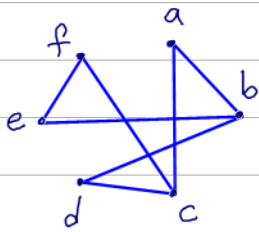


# حل تمرین ریاضیات گسسته فصل ۲ درس ۱ صفحه ۴۱ و ۴۲



۱ گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  و مجموعه یال‌های  $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$

مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

$\deg(a) = 2$   
 $\deg(b) = 3$   
 $\deg(c) = 3$

$\deg(d) = 2$   
 $\deg(e) = 2$   
 $\deg(f) = 2$

$p = 6$   $q = 7$

الف) مرتبه و اندازه گراف  $G$  را بنویسید.

ب) درجه رأس‌های  $G$  را مشخص نمایید.

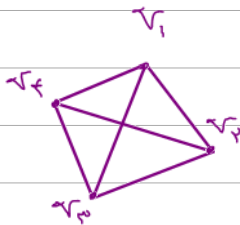
پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟  $2q = 2 \times 7 = 14$

ت) کدام رأس‌های گراف  $G$  با رأس  $f$  مجاورند؟  $c, a$

ث) گراف  $H$  با مجموعه رأس‌های  $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

و مجموعه یال‌های  $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$  مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های

الف تا پ) در مورد گراف  $H$  پاسخ دهید.



الف) اندازه گراف  $q = 6$

ب) مرتبه گراف  $p = 4$

$\deg(v_1) = 3$

$\deg(v_2) = 3$

$\deg(v_3) = 3$

$\deg(v_4) = 3$

$3 + 3 + 3 + 3 = 12$

پ)  $\sum_{i=1}^4 \deg(v_i) = 2q = 2 \times 6 = 12$

ت) همه رأس‌ها با هم مجاور هستند.

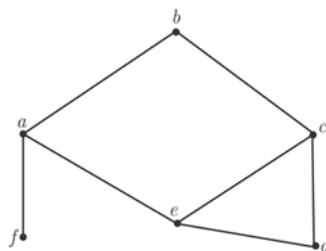
$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$E(G) = \{af, ae, ab, bc, ec, cd, ed\}$

$N_G(f) = \{a\}$

$N_G(g) = \{\}$

$N_G(e) = \{a, c\}$



شکل ۲۱

۲ گراف  $G$  (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های  $V(G)$  و  $E(G)$  را بنویسید.

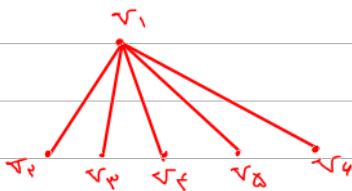
ب)  $\Delta(G) = 3$  و  $\delta(G) = 0$  را مشخص نمایید.

پ) مجموعه همسایه‌های رأس‌های  $f$  و  $g$  و  $e$  را بنویسید.

ت) اگر  $N_G(x) = \{a, c\}$ ، آنگاه  $x$  کدام رأس است؟

جواب:  $x = b$  (فقط با  $a$  و  $c$  همسایه است).

۳ گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  مفروض است. اگر  $N_G(v_1)$  دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های  $N_G(v_i)$  برای  $2 \leq i \leq 6$  تک‌عضوی باشند، گراف  $G$  را رسم کنید.



۴ در گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  داریم:

$N_G(a) = \{b, c, d\}$

$N_G(b) = \{a, c\}$

$N_G(c) = \{a, b\}$

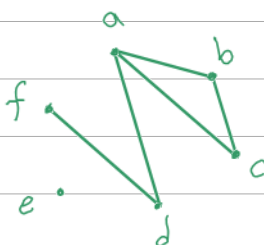
$N_G(d) = \{a, f\}$

$N_G(e) = \{\}$

$N_G(f) = \{d\}$

گراف  $G$  را رسم و اندازه آن را مشخص کنید.

جواب:  $q = 5$  (با تعداد یال‌ها)



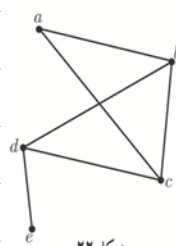
مجموع درجات گراف  $G$  + مجموع درجات گراف  $\bar{G} = n(n-1)$

$\rightarrow$  مجموع درجات  $\bar{G} = 5(5-1) = 12$

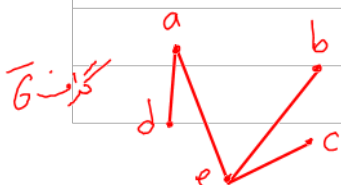
$20 - 12 = 8$

۵ گراف  $G$  (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف  $\bar{G}$  را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس  $a$  و  $c$  در گراف  $\bar{G}$  را تعیین نمایید.

جواب: مجموع درجات گراف  $G = 2q = 2 \times 4 = 8$



شکل ۲۲



$\deg(a) = 2$   $\deg(c) = 1$

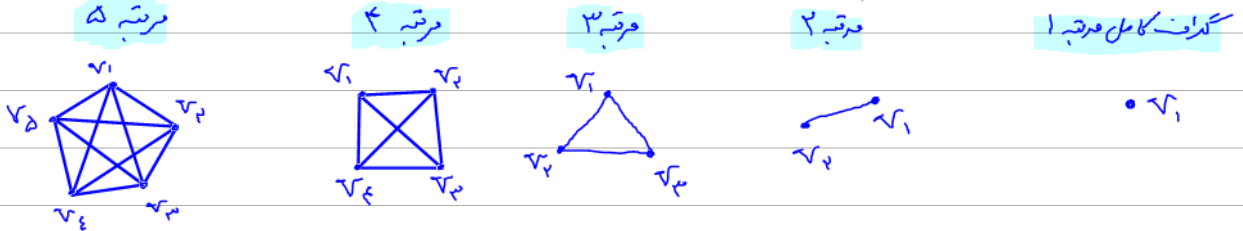
۶ گراف کامل  $K_p$  دارای ۳۶ یال است. در این گراف  $\Delta(G)$  و  $\delta(G)$  را مشخص کنید.

$$K_p \text{ تعداد یال ها گراف } = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} = 36 \rightarrow p(p-1) = 72 \rightarrow \boxed{p=9}$$

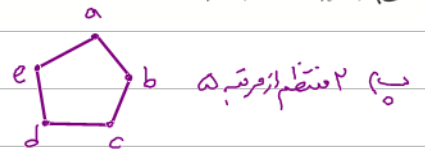
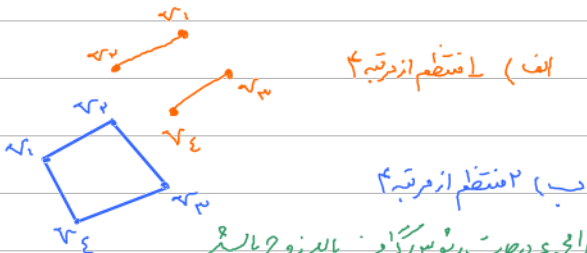
در گراف کامل  $\Delta(G)$  و  $\delta(G)$  با هم برابرند و برابر  $p-1$  هستند  
 $\Delta(G) = \delta(G) = 8$

۷ گراف های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید.



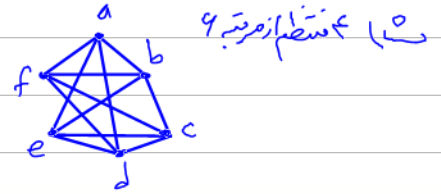
۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف  $r$ -منتظم از مرتبه  $n$  رسم کنید.

$r=1$	$n=4$ (الف)
$r=2$	$n=5$ (ب)
$r=3$	$n=7$ (ج)
$r=4$	$n=6$ (د)



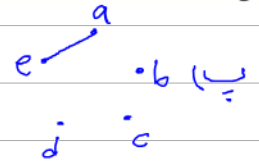
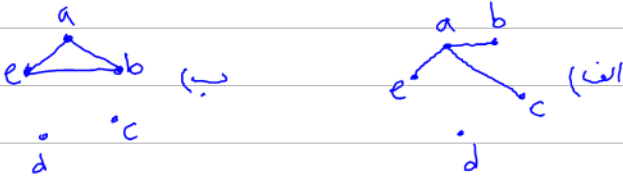
(ت) قابل رسم نیست زیرا مجموع درجات رئوس گراف باید زوج باشد  
 فرد  $15 = 4 \times 5$  و تعداد رئوس نمی تواند عددی زوج باشد

(ج) قابل رسم نیست. ۷ رأس با درجه ۳ خواهم داشت (تعداد رئوس فرد، فرد است)



۹ برای هر یک از حالات های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به طوری که:

- (الف) یک رأس تنها داشته باشد.
- (ب) دو رأس تنها داشته باشد.
- (پ) سه رأس تنها داشته باشد.
- (ت) چهار رأس تنها داشته باشد.
- (ث) پنج رأس تنها داشته باشد.



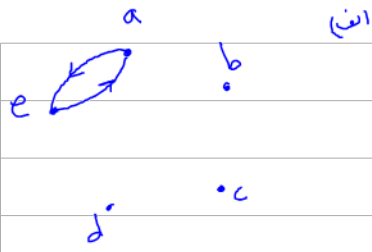
(ت) نمی تواند فقط ۴ رأس تنها داشته باشد  
 (ث) نمی تواند فقط ۵ رأس تنها داشته باشد

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده اند.

نشان دهید نفر هفتم نمی تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد. اگر افراد را رئوس یک گراف دو نظر بگیریم و یال ها نشان دهنده افرادی باشند که با هم دست داده اند. گناه ۷ رأس درجه زوج (۲) دارند و یک رأس بی مانده باید درجه این زوج باشد و نمی تواند عدد فردی مثل ۵ باشد زیرا اگر فرد باشد مجموع درجات گراف عددی فرد می شود و مخالف کرده بودیم مجموع درجات گراف همیشه عددی زوج است.

$$\text{زوج } n \rightarrow n = 2(q-1) \rightarrow n = 2q - 2 \rightarrow n = 12 \rightarrow q = 7$$

مجموع درجات رئوس زوج + مجموع درجات رئوس فرد = مجموع درجات گراف  
 $2 \times 6 = 12$   $1 \times 1 = 1$   $2q = 13$



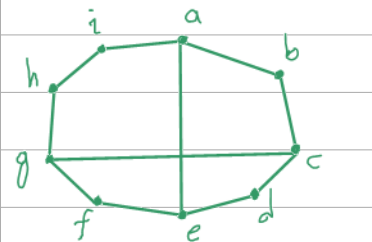
۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟

الف) تعداد کل یال ها در یک گراف جهت دار  $n(n-1)$  است و در اینجا در کل  $5 \times 4 = 20$  یال می توان کشید. که برای هر کدام از این ۲۰ یال ۲ حالت وجود دارد (بودن یا نبودن) پس تعداد کل گراف هایی که می توان رسم کرد برابر است با  $2^{20}$ .

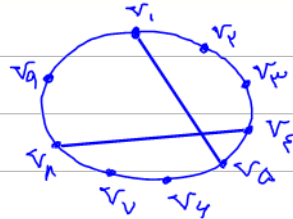
ب) در اینجا گراف معمولی داریم و نه جهت دار پس تعداد کل یال ها که می توان رسم کرد  $\frac{5 \times 4}{2} = 10$  است و برای هر یال ۲ حالت وجود دارد. یال مورد نظر ممکن است در گراف باشد یا نباشد پس تعداد کل گراف ها که می توان رسم کرد برابر است با  $2^{10} = 1024$ .



۱۲ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به طوری که:

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



۵ طول → ۱۲۳۴۵۱

۶ طول → ۱۵۶۷۸۹۱

۸ طول → ۵۶۷۸۴۳۲۱۵

۹ طول → ۱۲۳۴۵۶۷۸۹

- دوره طول ۵ → abcdea
- دوره طول ۶ → aefghia
- دوره طول ۷ → aihgcea
- دوره طول ۹ → abcdefghia

۱۳ فرض کنید  $G$  یک گراف باشد و  $\delta(G) \geq K$ . درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

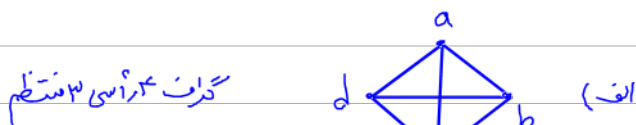
الف)  $G$  لزوماً شامل یک مسیر به طول  $K$  است.

ب)  $G$  لزوماً شامل یک مسیر به طول  $K+1$  است.

الف) درست است. رأس  $a_1$  را در نظر بگیرید این رأس صحابه رأس دیگری مثلاً  $a_2$  وصل است (در غیر این صورت  $\delta = 0$ ) همچنین  $a_2$  بر رأس دیگری چون  $a_3$  وصل است (در غیر این صورت  $\delta = 1$ ) همچنین  $a_3$  بر  $a_4$  و  $a_1$  وصل است. بر رأس دیگری مثل  $a_4$  وصل است (در غیر این صورت  $\delta = 2$ )  $a_4$  بر  $a_5$  و  $a_3$  و  $a_1$  و  $a_2$  وصل است. پس از  $a_1$  تا  $a_{k+1}$  یک مسیر به طول  $K$  داریم.

ب) نادرست. مثال گراف  $K_2$  را در نظر بگیرید  $\delta(G) = 1$  و  $\delta(G) > K$  یعنی  $K$  ضرایب عدد ۱ است پس  $K+1$  ضرایب عدد ۲

است و ما مسیری به طول ۲ نداریم.

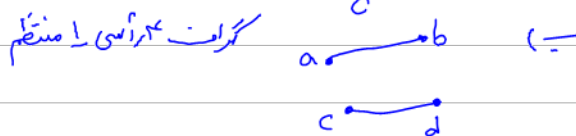


گراف ۴ رأسی منتظم

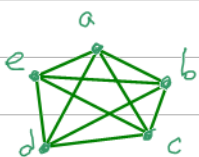
۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیر تهی  $K$ -منتظم بکشید که:

الف)  $K$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب)  $K$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



گراف ۴ رأسی ۱-منتظم

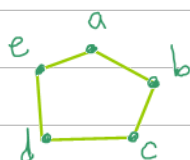


الف) گراف ۵ رأسی ۴-منتظم

۱۵ یک گراف ۵ رأسی غیر تهی  $K$ -منتظم بکشید که:

الف)  $K$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب)  $K$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



ب) گراف ۵ رأسی ۲-منتظم