ \Rightarrow n = ۱۵$$

مثال۱۹۵: اگر ***a*** , ***b*** ریشه های معادله $x^۲ - ۱۰x + ۰/۱ = ۰$ باشند حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ: گزینه۱

در هر معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ حاصل جمع ریشه ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه ها $\frac{c}{a}$ است پس اگر ***a*** , ***b*** ریشه های معادله $x^۲ - ۱۰x + ۰/۱ = ۰$ باشند داریم:

$$S = a + b = ۱۰$$

$$P = ab = ۰/۱$$

در نتیجه:

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log(ab) - \log(a+b)$$

$$= \log \frac{ab}{a+b} = \log \frac{۰/۱}{۱۰} = \log \frac{۱}{۱۰۰} = -۲$$

باتوجه به اینکه $\log_{a.b}^{a.b}=۱$ هست. می خوام یک نتیجه جالب بگیر:

$$\log_{a.b}^{a.b}=۱\longrightarrow \log_{a.b}^{a}+\log_{a.b}^{b}=۱\Rightarrow \boxed{\log_{a.b}^{a}=۱-\log_{a.b}^{b}}$$

فامیل رابطه (۱)

$$\log_{۱۰}^{۲}=۱-\log_{۱۰}^{۵}\ (۲\times۵=۱۰)\quad,\quad \log_{۲۱}^{۳}=۱-\log_{۲۱}^{۷}\ (۳\times۷=۲۱)\quad,\quad \log_{۱۵}^{۵}=۱-\log_{۱۵}^{۳}\ (۵\times۳=۱۵)$$

مثال۱۹۶: اگر $\log^{۲}=a$ باشد مقدار $\log ۵۰$ را برحسب a بنویسید.

داده مسئله $\log^{۲}=a$ هست بنابراین خواسته مسئله رو طوری باز می کنیم تا برحسب داده مسئله درست بشه.

$$\log_{۱۰}^{۵۰}=\underbrace{\log_{۱۰}^{۱۰\times۵}}=\log_{۱۰}^{۱۰}+\underbrace{\log_{۱۰}^{۵}}=۱+\underbrace{(۱-\log_{۱۰}^{۲})}=۱+۱-a=۲-a$$

مثال۱۹۷: اگر $\log^{۳}=۰/۴, \log^{۲}=۰/۳$ باشه حاصل $\log^{۱۵}$ کدام است؟

۱) ۰/۱۱ ۲) ۱/۱ ۳) ۱/۶ ۴) ۰/۱۶

$$\log^{۱۵}=\log^{۳(۵)}=\log^{۳}+\log^{۵}=\log^{۳}+(۱-\log^{۲})=۰/۴+(۱-۰/۳)=۰/۴+۰/۷=۱/۱$$

مثال۱۹۸: اگر لگاریتم ۱۲ در پایه ۶ برابر a باشد آنگاه لگاریتم ۳ در پایه ۶ کدام است؟

۱) $۲-a$ ۲) $a-۲$ ۳) $۱-a$ ۴) $a-۱$

پاسخ: **گزینه ۱**

$$\log_{۶}^{۱۲}=\log_{۶}^{(۲\times۶)}=\log_{۶}^{۲}+۱=a\Rightarrow \log_{۶}^{۲}=a-۱$$

$$\log_{۶}^{۳}=\log_{۲}^{\frac{۶}{}}=۱-\log_{۶}^{۲}=۱-(a-۱)=۲-a$$

رابطه (۲) همراه با فامیل هاش:

$$\boxed{\log_{y^{b}}^{x^{a}}=\frac{a}{b}\log_{y}^{x}}$$

مثال۱۹۹: اگر $\log_{a}^{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۳}{۴}$ باشد $\log_{۴}^{(a-۱)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$\log_a^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{حذف } log} \sqrt[3]{3} = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 3^{(\frac{1}{2})} = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 3^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{4}} \xrightarrow[\text{می رسانیم } \frac{4}{3}]{\text{طرفین را به توان}} \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow 3^2 = a \Rightarrow a = 9 \Rightarrow \log_4^{(a-1)} = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2}$$

فامیل رابطه (۲)

(۱) $\log_y^x = \log_{y^n}^{x^n}$

(۲) $\log_y^x = \log_{\sqrt[n]{y}}^{\sqrt[n]{x}}$

(۳) $\log_y^x = \log_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{x}}$

مثال۲۰۰: اگر $3^a = A$ باشد $\log_3 9A^2$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) $2+2a$ ۲) $3+2a$ ۳) $2+a^2$ ۴) $3+a^2$

پاسخ: **گزینه۱**

$$2+2\log_3 A = 2+2\log_3 3^a = 2+2a$$

(۳) $\log_3 9A^2$ (۱) $\log_3 9 + \log_3 A^2$ (۲) $2+2\log_3 A$

تذکر:
$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b \quad (1)$$
$$\log_b a^n = n\log_b a \quad (2),(3)$$

مثال۲۰۱: اگر $\log 5 = 3k$ باشد $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $1-4k$ ۲) $2-5k$ ۳) $1-2k$ ۴) $1-k$

پاسخ: **گزینه۱**

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 = 3k \Rightarrow \log 2 = 1 - 3k$$

به کمک خاصیت $\log_b a^n = n\log_b a, \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ داریم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log 1/6^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 1/6 = \frac{1}{3}(\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3}(\log 2^4 - 1) = \frac{1}{3}(4\log 2 - 1)$$

با توجه به تساوی $\log 2 = 1 - 3k$ داریم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \frac{1}{3}(4\log 2 - 1) = \frac{1}{3}(4(1-3k) - 1) = \frac{1}{3}(3 - 12k) = 1 - 4k$$

مثال۲۰۲: با فرض $\log_{9\sqrt{9}} 3\sqrt{3} = a$ حاصل لگاریتم $16(a+1)$ در چه پایه ای برابر ۴ است؟

۱) ۵ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} ۳\sqrt{۳}=۳^{۱}\times ۳^{\frac{۱}{۲}}=۳^{\frac{۳}{۲}} \\ ۹\sqrt[۳]{۹}=۳^{۲}\times ۳^{\frac{۲}{۳}}=۳^{۲+\frac{۲}{۳}}=۳^{\frac{۸}{۳}} \end{cases} \Rightarrow \log_{۹\sqrt[۳]{۹}} ۳\sqrt{۳}=\log_{۳^{\frac{۸}{۳}}} ۳^{\frac{۳}{۲}}$$

با توجه به خاصیت $\log_{b^m} a^n=\frac{n}{m}\log_b a(a,b>۰,b\neq ۱)$ داریم:

$$\log_{۳^{\frac{۸}{۳}}} ۳^{\frac{۳}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۸}{۳}}\log_۳ ۳=\frac{۹}{۱۶}$$

پس $a=\frac{۹}{۱۶}$ است. فرض می کنیم لگاریتم $۱۶(a+۱)$ در پایه m برابر ۴ است در نتیجه:

$$\log_m(۱۶(a+۱))=۴\Rightarrow \log_m\left(۱۶\left(\frac{۹}{۱۶}+۱\right)\right)=۴\Rightarrow \log_m ۲۵=۴$$

$$\Rightarrow ۲۵=m^{۴}\Rightarrow m=\pm\sqrt{۵}\xrightarrow{m>۰} m=\sqrt{۵}$$

مثال۲۰۳: اگر $a=۲\log(۱+\sqrt{۳})+\log(۴-۲\sqrt{۳})$ باشد حاصل $\log ۲۵$ برحسب a کدام است؟

۱) $۴-a$ ۲) $۴-۲a$ ۳) $۲-a$ ۴) $۲-۲a$

پاسخ: گزینه ۳

بنابر خاصیت $\log_b a^n=n\log_b a(a,b>۰,b\neq ۱)$ داریم:

$$a=۲\log(۱+\sqrt{۳})+\log(۴-۲\sqrt{۳})=\log(۴+۲\sqrt{۳})+\log(۴-۲\sqrt{۳})$$

$$=\log((۴+۲\sqrt{۳})\times(۴-۲\sqrt{۳}))=\log(۱۶-۱۲)=\log ۴$$

پس $a=\log ۴$.

می دانیم $۲۵=\frac{۱۰۰}{۴}$ در نتیجه: $\log ۲۵=\log\frac{۱۰۰}{۴}=\log ۱۰۰-\log ۴=۲-\log ۴=۲-a$

تذکر: $\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$

مثال۲۰۴: اگر $\log ۲=k$ باشد حاصل $\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $۲k$ ۲) $۴k$ ۳) $۱+k$ ۴) $۲+۴k$

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم $n\log_b a=\log_b a^n$ در نتیجه:

$$۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۱+\sqrt{۵})^{۲}=\log(۶+۲\sqrt{۵})$$

$$\Rightarrow \log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+۲\sqrt{۵})$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})=\log(۳۶-۲۰)=\log ۱۶$$

اگر $\log ۲=k$ باشد داریم: $\log ۱۶۳=\log ۲^{۴}=۴\log ۲=۴k$

مثال۲۰۵: اگر $x=\frac{\sqrt{۳۳}-۵}{۲}$ باشد حاصل $\log_{۴}(x^{۲}+۵x+۶)$ برابر است با:

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه۴

به کمک مربع سازی $x^{۲}+۵x+۶$ داریم:

$$x^{۲}+۵x+۶=(x^{۲}+۵x)+۶=\left(\left(x+\frac{۵}{۲}\right)^{۲}-\frac{۲۵}{۴}\right)+۶=\left(x+\frac{۵}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}$$

حاصل عبارت $(x^{۲}+۵x+۶)$ به ازای $x=\frac{\sqrt{۳۳}-۵}{۲}$ برابر است:

$$\left(\frac{\sqrt{۳۳}-۵}{۲}+\frac{۵}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}=\left(\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۳۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=۸$$

پس حاصل $\log_{۴}(x^{۲}+۵x+۶)$ به ازای $x=\frac{\sqrt{۳۳}-۵}{۲}$ برابر است و در نتیجه:

$$\log_{۴}۸=\log_{۲^{۲}}۲^{۳}\xrightarrow{(۱)}\frac{۳}{۲}\log_{۲}۲=\frac{۳}{۲}$$

تذکر: $(۱)\ \log_{b^{m}}a^{n}=\frac{n}{m}\log_{b}a(a,b>۰,b\neq۱)$

مثال۲۰۶: هرگاه $\log\frac{a+b}{۴}=\frac{\log a+\log b}{۲}$ باشد حاصل $\frac{a^{۲}+b^{۲}-۳ab}{a^{۲}+b^{۲}+۳ab}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۷}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\log\frac{a+b}{۴}=\frac{\log a+\log b}{۲}\xrightarrow{\times۲}۲\log\frac{a+b}{۴}=\log ab\Rightarrow\log\left(\frac{a+b}{۴}\right)^{۲}=\log ab$$

چون **log** تابع یک به یک است:

$$\left(\frac{a+b}{۴}\right)^{۲}=ab\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}+۲ab=۱۶ab\Rightarrow\begin{cases}a^{۲}+b^{۲}-۳ab=۱۰ab\\a^{۲}+b^{۲}+۳ab=۱۷ab\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a^{۲}+b^{۲}-۳ab}{a^{۲}+b^{۲}+۳ab}=\frac{۱۰ab}{۱۷ab}=\frac{۱۰}{۱۷}$$

مثال۲۰۷: ساده شده $(\log_{۲۱}۳)^{۲}+(\log_{۲۱}۷).(\log_{۲۱}۶۳)$ کدام است؟

۱) $\log_{۳}۷$ ۲) $\log_{۷}۳$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۷}$

پاسخ: گزینه۳

$\log_{۲۱}۳,\log_{۲۱}۷,\log_{۲۱}۶۳$ را برحسب می نویسیم:

$$\log_{۲۱} ۷ = \log_{۲۱} \frac{۲۱}{۳} = \log_{۲۱} ۲۱ - \log_{۲۱} ۳ = ۱ - \log_{۲۱} ۳$$

$$\log_{۲۱} ۶۳ = \log_{۲۱} (۲۱ \times ۳) = \log_{۲۱} ۲۱ + \log_{۲۱} ۳ = ۱ + \log_{۲۱} ۳$$

$$(\log_{۲۱} ۳)^۲ + \log_{۲۱} ۷ \times \log_{۲۱} ۶۳ = (\log_{۲۱} ۳)^۲ + (۱ - \log_{۲۱} ۳)(۱ + \log_{۲۱} ۳)$$

$$= (\log_{۲۱} ۳)^۲ + (۱ - (\log_{۲۱} ۳)^۲) = ۱$$

مثال۲۰۸: حاصل $(\log_{ba} a)^۲ + (\log_{ba} b)(\log_{ba} a^۲ b)$ کدام است؟

۱) $\log_b a$ ۲) $\log_a b$ ۳) ۱ ۴) a

پاسخ: گزینه۳

روش اول)

$$(\log_{ba} a)^۲ + \log_{ba} b \times \log_{ba} a^۲ b = (\log_{ab} a)^۲ + \log_{ba} b \times (۲\log_{ab} a + \log_{ba} b)$$

$$= (\log_{ab} a)^۲ + ۲\log_{ab} a \times \log_{ba} b + (\log_{ba} b)^۲ = (\log_{ab} a + \log_{ab} b)^۲ = (\log_{ab} ab)^۲ = ۱$$

روش دوم)

$$(\log_{ba} a)^۲ + \log_{ba} \left(\frac{ba}{a}\right) \times \log_{ba} (ba \times a) = (\log_{ba} a)^۲ + (۱ - \log_{ba} a)(۱ + \log_{ba} a)$$

$$= (\log_{ba} a)^۲ + ۱ - (\log_{ba} a)^۲ = ۱$$

رابطه (۳) همراه با فامیل هاش:

$a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$ در این رابطه جای a و b عوض میشه

اگه به تساوی $\log_c^b . \log_c^a = \log_c^a . \log_c^b$ توجه کنید می بینید که رابطه (۳) چقدر راحت بدست میاد:

$$\log_c^b . \log_c^a = \log_c^a . \log_c^b \xrightarrow{\text{رابطه (۲)}} \log_c^{a^{\log_c^b}} = \log_c^{b^{\log_c^a}} \xrightarrow{\text{حذف } log} a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

فامیل رابطه (۳)

$$a^{\log_a^b} = b$$

مثال۲۰۹: اگر $\log_b a = \frac{۱}{۳}, b^{\log_a^c} = ۶۴$ باشد مقدار c کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه۲

می دانیم: $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$

$$\left.\begin{array}{l} b^{\log_a c}=۶۴ \Rightarrow c^{\log_a b}=۶۴ \\ \text{فرض سوال}: \log_b a=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \log_a b=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow c^{۳}=۶۴ \Rightarrow c=۴ \quad \text{بنابراین:}$$

مثال۲۱۰: اگر $a=\log_{۳}^{۱۸}$ باشد حاصل $۹^{a-۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

روش اول)

$$\log_{۳} ۱۸=a \Rightarrow a-۲=(\log_{۳} ۱۸)-۲=\log_{۳} ۱۸-\log_{۳} ۳^{۲}=\log_{۳} \frac{۱۸}{۹} \Rightarrow a-۲=\log_{۳} ۲$$

$$۹^{a-۲}=۳^{۲(a-۲)}=۳^{۲\log_{۳} ۲}=۳^{\log_{۳} ۴}=۴$$

روش دوم)

$$\log_{۳} ۱۸=a \Rightarrow ۳^{a}=۱۸$$

$$۹^{a-۲}=۳^{۲a-۴}=\frac{(۳^{a})^{۲}}{۳^{۴}}=\frac{۱۸^{۲}}{۳^{۴}}=\frac{۱۸^{۲}}{۹^{۲}}=\left(\frac{۱۸}{۹}\right)^{۲}=۴$$

مثال۲۱۱: اگر $۳^{a}=۲۴, ۲^{a}=۱۲$ باشد حاصل $(a-۲)(b-۱)$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

روش اول)

$$۲^{a}=۱۲ \Rightarrow a=\log_{۲} ۱۲ \Rightarrow a-۲=(\log_{۲} ۱۲)-۲=\log_{۲} ۱۲-\log_{۲} ۴=\log_{۲} \frac{۱۲}{۴}=\log_{۲} ۳$$

$$۳^{b}=۲۴ \Rightarrow b=\log_{۳} ۲۴ \Rightarrow b-۱=(\log_{۳} ۲۴)-۱=\log_{۳} ۲۴-\log_{۳} ۳=\log_{۳} \frac{۲۴}{۳}=\log_{۳} ۸=۳\log_{۳} ۲$$

$$(a-۲)(b-۱)=\log_{۲} ۳ \times ۳\log_{۳} ۲=۳ \times \underbrace{\log_{۲} ۳ \log_{۳} ۲}_{۱}=۳$$

روش دوم)

$$\left.\begin{array}{l} ۲^{a}=۱۲ \Rightarrow ۲^{a-۲}=\frac{۱۲}{۴}=۳ \Rightarrow (a-۲)=\log_{۲} ۳ \\ ۳^{b}=۲۴ \Rightarrow ۳^{b-۱}=۸ \Rightarrow (b-۱)=\log_{۳} ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow (a-۲)(b-۱)=\log_{۲} ۳ \times \log_{۳} ۸=\log_{۲} ۸=۳$$

رابطه (٤) همراه با فامیل هاش:

$$\boxed{\log_b^a \times \log_c^b=\log_c^a}$$

علت: $\log_b^a \times \log_c^b=\log_c^{b^{\log_b^a}} \xrightarrow{\text{رابطه (۳)}} \log_c^a$

یکی از مهمترین نتایجی که از روابط log استخراج میشه، رابطه ای هست که الان می خوام براتون بازگو کنم.

فامیل رابطه (۴)

رابطه حذف مبنا

$$\frac{\log_{\not c}^{a}}{\log_{\not c}^{b}}=\log_{b}^{a}$$

رابطه تزریق مبنا

$$\log_{b}^{a}.\log_{c}^{b}=\log_{c}^{a}\xrightarrow{\text{پس}}\log_{b}^{a}=\frac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}}$$

می دونیم

مثال۲۱۲: حاصل $\frac{\log_{\sqrt{۳}}^{\sqrt{۲۴}}}{\log_{\sqrt{۳}}^{\sqrt{۲}}}-\frac{\log^{۳۶}}{\log^{۴}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

$$\frac{\log_{\sqrt{۳}}^{\sqrt{۲۴}}}{\log_{\sqrt{۳}}^{\sqrt{۲}}}-\frac{\log^{۳۶}}{\log^{۴}}=\log_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲۴}}-\log_{۴}^{۳۶}\xrightarrow{\text{نتیجه ۲}}\log_{۲}^{۲۴}-\log_{۲}^{۶}\xrightarrow{\text{رابطه ۱}}\log_{۲}^{\frac{۲۴}{۶}}=\log_{۲}^{۴}=۲$$

از رابطه (۴) میشه یه نتیجه دیگه هم گرفت نگاه کنید:

فامیل رابطه (۴)

$$\log_{b}^{a}.\log_{a}^{b}=۱\Rightarrow\log_{b}^{a}=\frac{۱}{\log_{a}^{b}}\longrightarrow\boxed{\log_{b}^{a}=A\Rightarrow\log_{a}^{b}=\frac{۱}{A}}$$

می دونیم:

مثال۲۱۳: حاصل عبارت $\frac{۱}{\log_{۲}۳۰}+\frac{۱}{\log_{۳}۳۰}+\frac{۱}{\log_{۵}۳۰}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه۱

می دانیم $\log_{b}a=\frac{۱}{\log_{a}b}$ در نتیجه:

$$\frac{۱}{\log_{۲}۳۰}=\log_{۳۰}۲,\frac{۱}{\log_{۳}۳۰}=\log_{۳۰}۳,\frac{۱}{\log_{۴}۳۰}=\log_{۳۰}۵\Rightarrow\frac{۱}{\log_{۲}۳۰}+\frac{۱}{\log_{۳}۳۰}+\frac{۱}{\log_{۵}۳۰}$$
$$=\log_{۳۰}۲+\log_{۳۰}۳+\log_{۳۰}۵=\log_{۳۰}(۲\times۳\times۵)=\log_{۳۰}۳۰=۱$$

مثال۲۱۴: اگر $\log_{b}^{a}=\frac{۴}{۳}$ باشد مقدار $\log_{a^{۲}}^{b^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

$$\log_{a^{۲}}^{b^{۲}} = \frac{۲}{۳}\log_a^b = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\log_b^a = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \log_a^b = \frac{۳}{۴}$$

مثال۲۱۵: اگر $x^{\frac{۳}{۴}} = ۳\sqrt{۳}$ باشد لگاریتم $x-۱$ در کدام پایه برابر $\frac{۶}{۵}$ می باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با استفاده از تساوی داده شده مقدار x را پیدا می کنیم و سپس به محاسبه مطلوب مسئله می پردازیم:

$$x^{\frac{۳}{۴}} = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow x = \left(۳^{\frac{۳}{۲}}\right)^{\frac{۴}{۳}} = ۳^{۲} \Rightarrow x = ۹ \Rightarrow x-۱ = ۸$$

با استفاده از رابطه $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$ داریم:

$$\log_\alpha x - ۱ = \frac{۶}{۵} \Rightarrow \log_\alpha ۸ = \frac{۶}{۵} \Rightarrow \log_۸ \alpha = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \alpha = ۸^{\frac{۵}{۶}} = (۲^{۳})^{\frac{۵}{۶}} = ۲^{\frac{۵}{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

مثال۲۱۶: اگر $\log ۲ = a, \log ۳ = b$ باشدحاصل $\log_{۱۸} ۲۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۳a+b}{b+۲a}$ ۲) $\frac{a+۳b}{۲b+a}$ ۳) $\frac{۳a+b}{۲b+a}$ ۴) $\frac{a+۳b}{۲a+b}$

پاسخ: گزینه۳

بنابر خاصیت $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ مبنای عبارت $\log_{۱۸} ۲۴$ را به مبنای ۱۰ می بریم:

$$\log_{۱۸} ۲۴ = \frac{\log ۲۴}{\log ۱۸} = \frac{\log(۲^{۳}\times ۳)}{\log(۳^{۲}\times ۲)} = \frac{\log ۲^{۳} + \log ۳}{\log ۳^{۲} + \log ۲} = \frac{۳\log ۲ + \log ۳}{۲\log ۳ + \log ۲} = \frac{۳a+b}{۲b+a}$$

مثال۲۱۷: اگر $\log_۸^{۱۸} = a$ باشد مقدار $\log_۴^۶$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۳a-۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳a}{۴}$ ۳) $\frac{۳a+۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳a-۱}{۲}$

پاسخ: گزینه۳

$$\log_{۸}^{۱۸}=a\Rightarrow\log_{۲^۳}^{۳^۲\times۲}=a\Rightarrow\frac{۱}{۳}(۲\log_{۲}^{۳}+\log_{۲}^{۲})=a$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۳}+\frac{۱}{۳}=a\Rightarrow\log_{۲}^{۳}=\frac{۳a-۱}{۲}$$

$$\log_{۴}^{۶}=\log_{۲^۲}^{۲\times۳}=\frac{۱}{۲}(\log_{۲}^{۲}+\log_{۲}^{۳})=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۳a-۱}{۲}\right)=\frac{۳a+۱}{۴}$$

مثال۲۱۸: اگر $\log_b ac=۳,\log_b c^{۳}=\frac{۳}{۲}$ باشد حاصل $\log_{bc} ab$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

پاسخ: گزینه۴

با توجه به آن که $\log_c ac=۳$ پس:

$\log_b a+\log_b c=۳$ از طرفی $\log_b c^{۳}=\frac{۳}{۲}$ پس $\log_b c=\frac{۱}{۲}$ به این ترتیب $\log_b a=\frac{۵}{۲}$ پس:

$$\log_{bc} ab=\frac{\log_b ab}{\log_b bc}=\frac{\log_b a+\log_b b}{\log_b b+\log_b c}=\frac{\frac{۵}{۲}+۱}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۷}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۷}{۳}$$

مثال۲۱۹: اگر $\log_{۵}^{x}+\log_{۳}^{x}=۱$ باشد مقدار $\log_x ۵$ برابر کدام است؟

۱) $\log_{۱۵}۳$ ۲) $\log_{۱۵}۵$ ۳) $\log_{۵}۱۵$ ۴) $\log_{۳}۱۵$

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{۱}{\log_x^{۵}}+\frac{۱}{\log_x^{۳}}=۱\xrightarrow{\times\log_x^{۵}.\log_x^{۳}}\log_x^{۳}+\log_x^{۵}=\log_x^{۳}.\log_x^{۵}$$

$$\log_x^{۱۵}=\log_x^{۳}.\log_x^{۵}\Rightarrow\log_x^{۵}=\frac{\log_x^{۱۵}}{\log_x^{۳}}\xrightarrow{\text{حذف مبنا}}\log_{۳}^{۱۵}$$

مثال۲۲۰: واسطه حسابی دو عدد $\log_c a,\log_b a$ با مربع واسطه هندسی آنها برابر است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $۲a=b+c$ ۲) $۲b=a+c$ ۳) $a^{۲}=bc$ ۴) $b^{۲}=ac$

پاسخ: گزینه۳

واسطه حسابی دو عدد a , b به صورت $\frac{a+b}{۲}$ و واسطه هندسی آن ها برابر $\sqrt{ab}$ است بنابراین:

$$\frac{\log_c a+\log_b a}{۲}=(\sqrt{\log_c a\times\log_b a})^{۲}\Rightarrow \log_c a+\log_b a=۲\log_c a\log_b a$$

$$\xrightarrow{\times\log_a c\times\log_a b}\underbrace{\log_c a\log_a c}_{۱}\log_a b+\log_a c\underbrace{\log_a b\log_b a}_{۱}=۲\underbrace{\log_c a\log_a c}_{۱}\underbrace{\log_b a\log_a b}_{۱}$$

$$\Rightarrow \log_a b+\log_a c=۲\Rightarrow \log_a bc=۲\Rightarrow bc=a^{۲}$$

مثال۲۲۱: اگر $\log_{۱۲}^{x}.\log_{۳}^{x}=۲\log_{۳}^{x}+\log_{۱۲}^{x}$ باشد x کدام است؟ (گزینه۲ ـ ۹۶)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۲

راه حل اول) طبق تست بالا $x^{۲}=۱۲\times۳=۳۶\Rightarrow x=۶$

راه حل اول) طرفین تساوی را در $\log_x^{۳}.\log_x^{۱۲}$ ضرب می کنیم:

$$\log_x^{۳}.\log_x^{۱۲}\left(\log_{۳}^{x}+\log_{۱۲}^{x}\right)=۲(\log_{۳}^{x}.\log_x^{۳})(\log_{۱۲}^{x}.\log_x^{۱۲})$$

$$\Rightarrow \log_x^{۱۲}+\log_x^{۳}=۲\Rightarrow \log_x^{۳۶}=۲\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow \boxed{x=۶}$$

مثال۲۲۲: اگر $\log_{۶}۴=a$ باشد حاصل $\log_{۱۲}۱۸$ کدام است؟

۱) $\frac{۴-a}{۲+a}$ ۲) $\frac{۲+a}{۱+a}$ ۳) $\frac{۳+a}{۱+a}$ ۴) $\frac{۱+a}{۴+a}$

پاسخ: گزینه۱

روش اول)

$$\log_{۶}^{۴}=a\Rightarrow \log_{۶}^{۳^{۲}}=a\Rightarrow ۲\log_{۶}^{۳}=a\Rightarrow \log_{۶}^{۳}=\frac{a}{۲}$$

$$\log_{۱۲}۱۸=\frac{\log_{۶}۱۸}{\log_{۶}۱۲}=\frac{\log_{۶}۶+\log_{۶}۳}{\log_{۶}۶+\log_{۶}۲}=\frac{۱+\log_{۶}\frac{۶}{۲}}{۱+\log_{۶}۲}=\frac{۱+۱-\log_{۶}۲}{۱+\log_{۶}۲}=\frac{۲-\frac{a}{۲}}{۱+\frac{a}{۲}}=\frac{\frac{۴-a}{۲}}{\frac{a+۲}{۲}}=\frac{۴-a}{a+۲}$$

روش دوم)

$$\log_{۱۲}۱۸=\log_{۱۲}۶+\log_{۱۲}۳=\log_{۱۲}۶+\log_{۱۲}۶-\log_{۱۲}۲=\frac{۲}{\log_{۶}۱۲}-\frac{۱}{\log_{۲}۱۲}$$

$$=\frac{۲}{\log_{۶}^{۶}+\log_{۶}۲}-\frac{۱}{\log_{۲}۲+\log_{۲}۶}=\frac{۲}{۱+\log_{۶}۲}-\frac{۱}{۱+\log_{۲}۶}=\frac{۲}{۱+\frac{۱}{۲}\log_{۶}۴}-\frac{۱}{۱+۲\log_{۴}۶}$$

$$\text{فرض: }\log_{۶}۴=a\Rightarrow \frac{۲}{۱+\frac{۱}{۲}a}-\frac{۱}{۱+۲\frac{۱}{a}}=\frac{۴}{۲+a}-\frac{a}{a+۲}=\frac{۴-a}{۲+a}$$

مثال۲۲۳: اگر $۳^{\log a}=b^{\log ۲}$ حاصل $۹^{\log_b a}$ کدام است؟

۱) $a^۳b^۲$ ۲) $a^۳$ ۳) $b^۲$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۴

روش اول) می دانیم $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ پس:

$$b^{\log ۲}=۲^{\log b}$$

$$۳^{\log a}=b^{\log ۲}=۲^{\log b}\Rightarrow ۳^{\log a}=۲^{\log b}$$

دو طرف تساوی بالا را به توان $\frac{۱}{\log b}$ می رسانیم:

$$(۳^{\log a})^{\frac{۱}{\log b}}=(۲^{\log b})^{\frac{۱}{\log b}}\Rightarrow ۳^{\frac{\log a}{\log b}}=۲$$

از طرفی می دانیم $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$ پس:

$$\frac{\log_{۱۰} a}{\log_{۱۰} b}=\log_b a\Rightarrow ۳^{\frac{\log a}{\log b}}=۳^{\log_b a}=۲$$

دو طرف تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$(۳^{\log_b a})^۲=۴\Rightarrow ۹^{\log_b a}=۴$$

روش دوم) [حل از مهدی بزرگی ـ تیزهوشان لنگرود ۹۷ـ ۹۶]

از طرفین تساوی **log** می گیریم. $۳^{\log a}=b^{\log ۲}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \log a.\log ۳=\log ۲.\log b\Rightarrow \frac{\log a}{\log b}=\frac{\log ۲}{\log ۳}\Rightarrow \log_b^a=\log_۳^۲$$

$$\Rightarrow ۹^{\log_b^a}=(۳^۲)^{\log_b^a}=(۳^{\log_b^a})^۲=(۳^{\log_۳^۲})^۲=۲^۲=۴$$

مثال۲۲۴: در تابع $f(x)=ab^x;b>۰$ با ضابطه داریم $f(۰)=\frac{۳}{۲}, f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}$ مقدار $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸

پاسخ: گزینه۳

$$f(x)=ab^x,\begin{cases}f(۰)=ab^۰=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}\\ f(-۲)=ab^{-۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow \frac{a}{b^۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow ۳b^۲=۳۲a\end{cases}\xrightarrow{a=\frac{۳}{۲}}۳b^۲=۳\times ۱۶\Rightarrow b^۲=۱۶$$

$$\xrightarrow{b>۰}b=۴\Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}\times ۴^x\Rightarrow f\left(\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۳}{۲}\times ۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times\sqrt{۴^۳}=\frac{۳}{۲}\times ۸=۱۲$$

مثال۲۲۵: اگر نمودار تابع $f(x)=a(b)^x-1$ از دو نقطه $A\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), B(1,11)$ بگذرد $f(-1)$ کدام است؟

(سراسری ۹۳)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه۳

$$f(x)=ab^x-1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow ab^{-\frac{1}{2}}-1=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{3}{2}\Rightarrow \sqrt{b}=\frac{2}{3}a$$

$$f(1)=11\Rightarrow ab-1=11\Rightarrow ab=12\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{b}=\frac{2}{3}a\\ ab=12\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}b=\frac{4}{9}a^2\\ ab=12\end{cases}\Rightarrow a\times\left(\frac{4}{9}a^2\right)=12\Rightarrow a^3=27$$

$$\Rightarrow a=3\Rightarrow b=4\Rightarrow f(x)=3\times 4^x-1$$

$$f(-1)=3\times 4^{-1}-1=-\frac{1}{4}$$

مثال۲۲۶: از دو معادله $4^x+2^x=72$ و $\log(x+1)+\log(2y+x^2)=2$ مقدار y کدام است؟

(سراسری ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه۳

اگر فرض کنید $t=2^x$ پس $4^x=t^2$ است و داریم:

$$4^x+2^x=72\Rightarrow t^2+t=72\Rightarrow t^2+t-72=0\Rightarrow (t+9)(t-8)=0\Rightarrow \begin{cases}t=-9\\ t=8\end{cases}$$

از آن جا که $t=2^x>0$ است، t نمی تواند منفی باشد پس $t=8$ است و در نتیجه: $2^x=8\Rightarrow x=3$

اگر $x=3$ باشد داریم:

$$\log(x+1)+\log(2y+x^2)=2\xrightarrow{x=3}\log 4+\log(2y+9)=2\Rightarrow \log(8y+36)=2$$

$$\Rightarrow 8y+36=10^2\Rightarrow 8y=64\Rightarrow y=8$$

مثال۲۲۷: از دو معادلهٔ دو مجهولی $2^{x-7}\times 4^{x+y}=1$ و $\log y=2\log 3+\log x$ مقدار y کدام است؟

(سراسری ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۳

$$\begin{cases}(1)\ 2^{x-7}\times 4^{x+y}=1\Rightarrow 2^{x-7}\times 2^{2x+2y}=1\Rightarrow 2^{x-7+2x+2y}=1\Rightarrow 2^{3x+2y-7}=1\Rightarrow 3x+2y-7=0\\ (2)\ \log y=2\log 3+\log x\Rightarrow \log y=\log 3^2+\log x\Rightarrow \log y=\log 9x\Rightarrow y=9x\end{cases}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۷ \\ y = ۹x \end{cases} \xrightarrow{y=۹x} ۳x + ۲(۹x) = ۷ \Rightarrow ۲۱x = ۷$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{y=۹x} y = ۳$$

مثال۲۲۸: جواب معادله $۲^{۱-۲x} = ۳^{x}$ عدد $x = \log_b^{۲}$ است. مقدار b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول) از طرفیت تساوی $۲^{۱-۲x} = ۳^{x}$ در پایه دو لگاریتم می گیریم داریم:

$$\log_۲^{(۲^{۱-۲x})} = \log_۲^{۳^{x}} \Rightarrow ۱-۲x = x\log_۲^{۳} \Rightarrow ۱ = x(۲+\log_۲^{۳}) \Rightarrow ۱ = x(\log_۲^{۲^{۲}} + \log_۲^{۳})$$

$$\Rightarrow ۱ = x\log_۲^{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{\log_۲^{۱۲}} = \log_۲^{۱۲} \Rightarrow b = ۱۲$$

راه حل دوم)

$$۲^{۱-۲x} = ۳^{x} \Rightarrow \frac{۲}{۲^{۲x}} = ۳^{x} \Rightarrow \frac{۲}{۴^{x}} = ۳^{x} \Rightarrow ۲ = (۴^{x})(۳^{x}) \Rightarrow ۲ = ۱۲^{x}$$

$$\Rightarrow \log_{۱۲}^{۲} = x \Rightarrow b = ۱۲$$

مثال۲۲۹: مجموع جواب های معادله $|e^{x} - ۱| = |۳ - ۲e^{x}|$ کدام است؟

۱) $\ln\frac{۴}{۳}$ ۲) $\ln\frac{۳}{۸}$ ۳) $\ln ۲$ ۴) $\ln\frac{۸}{۳}$

پاسخ: گزینه۴

با توجه به فرمول $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$ داریم:

$$|e^{x} - ۱| = |۳ - ۲e^{x}| \Rightarrow \begin{cases} e^{x} - ۱ = ۳ - ۲e^{x} \Rightarrow ۳e^{x} = ۴ \Rightarrow e^{x} = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{\ln} \ln e^{x} = \ln\frac{۴}{۳} \\ \Rightarrow x\underbrace{\ln e}_{۱} = \ln\frac{۴}{۳} \Rightarrow x = \ln\frac{۴}{۳} \\ e^{x} - ۱ = -(۳ - ۲e^{x}) \Rightarrow e^{x} - ۱ = -۳ + ۲e^{x} \Rightarrow e^{x} = ۲ \xrightarrow{\ln} \ln e^{x} = \ln ۲ \\ \Rightarrow x\underbrace{\ln e}_{۱} = \ln ۲ \Rightarrow x = \ln ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ = \ln\frac{۴}{۳} + \ln ۲ = \ln\left(\frac{۴}{۳} \times ۲\right) = \ln\frac{۸}{۳}$$

مثال۲۳۰: اگر $f(x) = a - ۲^{b-x}$ به طوری که $f(۱) = -۵, f(-۱) = ۱$ مقدار $f^{-۱}\left(\frac{۱۱}{۴}\right)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) -۴

پاسخ: گزینه۱

$$f(x)=a-۲^{b-x}$$

$$\begin{cases} f(۱)=۱ \Rightarrow a-۲^{b-۱}=۱ \\ f(-۱)=-۵ \Rightarrow a-۲^{b+۱}=-۵ \end{cases}$$

از تفاضل دو معادله بالا داریم:

$$-۲^{b-۱}+۲^{b+۱}=۶ \Rightarrow ۲^{b-۱}(-۱+۴)=۶ \Rightarrow ۲^{b-۱}\times ۳=۶ \Rightarrow ۲^{b-۱}=۲ \Rightarrow b=۲$$

$$a-۲^{b-۱}=۱ \xrightarrow{b=۲} a-۲=۱ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow f(x)=۳-۲^{۲-x}$$

اگر $f^{-۱}\left(\frac{۱۱}{۴}\right)=t$ باشد پس $f(t)=\frac{۱۱}{۴}$ پس:

$$۳-۲^{۲-t}=\frac{۱۱}{۴} \Rightarrow -۲^{۲-t}=\frac{۱۱}{۴}-۳ \Rightarrow -۲^{۲-t}=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲^{۲-t}=۲^{-۲} \Rightarrow t=۴$$

پس $f^{-۱}\left(\frac{۱۱}{۴}\right)=۴$ است.

مثال۲۳۱: نمودارهای دو تابع $y=۳^x+\frac{۸}{۳}$ و $y=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲x}$ در نقطهٔ a متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطهٔ $(-۱,۱)$ کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه۳

نقطه تلاقی دو تابع نقطه ای است که در آن دو منحنی دارای طول و عرض برابرند در نتیجه:

$$\begin{cases} y=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲x} \\ y=۳^x+\frac{۸}{۳} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲x}=۳^x+\frac{۸}{۳} \Rightarrow \left(\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲}\right)^x=۳^x+\frac{۸}{۳} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^x=۳^x+\frac{۸}{۳}$$

با توجه به تساوی فوق می توان حدس زد $x=-۱$ است. اما فرض کنیم $۳^x=t$ است، می توانیم مطابق زیر معادله را حل کنیم:

$$۳^x=t \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^x=\frac{۱}{t} \Rightarrow \frac{۱}{t}=t+\frac{۸}{۳} \xrightarrow{\times ۳t} ۳t^۲+۸t-۳=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-۳ \Rightarrow ۳^x=-۳ \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \\ t=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳^x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

اگر $x=-۱$ باشد داریم: $y(-۱)=۳^{-۱}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=۳$

پس محل تلاقی دو منحنی $(-۱,۳)$ است که فاصله آن از نقطه $(-۱,۱)$ برابر با ۲ است. (چون طول نقاط برابر است پس فاصله آنها همان فاصلهٔ عرض آنهاست.)

$$\left.\begin{matrix}(-۱,۳)\\(-۱,۱)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{فاصله}=۳-۱=۲$$

مثال۲۳۲: فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادله $y=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴, y=۲^x$ از نقطه $A(۰,۴)$ کدام است؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه۴

در محل تلاقی دو تابع عرض و طول دو منحنی یکسان است:

$$\begin{cases} y=۲^x \\ y=\sqrt{۲}^{x+۱}+۴ \end{cases} \Rightarrow ۲^x=\sqrt{۲}^{x+۱}+۴ \Rightarrow (\sqrt{۲})^{x+۱}=t \Rightarrow ۲^{x+۱}=t^۲ \Rightarrow ۲^x=\frac{t^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{t^۲}{۲}=t+۴ \Rightarrow t^۲-۲t-۸=۰ \Rightarrow (t-۴)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۴ \ \checkmark \\ t=-۲ \ \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲^{x+۱}=t^۲=۱۶=۲^۴ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow (۳,۸)$$

می دانیم فاصله دو نقطه با مختصات $(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)$ برابر $\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$ است پس:

$$\left.\begin{matrix}(۳,۸)\\(۰,۴)\end{matrix}\right\} \longrightarrow d=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۸-۴)^۲}=۵$$

مثال۲۳۳: اگر $x^{-۱+\log_۲ x}=۴$ حاصل ضرب ریشه های آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه۱

روش اول) اگر $t=\log_۲ x$ فرض کنیم داریم $x=۲^t$ پس:

$$x^{-۱+\log_۲^x}=۴ \Rightarrow (۲^t)^{-۱+t}=۴ \Rightarrow ۲^{t^۲-t}=۲^۲$$

$$\Rightarrow t^۲-t=۲ \Rightarrow t^۲-t-۲=۰$$

$$(t-۲)(t+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۲ \\ t=-۱ \end{cases}$$

چون $x=۲^t$ است داریم:

$$\left.\begin{matrix} t=۲ \Rightarrow x_۱=۲^۲=۴ \\ t=-۱ \Rightarrow x_۲=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_۱ \times x_۲=۴ \times \frac{۱}{۲}=۲$$

روش دوم) [حل از علیرضا شعبانی ـ تیزهوشان لنگرود ، ۹۷ـ ۹۶]

$x^{-۱+\log_۲^x}=۴ \Rightarrow$ از طرفین در مبنای ۲ $\log$ می گیریم $\rightarrow \log_۲^{x^{(-۱+\log_۲^x)}}=\log_۲^۴=۲$

$$(-۱+\log_۲^x).\log_۲^x=۲ \Rightarrow -\log_۲^x+(\log_۲^x)^۲=۲ \Rightarrow (\log_۲^x)^۲-\log_۲^x-۲=۰$$

$$\Rightarrow (\log_۲^x-۲)(\log_۲^x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \log_۲^x=۲ \Rightarrow x=۲^۲=۴ \\ \log_۲^x=-۱ \Rightarrow x=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

حاصل ضرب ریشه ها $\rightarrow ۴ \times \frac{۱}{۲}=۲$

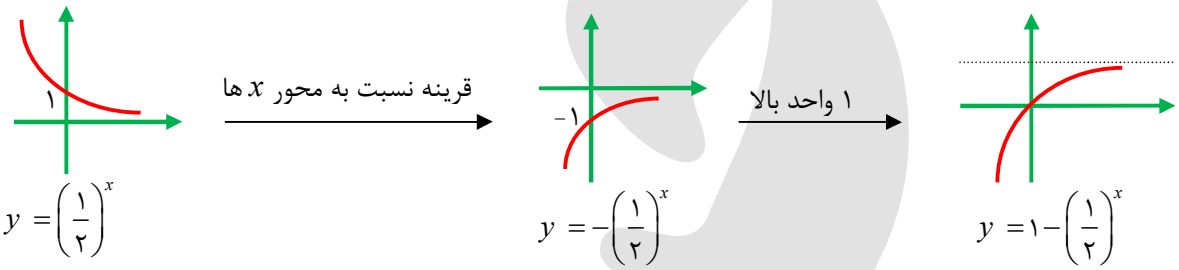
مثال۲۳۴: اگر $f(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد دامنه تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است

(سراسری ۹۳)

۱) $[-1,1]$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(0,+\infty)$

پاسخ: گزینه۳

روش اول) به ازای $x\geq 0$ تابع $f(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ بزرگتر یا مساوی صفر و به ازای $x<0$ کوچکتر از صفر است این مطلب از روی نمودار این تابع قابل برداشت است.



در تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\geq 0$ باشد. به کمک جدول تعیین علامت زیر داریم:

پس به ازای هر x، $xf(x)\geq 0$ است در نتیجه دامنه این تابع $\boldsymbol{R}$ است.

		۰	
x	−	۰	+
$f(x)$	−	۰	+
$xf(x)$	+	۰	+

روش دوم)

$$xf(x)\geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq 0 \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\geq 0 \Rightarrow 1\geq\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0\geq\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow x\geq 0 \quad (1) \\ x\leq 0 \Rightarrow f(x)\leq 0 \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\leq 0 \Rightarrow 1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0\leq\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow x\leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cup(2)} x\in R$$

مثال۲۳۵: اگر $f(x)=2^x$ باشد دامنه تابع $y=\sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)}$ به کدام صورت است؟

(سراسری ۹۳)

۱) $R-(-1,1)$ ۲) $[-1,0)\cup(0,1]$ ۳) $[-1,0)\cup[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

پاسخ: گزینه۴

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد یعنی:

$$f\left(\frac{۱}{x}\right)-f(x)\geq ۰\Rightarrow f\left(\frac{۱}{x}\right)\geq f(x)$$

با توجه به آنکه $f(x)=۲^x$ است داریم:

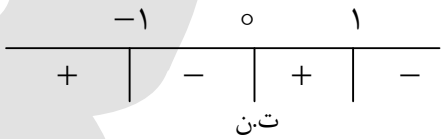
$$f\left(\frac{۱}{x}\right)=۲^{\frac{۱}{x}}\Rightarrow ۲^{\frac{۱}{x}}\geq ۲^x$$

از طرفی می دانیم اگر $a>۱, a^x>a^y$ داریم $x>y$ پس:

$$۲^{\frac{۱}{x}}\geq ۲^x\Rightarrow \frac{۱}{x}\geq x\Rightarrow \frac{۱}{x}-x\geq ۰\Rightarrow \frac{۱-x^۲}{x}\geq ۰$$

عبارت $p(x)=\frac{۱-x^۲}{x}$ را به کمک جدول تعیین علامت تعیین علامت می کنیم و سپس مجموعه جواب $p(x)\geq ۰$ را به دست می آوریم:

		-۱		۰		۱	
$۱-x^۲$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$P(x)$	$+$	۰	$-$		$+$	۰	$-$



$$P(x)\geq ۰\Rightarrow x\in(-\infty,۱]\cup(۰,۱]$$

$$y=\log_{g(x)}^{f(x)}\Rightarrow D=\{x\mid f(x)>۰, g(x)>۰, g(x)\neq ۱\}$$

مثال۲۳۶: اگر ۱۵ واحد به عدد A اضافه شود به لگاریتم آن در مبنای ۴ یک واحد اضافه می شود، A چقدر است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۵

معنی جمله بالا اینه که ($\log_۴^{A+۱۵}$ از $\log_۴^A$ یک واحد بیشتره) یعنی:

$$\log_۴^{(A+۱۵)}=\log_۴^A+۱\Rightarrow \log_۴^{(A+۱۵)}=\log_۴^A+\log_۴^۴\Rightarrow \log_۴^{(A+۱۵)}=\log_۴^{۴A}$$
$$\Rightarrow ۴A=A+۱۵\Rightarrow ۳A=۱۵\Rightarrow A=۵$$

مثال۲۳۷: نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(ax+b)$ محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه ای به عرض ۱- قطع کرده است. b کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه۱

اگر تابع f محور x ها را در نقطه ۱- قطع کند یعنی $f(-۱)=۰$ در نتیجه:

$f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(ax+b) \Rightarrow f(-۱)=\log_{\frac{۱}{۲}}(-a+b)=۰ \Rightarrow -a+b=۱$

معادله نیمساز ناحیه چهارم $y=-x$ است پس اگر تابع f این خط را در $y=-۱$ قطع کند دو تابع در نقطه $(۱,-۱)$ متقاطع اند پس $f(۱)=-۱$ خواهد بود.

$$f(۱)=\log_{\frac{۱}{۲}}(a+b)=-۱ \Rightarrow a+b=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱}=۲ \Rightarrow \begin{cases} -a+b=۱ \\ a+b=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲b=۳ \Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

مثال۲۳۸: از معادلهٔ لگاریتمی $\log(x^۲-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایه ۴ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$\log(x^۲-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵) \Rightarrow \log\frac{x^۲-x-۶}{x-۳}=\log(۲x-۵)$$

$$\Rightarrow \log\frac{(x-۳)(x+۲)}{(x-۳)}=\log(۲x-۵) \Rightarrow \log(x+۲)=\log(۲x-۵) \Rightarrow x+۲=۲x-۵ \Rightarrow x=۷$$

در نتیجه مقدار عبارت $\sqrt[۳]{x+۱}$ به ازای برابر ۲ است پس:

$$\log_{۴}\sqrt[۳]{x+۱}=\log_{۴}^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

مثال۲۳۹: مجموع جواب های معادله $\log_{۳}(۹^x+۲)=x+۱$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\log_{۳}۴$ ۴) $\log_{۳}۲$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_{۳}(۹^x+۲)=x+۱ \Rightarrow ۹^x+۲=۳^{x+۱} \Rightarrow ۳^{۲x}-۳\times۳^x+۲=۰$$

با فرض $۳^x=\alpha$ داریم:

$$\alpha^۲-۳\alpha+۲=۰ \Rightarrow (\alpha-۲)(\alpha-۱)=۰ \Rightarrow \alpha=۱,۲ \Rightarrow ۳^x=۱,۲ \Rightarrow ۳^{x_۱}=۱, ۳^{x_۲}=۲$$

جواب های معادله $x_۱=\log_{۳}۱, x_۲=\log_{۳}۲$

مجموع جواب ها $x_۱+x_۲=\log_{۳}۱+\log_{۳}۲=\log_{۳}(۱\times۲)=\log_{۳}۲$

مثال۲۴۰: معادله $x^{\log_{۲}x}=۵۱۲$ دو ریشه دارد. اگر ریشه بزرگتر α و ریشه کوچکتر β باشد، حاصل $\alpha+\frac{۱}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳

روش اول) اگر فرض کنیم $\log_۲ x = y$ آنگاه $x = ۲^y$ و داریم:

$$x^{\log_۲ x} = ۵۱۲ \Rightarrow x^y = ۵۱۲ \xrightarrow{x=۲^y} (۲^y)^y = ۵۱۲ \Rightarrow ۲^{y^۲} = ۵۱۲ = ۲^۹$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۹ \Rightarrow y = \pm ۳ \Rightarrow \log_۲ x = \pm ۳ \Rightarrow x = ۲^{\pm ۳} \Rightarrow x_۱ = ۸, x_۲ = \frac{۱}{۸}$$

$$\begin{cases} \text{ریشه بزرگتر} : \alpha = ۸ \\ \text{ریشه کوچکتر} : \beta = \frac{۱}{۸} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \frac{۱}{\beta} = ۸ + ۸ = ۱۶$$

روش دوم)

$$x^{\log_۲ x} = ۵۱۲ \Rightarrow \log_۲ x = \log_x ۵۱۲ = ۹ \log_x ۲ \Rightarrow \log_۲ x = \frac{۹}{\log_۲ x} \Rightarrow (\log_۲ x)^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \log_۲ x = \pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲^۳ = ۸ = \alpha \\ x_۲ = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \frac{۱}{\beta} = ۸ + ۸ + ۱۶$$

مثال۲۴۱: با فرض آنکه $\log_۲(۲x-۱) + \log_۲(x-۳) = \log_{\sqrt{۲}} \sqrt{x+۱}$ مقدار $\log_{\sqrt{۲}}(x^۲ - ۴x + ۵)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه۲

$$\log_۲(۲x-۱) + \log_۲(x-۳) = \log_{\sqrt{۲}} \sqrt{x+۱} \xrightarrow{(۱)} \log_۲(۲x-۱)(x-۳)$$

$$= \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}} (x+۱)^{\frac{۱}{۲}} \xrightarrow{(۲)} \log_۲(۲x^۲ - ۷x + ۳) = \frac{۱}{۲} \log_۲(x+۱) \Rightarrow ۲x^۲ - ۷x + ۳ = x + ۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \xrightarrow{*} x^۲ - ۴x = -۱$$

با توجه به اینکه $x^۲ - ۴x = -۱$ پس $\underbrace{x^۲ - ۴x}_{-۱} + ۵ = ۴$ است در نتیجه:

$$\log_{\sqrt{۲}}(\underbrace{x^۲ - ۴x}_{-۱} + ۵) = \log_{\sqrt{۲}} ۴ = ۴$$

تذکر۱: چون معادله $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ دارای ریشه های $x = ۲ \pm \sqrt{۳}, x = ۲ + \sqrt{۳}$ در دامنهٔ معادله صدق می کند از مرحله * به بعد محاسبات صحیح است.

تذکر۲:

$$\log_c a + \log_c b = \log_c ab \qquad (۱)$$
$$(a, b, c > ۰, c \neq ۱)$$

$$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a \quad (a, b > ۰, b \neq ۱) \qquad (۲)$$

مثال۲۴۲: اختلاف ریشه های معادله $۲x = ۴\log_۳ ۲ + \log_۳(۳^x - ۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه۴

اگر فرض کنیم $۳^x = t$ است داریم $x = \log_۳ t$ پس:

$$۲x = ۴\log_۳ ۲ + \log_۳(۳^x - ۳) \xrightarrow{x=\log_۳ t} ۲\log_۳ t = \log_۳ ۲^۴ + \log_۳(t-۳)$$

$$\xrightarrow{(۱)} \log_۳ t^۲ = \log_۳ ۱۶ + \log_۳(t-۳) \xrightarrow{(۲)} \log_۳ t^۲ = \log_۳(۱۶(t-۳))$$

$$\Rightarrow t^۲ = ۱۶t - ۴۸ \Rightarrow t^۲ - ۱۶t + ۴۸ = ۰ \Rightarrow (t-۱۲)(t-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱۲ \\ t = ۴ \end{cases}$$

با توجه به آن که $x = \log_۳ t$ است داریم:

$$\begin{cases} x_۱ = \log_۳ ۱۲ \\ x_۲ = \log_۳ ۴ \end{cases} \Rightarrow x_۱ - x_۲ = \log_۳ ۱۲ - \log_۳ ۴ = \log_۳ \frac{۱۲}{۴} = ۱$$

تذکر:

$$\log_b a^n = n\log_b a \quad (۱)$$
$$\log_c a + \log_c b = \log_c ab \quad (۲)$$

مثال۲۴۳: از تساوی $\log_x(۳x+۸) = ۲ - \log_x(x-۶)$ مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟

(سراسری ۹۳)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۳

$$\log_x(۳x+۸) = ۲ - \log_x(x-۶) \Rightarrow \log_x(۳x+۸) + \log_x(x-۶) = ۲$$

$$\log_x(۳x+۸)(x-۶) = ۲ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۸x + ۸x - ۴۸ = x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۰x - ۴۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲ - ۵x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x-۸)(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \\ x = -۳ \end{cases}$$

اما $x = -۳$ در دامنه عبارت قرار ندارد و جواب معادله $x = ۸$ است، در نتیجه:

$$\log_۴ x = \log_۴ ۸ = \log_{۲^۲} ۲^۳ = \frac{۳}{۲}\log_۲ ۲ = \frac{۳}{۲}$$

تذکر: $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$

مثال۲۴۴: حاصل ضرب ریشه های معادله $x^{\log_۵^x} = ۶۲۵$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲۵ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه۱

اگر $\log_{\Delta} x^{\log_{\Delta} x} = ۶۲۵$ باشد لگاریتم دو طرف تساوی در مبنای ۵ نیز برابر است در نتیجه: $\log_{\Delta} x^{\log_{\Delta} x} = \log_{\Delta} ۶۲۵ = ۴$

از طرفی می دانیم $\log_b a^n = n \log_b a$ پس:

$$\log_{\Delta} x^{\log_{\Delta} x} = ۴ \Rightarrow \log_{\Delta} x \times \log_{\Delta} x = ۴ \Rightarrow (\log_{\Delta} x)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow \log_{\Delta} x = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} \log_{\Delta} x = ۲ \Rightarrow x = ۲۵ \\ \log_{\Delta} x = -۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲۵} \end{cases}$$

در نتیجه حاصل ضرب ریشه های این معادله ۱ است.

مثال۲۴۵: از تساوی $\log_x (x^۲ + ۴) = ۱ + \log_x ۵$ مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟

(سراسری ۹۳)

۱) ۱- ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۴

$$\log_x (x^۲ + ۴) = ۱ + \log_x ۵ \xrightarrow{۱ = \log_x x} \log_x (x^۲ + ۴) = \log_x x + \log_x ۵$$

$$\log_x (x^۲ + ۴) = \log_x ۵x \Rightarrow x^۲ + ۴ = ۵x \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۴)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \text{ غ ق ق} \\ x = ۴ \end{cases}$$

چون x مبنای لگاریتم است نباید برابر ۱ باشد در نتیجه $x = ۴$ است:

$$\Rightarrow \log_{۲} ۴ = ۲$$

مثال۲۴۶: از دو معادله $\log_۲ x = ۱ + \log_۲ (y + ۱)$, $x^۲ - y^۲ = ۳۲$ مقدار لگاریتم $(x + y)$ در پایه ۴ کدام است؟(سراسری ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۳

$$\log_۲ x = \underbrace{۱}_{\log_۲ ۲} + \log_۲ (y + ۱) \Rightarrow \log_۲ x = \log_۲ ۲ + \log_۲ (y + ۱) \Rightarrow \log_۲ x = \log_۲ (۲y + ۲)$$

$$\Rightarrow x = ۲y + ۲$$

$$x = ۲y + ۲, x^۲ - y^۲ = ۳۲$$

$$(۲y + ۲)^۲ - y^۲ = ۳۲ \Rightarrow ۴y^۲ + ۸y + ۴ - y^۲ = ۳۲$$

$$۳y^۲ + ۸y - ۲۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ \\ y = -\frac{۱۴}{۳} \end{cases}$$

به کمک حدس می توان دریافت یک ریشه معادله فوق $y=۲$ است از آن جا که در هر معادله درجه ۲ ضرب ریشه ها برابر $\frac{c}{a}$ است پس اگر یک ریشه ۲ باشد ریشه دیگر $\frac{c}{۲a}$ است. پس ریشه دیگر این معادله $-\frac{۱۴}{۳}$ است. اما چون $y=-\frac{۱۴}{۳}$ در دامنه عبارت قرار ندارد غیرقابل قبول است. پس اگر $y=۲$ باشد داریم:

$$x=۲y+۲\xrightarrow{y=۲}x=۶$$

$$\log_{۴}(x+y)=\log_{۴}۸=\frac{۳}{۲}$$

مثال۲۴۷: از دو معادلهٔ $\log(۲x+۱)+\log(y-۲)-\log y=\log ۳$ و $\log(۲y-۳x)+\log ۲=۰$ مقدار xy کدام است؟ (سراسری ۹۶ با کمی تغییر)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه۴

$$\begin{cases}\log(۲x+۱)+\log(y-۲)-\log y=\log ۳\\ \log(۲y-۳x)+\log ۲=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log\frac{(۲x+۱)(y-۲)}{y}=\log ۳\Rightarrow\frac{(۲x+۱)(y-۲)}{y}=۳\\ \log(۴y-۶x)=۰\Rightarrow ۴y-۶x=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(۲x+۱)(y-۲)=۳y\quad(۱)\\ x=\frac{۴y-۱}{۶}\quad(۲)\end{cases}$$

به جای x در معادله (۱) قرار می دهیم $\frac{۴y-۱}{۶}$:

$$\left(۲\left(\frac{۴y-۱}{۶}\right)+۱\right)(y-۲)=۳y\Rightarrow\left(\frac{۴y-۱}{۶}\right)(y-۲)=۳y\Rightarrow(۴y+۲)(y-۲)=۹y$$

$$\Rightarrow ۴y^{۲}-۶y-۴=۹y\Rightarrow ۴y^{۲}-۱۵y-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}y=۴\\ y=\frac{-۱}{۴}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$y=-\frac{۱}{۴}$ قابل قبول نیست زیرا در دامنه معادله قرار ندارد. پس $y=۴$ است پس:

$$x=\frac{۴y-۱}{۶}=\frac{۱۵}{۶}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow xy=۴\times\frac{۵}{۲}=۱۰$$

مثال۲۴۸: از دو معادلهٔ $Ln(y+x-۱)+Ln(۲y+۳)=۰, Ln(x-۴y)=۲Ln۲$ مقدار xy کدام است.
(خارج از کشور تجربی ۹۶)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه۲

$$Ln(y+x-1)+Ln(2y+3)=0 \Rightarrow Ln(y+x-1)(2y+3)=0$$
$$\Rightarrow (y+x-1)(2y+3)=1 \qquad (1)$$
$$Ln(x-4y)=2Ln2=Ln4 \Rightarrow (x-4y)=4 \Rightarrow x=4y+4 \qquad (2)$$

(۲) را در (۱) جاگذاری می کنیم:

$$(y+4y+4-1)(2y+3)=1 \Rightarrow (5y+3)(2y+3)=1 \Rightarrow \log^{2}+15y+6y+9=1$$
$$\Rightarrow 10y^{2}+21y+8=0 \Rightarrow 10y^{2}+21y+8=(5y+8)(2y+1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{8}{5} & \text{غ ق ق} \\ y=-\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$
$$x=4y+4 \Rightarrow 4\left(-\frac{1}{2}\right)+4=2 \Rightarrow xy=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

مثال۲۴۹: تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\log_{2}(bx-4)$ از دو نقطهٔ $(2,6),(12,10)$ می گذرد. a کدام است؟

(سراسری ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه۳

چون تابع f از نقاط $(2,6),(12,10)$ می گذرد پس $f(2)=6, f(12)=10$ است در نتیجه:

$$f(2)=6 \Rightarrow a+\log_{2}(2b-4)=6$$
$$f(12)=10 \Rightarrow a+\log_{2}(12b-4)=10$$

از تفاضل دو معادله بالا داریم:

$$\log_{2}(12b-4)-\log_{2}(2b-4)=4 \Rightarrow \log_{2}\frac{12b-4}{2b-4}=4 \Rightarrow \frac{6b-2}{b-2}=16 \Rightarrow \frac{3b-1}{b-2}=8$$
$$\Rightarrow 3b-1=8b-16 \Rightarrow 5b=15 \Rightarrow b=3$$

حال با توجه به آن که $f(2)=6, b=3$ مقدار a را به دست آوریم:

$$f(x)=a+\log_{2}(3x-4) \Rightarrow f(2)=a+\underbrace{\log_{2}^{2}}_{1}=6 \Rightarrow a=5$$

$$\log_{b}^{a}-\log_{b}^{c}=\log_{b}^{\frac{a}{c}}$$

مثال۲۵۰: تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\log_{۲}^{(۳x+b)^{۲}}$ **از دو نقطهٔ** $(۵,۱۱),(۲۱,۱۵)$ **می گذرد،** a **کدام است.**

(خارج کشور ریاضی ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه۳

$$f(x)=a+\log_{۲}^{(۳x+b)^{۲}}=a+۲\log_{۲}^{۳x+b}$$

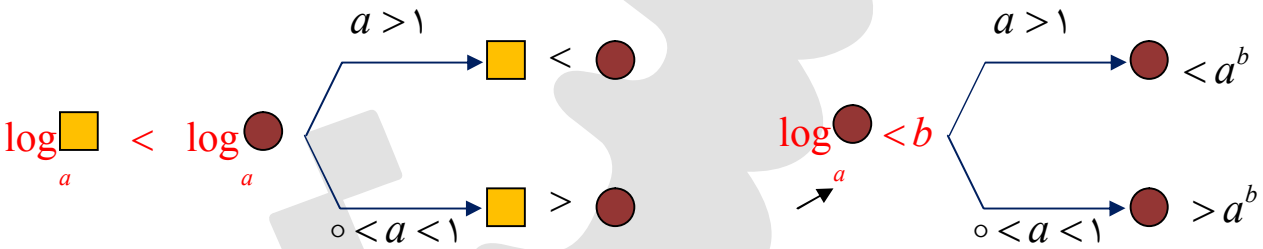
$$\begin{cases} f(۲۱)=۱۵ \to a+۲\log_{۲}^{(۶۳+b)}=۱۵ \\ f(۵)=۱۱ \to a+۲\log_{۲}^{(۱۵+b)}=۱۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می کنیم}}$$

$$\Rightarrow ۲\log_{۲}^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}}=۴\Rightarrow \log_{۲}^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}}=۲\Rightarrow \frac{۶۳+b}{۱۵+b}=۴\Rightarrow ۶۳+b=۶۰+۴b\Rightarrow ۳=۳b\Rightarrow \boxed{b=۱}$$

$$a+۲\log_{۲}^{(۱۵+b)}=۱۱\xrightarrow{b=۱}a+۲\log_{۲}^{(۱۵+b)}=۱۱\Rightarrow a+۲\log_{۲}^{۱۶}=۱۱$$

$$\Rightarrow a+۲\times ۴=۱۱\Rightarrow \boxed{a=۳}$$

نتیجه: در تبدیل یک نامساوی لگاریتمی به یک نامساوی غیرلگاریتمی اگه مبنای لگاریتم بزرگتر از یک باشه ($a>۱$) جهت نامساوی تغییر نمی کنه. اما اگه مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشه ($۰<a<۱$) جهت نامساوی حتماً عوض می شه. به عبارت دیگه:



مثال۲۵۱: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\log_{۳}^{x-۱}}$ **کدامست؟**

۱) $x>۱$ ۲) $۱<x\leq ۲$ ۳) ϕ ۴) $x\geq ۲$

$$\to \begin{cases} (۱)\ \underbrace{\log_{۲}^{x-۱}\geq ۰}_{\text{نامعادله لگاریتمی}} \Rightarrow \underbrace{x-۱\geq ۳^{۰}}_{\text{نامعادله غیرلگاریتمی}} \Rightarrow x-۱\geq ۱\Rightarrow \underbrace{\boxed{x\geq ۲}}_{\text{مجموعه جواب نامعادله غیرلگاریتمی}} & (۱) \\ (۲)\ x-۱>۰\Rightarrow \underbrace{\boxed{x>۱}}_{\text{دامنه}} & (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} x\geq ۲$$

مثال۲۵۲: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{۱}{۵}}^{x^{۲}}}$ **کدام است؟**

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۱,۱)-\{۰\}$ ۴) $[-۱,۱]-\{۰\}$

جهت نامساوی عوض

$$\rightarrow \begin{cases} (۱) \quad \log_{\frac{۱}{۵}}^{x^۲} \geq ۰ \xrightarrow[۰<\frac{۱}{۵}<۱]{\text{میشه}} x^۲ \leq \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۰} \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow \boxed{-۱ \leq x \leq ۱} & (۱) \\ (۲) \quad x^۲ > ۰ \Rightarrow \boxed{x \in R - \{۰\}} & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} D = [-۱,۱] - \{۰\}$$

مثال۲۵۳: اگر $f(x) = ۴ - e^{۲x}$ باشد دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x f^{-۱}(x)}$ کدام است. (خارج ریاضی ۹۶)

۱) $[۲,۳]$ ۲) $[۳,۴]$ ۳) $[۰,۳]$ ۴) $[۰,۴)$

$$f(x) = ۴ - e^{۲x} \Rightarrow y = ۴ - e^{۲x} \Rightarrow e^{۲x} = ۴ - y \Rightarrow ۲x = Ln(۴-y) \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} Ln(۴-y)$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲} Ln(۴-x)$$

$$g(x) = \sqrt{x f^{-۱}(x)} = \sqrt{\frac{۱}{۲} x . Ln(۴-x)} \Rightarrow x Ln(۴-x) \geq ۰ \xrightarrow[x<۴]{۴-x>۰}$$

$$\begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow Ln(۴-x) \geq ۰ \Rightarrow ۴-x \geq e^{۰} \Rightarrow ۴-x \geq ۱ \Rightarrow x \leq ۳ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۳ \\ x \leq ۰ \Rightarrow Ln(۴-x) \leq ۰ \Rightarrow ۴-x \leq e^{۰} \Rightarrow ۴-x \leq ۱ \Rightarrow x \geq ۳ \xrightarrow{x \leq ۰} \text{اشتراک ندارند} \end{cases} \Rightarrow D_g = [۰,۳]$$

مثال۲۵۴: اگر $f(x) = ۳ - e^{x}$ باشد دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x f^{-۱}(x)}$ کدام است. (داخل ریاضی ۹۶)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۲,۳)$ ۴) $[۱,۳)$

$$f(x) = ۳ - e^{x} \Rightarrow y = ۳ - e^{x} \Rightarrow e^{x} = ۳ - y \Rightarrow x = Ln(۳-y) \Rightarrow f^{-۱}(x) = Ln(۳-x)$$

$$g(x) = \sqrt{x f^{-۱}(x)} \Rightarrow x f^{-۱}(x) \geq ۰ \Rightarrow x Ln(۳-x) \geq ۰ \xrightarrow[x<۳]{۳-x>۰}$$

$$\begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow Ln(۳-x) \geq ۰ \Rightarrow ۳-x \geq e^{۰} \Rightarrow ۳-x \geq ۱ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲ \\ x \leq ۰ \Rightarrow Ln(۳-x) \leq ۰ \Rightarrow ۳-x \leq e^{۰} \Rightarrow ۳-x \leq ۱ \Rightarrow x \geq ۲ \xrightarrow{x \leq ۰} \text{اشتراک ندارند} \end{cases} \Rightarrow D_g = [۰,۲]$$

مثال۲۵۵: دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{۱ - \log(x^۲ - ۳x)}$ به کدام صورت بازه ها است؟ (سراسری ۹۵)

۱) $[-۲,۰) \cup (۳,۵]$ ۲) $[-۲,۰] \cup (۳,۵)$ ۳) $[-۲,۳)$ ۴) $(۰,۵]$

پاسخ: گزینه۱

باید تابع زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$۱ - \log(x^۲ - ۳x) \geq ۰ \Rightarrow \log(x^۲ - ۳x) \leq \underbrace{۱}_{\log_{۱۰} ۱۰}$$

از طرفی اگر $a>1$ ،$\log_a b > \log_a c$ باید $b>c$ باشد در نتیجه:

$$x^2-3x \le 10 \Rightarrow x^2-3x-10 \le 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) \le 0 \Rightarrow -2 \le x \le 5 \quad (1)$$

از طرفی باید ورودی تابع لگاریتم مثبت باشد در نتیجه:

$$x^2-3x>0 \Rightarrow x<0 \text{ یا } x>3 \quad (2)$$

پس از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

$$(1)\cap(2)=[-2,0)\cup(3,5]$$

مثال۲۵۶: تابع $f(x)=\log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $f(4)=2$ و $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ با معنی است. اگر باشد آنگاه $f\left(-\frac{4}{9}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه۱

می دانیم اگر $f(x)=\log_a(g(x))$ باشد پس باید $g(x)>0$ باشد پس باید $ax+b>0$ باشد چون عبارت $ax+b$ یک عبارت درجه ۱ است و به ازای $x>-\frac{1}{2}$ مثبت است پس $x=-\frac{1}{2}$ ریشه این عبارت و ضریب a نیز مثبت است در نتیجه: $-\frac{1}{2}a+b=0 \Rightarrow a=2b \ (a>0)$

از طرفی $f(4)=2$ است پس:

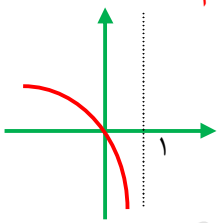
$$\log_3(4a+b)=2 \Rightarrow 4a+b=9$$

با توجه به آن که $a=2b$ است داریم:

$$4(2b)+b=9 \Rightarrow 9b=9 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\log_3(2x+1) \Rightarrow f\left(-\frac{4}{9}\right)=\log_3\left(-\frac{8}{9}+1\right)=\log_3\frac{1}{9}=-2$$

مثال۲۵۷: نمودار تابع $f(x)=\log_2(ax^2+bx+c)$ شکل مقابل است. مقدار $f(-3)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه۲

چون این تابع مبدأ گذر است و داریم $f(0)=0$.

در نتیجه: $f(0)=\log_2 c=0 \Rightarrow c=2^0=1$

دامنه این تابع بازه $(-\infty,1)$ است. اگر $g(x)=ax^2+bx+c$ باشد برای تعیین دامنه باید $g(x)>0$ باشد اما اگر g یک تابع درجه دوم باشد یک به یک نخواهد بود و در نتیجه f نیز یک به یک نخواهد بود. (به نمودار یک تابع درجه دوم که سهمی هستش

فکر کنید!) پس لازم است با توجه به یک به یک بودن تابع f و همنین دامنه f , g یک چندجمله ای درجه ۱ باشد پس $a = ۰$ است در نتیجه: $f(x) = \log_۲(bx + ۱)$

با توجه به آن که دامنه تابع f به صورت بازه $(-\infty, ۱)$ است پس b باید منفی و ریشه $bx + ۱$ برابر ۱ باشد در نتیجه:

$$b + ۱ = ۰ \Rightarrow b = -۱$$
$$f(x) = \log_۲(-x + ۱) \Rightarrow f(-۳) = \log_۲ ۴ = ۲$$

مثال۲۵۸: در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است و تعداد باکتری ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{۰/۰۴t}$ می باشد پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ ($\ln ۵ = ۱/۶۸$)

۱) ۲۸ ۲) ۲۱ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینه۴

$$f(t) = Ae^{۰/۰۴t} \xrightarrow[A=۱۴۰۰]{f(t)=۷۰۰۰} ۷۰۰۰ = ۱۴۰۰e^{۰/۰۴t} \Rightarrow e^{۰/۰۴t} = ۵ \xrightarrow{\text{ln می گیریم}} \ln e^{۰/۰۴t} = \ln ۵$$
$$\xrightarrow{\ln ۵ = ۱/۶۸} (۰/۰۴t)\underbrace{\ln e}_{۱} = ۱/۶۸ \Rightarrow \frac{۴}{۱۰۰}t = \frac{۱۶۸}{۱۰۰} \Rightarrow t = \frac{۱۶۸}{۴} = ۴۲$$

مثال۲۵۹: در شهری با جمعیت ۵۰۰۰۰ با نرخ رشد سالیانه جمعیت ۲/۵ درصد با توجه به $f(t) = Ae^{it}$ پس از چند سال جمعیت این شهر ۶۰۰۰۰ نفر می شود؟ ($\ln ۱/۲ = ۰/۱۸$)

۱) ۶/۲ ۲) ۶/۷ ۳) ۶/۸ ۴) ۷/۲

پاسخ: گزینه۴

جمعیت اولیه $A = ۵۰۰۰۰$ و نرخ رشد سالیانه جمعیت ۲/۵ درصد یعنی $i = \frac{۲/۵}{۱۰۰} = ۰/۰۲۵$ است.بنابراین:

$$f(t) = Ae^{it} \Rightarrow f(t) = ۵۰۰۰۰e^{۰/۰۲۵t} \xrightarrow{f(t)=۶۰۰۰۰} ۶۰۰۰۰ = ۵۰۰۰۰e^{۰/۰۲۵t} \xrightarrow{Ln \text{ می گیریم}}$$
$$\ln \frac{۶}{۵} = \ln e^{۰/۰۲۵t} \Rightarrow \ln \frac{۱۲}{۱۰} = ۰/۰۲۵\underbrace{(\ln e)}_{۱}t = \frac{\ln ۲}{۰/۰۲۵} \xrightarrow{\ln ۱/۲ = ۰/۱۸}$$
$$t = \frac{۰/۱۸}{۰/۰۲۵} = \frac{\frac{۱۸}{۱۰۰}}{\frac{۲۵}{۱۰۰۰}} = \frac{۱۸۰}{۲۵} \xrightarrow[\times ۴]{\times ۴} \frac{۷۲۰}{۱۰۰} = ۷/۲$$

مثال۲۶۰: بعد از ۱۲/۵ سال سرمایه یک سرمایه گذاری e برابر شده است. نرخ سود مشارکت در این سرمایه گذاری چند درصد مرکب پیوسته است؟

۱) ۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۸/۵

پاسخ: گزینه۳

مقدار سرمایه بعد از t سال از فرمول $f(t) = A_۰e^{kt}$ به دست می آید. بنابراین:

$$f(۱۲/۵) = A_۰e^{k(۱۲/۵)} \xrightarrow{f(۱۲/۵)=eA_۰} eA_۰ = A_۰e^{۱۲/۵k} \Rightarrow e = e^{۱۲/۵k}$$

$$۱ = ۱۲/۵k \Rightarrow k = \frac{۱}{۱۲/۵} \text{ پایه ها برابرند توان ها باید برابر باشند}$$

$$\text{درصد نرخ سود مشارکت} = \frac{۱}{۱۲/۵} \times ۱۰۰ = ۸$$

مثال۲۶۱: اگر یک کارگر عادی بعد از t ماه اشتغال بتواند روزانه $f(t)$ واحد کار را کامل کند. تابع کارایی آن به صورت $f(t)=۹۰-۵۰e^{-۰/۲t}$ داده می شود. پس از چند ماه تجربه کاری روزانه ۶۵ واحد را کامل می کند؟ $(\log_e ۲=۰/۷)$

۱) ۳/۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰/۵

پاسخ: گزینه۱

خوب دقت کنید می خواهیم ببینیم ۶۵ واحد کامل کردن بیانگر چه چیزی است. چون مسئله گفت روزانه $f(t)$ واحد کار را کامل می کند پس $f(t)=۶۵$ واضح است که عبارت «پس از چند ماه» بیانگر مجهول بودن t است داریم:

$$f(t)=۹۰-۵۰e^{-۰/۲t} \xrightarrow{f(t)=۶۵} ۶۵=۹۰-۵۰e^{-۰/۲t} \Rightarrow ۵۰e^{-۰/۲t}=۲۵ \Rightarrow e^{-۰/۲t}=\frac{۱}{۲}$$

از طرفین $\ln$ می گیریم $\ln e^{-۰/۲t}=\ln\frac{۱}{۲} \Rightarrow (-۰/۲t)\underbrace{\ln e}_{۱}=\ln ۲^{-۱} \Rightarrow -۰/۲t=-۰/۲t=-\ln$

طبق فرض داریم: $\log_e ۲=\ln ۲=۰/۷$ $\qquad t=\frac{-۰/۷}{-۰/۲}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$

مثال۲۶۲: در یک کشت نمونه ای از باکتری ها تعداد باکتری های در زمان t دقیقه پس از شروع از مدل $V(t)=Be^{kt}$ پیروی می کند اگر پس از ۳ دقیقه تعداد باکتری ها دو برابر شود با این روند در پایان دقیقه ۱۲ تعداد آنها چند برابر تعداد شروع آزمایش می شود؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه۴

$$V(۳)=Be^{۳k} \Rightarrow ۲B=Be^{۳k} \Rightarrow e^{۳k}=۲ \qquad (*)$$

حال برای یافتن تعداد باکتری ها در پایان دقیقه ۱۲ کافی است از $e^{۳k}$ کمک بگیریم داریم:

$$V(۱۲)=Be^{۱۲k}=B(e^{۳k})^{۴} \xrightarrow{(*)} B(۲)^{۴}=۱۶B$$

مثال۲۶۳: تعداد باکتری ها در یک نوع کشت بعد از t دقیقه به صورت $f(t)=Ae^{kt}$ است. اگر تعداد این باکتری ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقه بیستم برابر ۳۲۰۰ باشد در دقیقه سی ام تعداد آنها کدام است؟

۱) ۴۸۰۰ ۲) ۵۶۰۰ ۳) ۶۴۰۰ ۴) ۷۲۰۰

پاسخ: گزینه۳

$$f(۲۰)=Ae^{۲۰k} \xrightarrow[f(۲۰)=۳۲۰۰]{A=۸۰۰} ۳۲۰۰=۸۰۰e^{۲۰k} \xrightarrow{\div ۸۰۰} ۴=e^{۲۰k} \qquad (*)$$

$$f(۳۰)=Ae^{۳۰k} \xrightarrow{A=۸۰۰} ۸۰۰(e^{۲۰k})^{\frac{۳}{۲}} \xrightarrow{(*)} ۸۰۰(۴)^{\frac{۳}{۲}}=۸۰۰(۲^{۲})^{\frac{۳}{۲}}=۸۰۰(۲^{۳})=۶۴۰۰$$