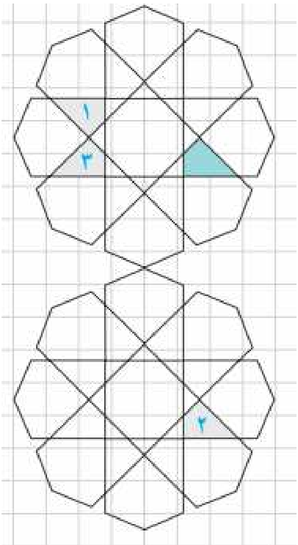
درس اوّل : تبدیل های هندسی

یکی از مفاهیم مهم در هندسه، تبدیل های هندسی است. در این درس با مفهوم تبدیل هندسـی و انـواع آن آشنا شویم.

بررسی شهودی برخی از تبدیل ها



در سال های گذشته با برخی از انواع تبدیل ها مانند بازتاب ، انتقال و دوران آشنا شده اید. در تصویر روبرو، این تبدیل ها را مشاهده می کنیم. اگر در این تصویر چهارضلعی های ۱ و۲ و ۳ را تبدیل یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده بدانیم. در این صورت :

الف : کدام چهارضلعی، انتقال یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده است؟ (......)

ب : کدام چهارضلعی، بازتاب چهارضلعی رنگ شده است؟ (......)

پ : کدام شکل، دوران یافته‌ی شکل رنگ شده است؟ (......)

نتیجه : به کمک شکل های فوق، بطور شهودی نتیجه می شود که بازتاب، انتقال و دوران، می توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه‌ی پاره خط ها و زاویه ها را تغییر نمی دهند.

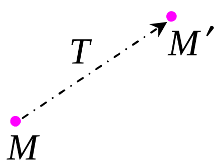
***

تعریف تبدیل

در یک صفحه مانند P تبدیل T ، عبارت است از تابعی است که به موجب آن به هر نقطه مانند M یک و تنها یک نقطه مانند M' در P متناظر می شود. در این صورت می نویسند،

$$T : P \to P$$

و می خوانند،

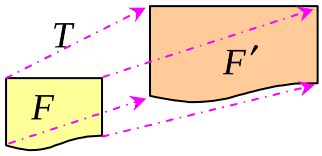


« T تبدیلی است از P به P »

اگر با تبدیل T نقطه‌ی M به نقطه‌ی M' متناظر شود، می نویسیم،

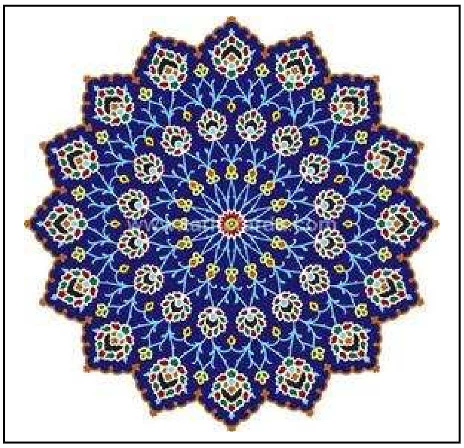
$$T(M) = M'$$

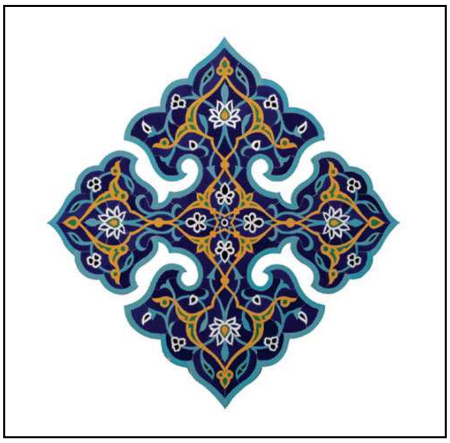
و می گوییم T نقطه‌ی M را به M' تبدیل می کند. همچنین M' را تبدیل یافته‌ی M تحت تبدیل T می نامند.



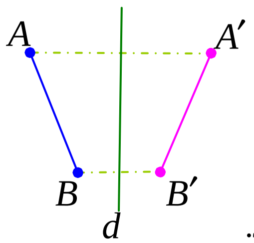
شکل هندسی F' را تبدیل یافته‌ی(تصویر) F می نامند، هرگاه تمام نقاط F، تحت یک تبدیل مانند T به نقاط متناظر از شکل F' تبدیل شوند.

توجه : تبدیل های مطرح شده در این کتاب ، می تواند جایگاه شکل در صفحه (موقعیت) یا اندازه‌ی شکل را تغییر دهند.





تعریف : تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند، را **طولپا** (**ایزومتری**) می نامند. به عبارتی دیگر در تبدیل ایزومتری داریم:



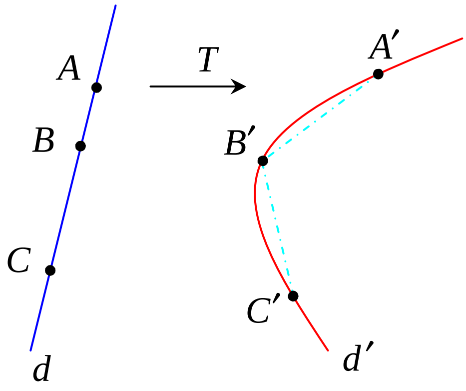
$$\left.\begin{array}{l} T(A)=A' \\ T(B)=B' \end{array}\right\} \leftrightarrow AB=A'B'$$

در ادامه، متوجه خواهید شد که انتقال، دوران و بازتاب تبدیل های ایزومتری هستند.

تمرین ۱ : ثابت کنید که تبدیل یافته‌ی هر خط راست تحت یک تبدیل یکسان، یک خط راست است.

حل : فرض کنیم نقاط A' و B' و C' که به ترتیب تبدیل یافته‌ی نقاط A و B و C ، تحت یک تبدیل یکسان مانند T واقع در خط راست d باشند. می خواهیم ثابت کنیم که این سه نقطه (A' و B' و C') روی یک خط راست دیگری مانند d' واقع اند. گیریم که چنین نباشد، پس پاره خط های $A'B'$ و $B'C'$ شیب مساوی ندارند. لذا حداقل یکی از نقاط A' و B' و C' تحت تبدیل دیگری غیر از T بدست آمده است و این

خلاف یکسان بودن تبدیل می باشد. پس باید پاره خط های $A'B'$ و $B'C'$ شیب برابر داشته باشند و این یعنی نقاط A' و B' و C' روی یک خط راست واقعند.



در ادامه ، این قضیه را برای هر یک از تبدیلاتی که مطرح خواهد، به صورت جداگانه اثبات می شود.

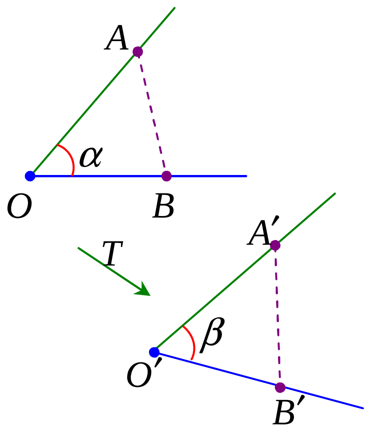
توجه : چون تبدیل یافته‌ی هر خط، یک خط راست است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل یافته‌ی یک خط، کافی است، تبدیل یافته‌ی دو نقطه‌ی دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

قضیه: در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافته‌ی هر زاویه، زاویه ای هم اندازه‌ی آن است.

اثبات : ابتدا پاره خط های AB و $A'B'$ را رسم می کنیم. چون T تبدیلی طول پا است. لذا داریم :

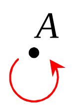
$$\left.\begin{matrix} T(A)=A' \\ T(B)=B' \\ T(O)=O' \end{matrix}\right\} \to OA=O'A'\ ,\ OB=O'B'\ ,\ \ AB=A'B'$$

پس دو مثلث OAB و $O'A'B'$ به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند. لذا زاویه های AOB و $A'O'B'$ مساوی هستند. یعنی $\angle\alpha=\angle\beta$



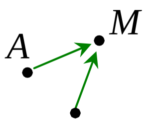
***

تبدیل همانی : تبدیل T را تبدیل همانی می نامند، هرگاه تبدیل یافته‌ی هر نقطه مانند A از صفحه‌ی P همان نقطه خواهد بود. یعنی $T(A)=A$



معمولاً تابع همانی را به I نمایش می دهند و می نویسند. $I(A)=A$

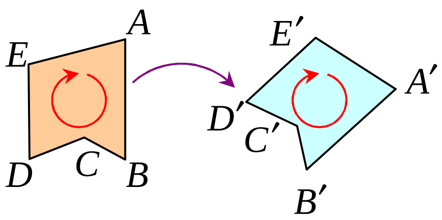
تبدیل ثابت : تبدیل T را تبدیل ثابت می نامند، هرگاه تبدیل یافته‌ی هر نقطه مانند A از صفحه‌ی P نقطه‌ی ثابتی مانند M از همین صفحه باشند. یعنی $T(A)=M$



***

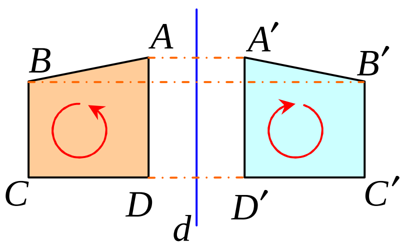
شکل های هم جهت

یک شکل و تبدیل یافته‌ی آن را **هم جهت** می نامند، هرگاه جهت حرکت روی نقاط یک شکل (به ترتیب) و جهت حرکت روی نقاط متناظر در شکل دیگر ، یا هر دو شکل همجهت حرکت عقربه های ساعت و یا هر دو شکل خلاف حرکت عقربه های ساعت باشد.



شکل های غیر هم جهت

یک شکل و تبدیل یافته‌ی آن را **غیر هم جهت** می نامند، هرگاه جهت حرکت روی نقاط یک شکل همجهت حرکت عقربه های ساعت و جهت حرکت روی نقاط متناظر در شکل دیگر خلاف حرکت عقربه های ساعت باشد.



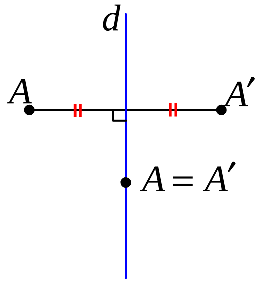
***

بررسی انواع تبدیل ها

در ادامه انواع مهم تبدیل های هندسی را تعریف و ویژگی های آنها را بررسی می کنیم.

الف : بازتاب محوری

بازتاب یک نقطه نسبت به یک خط، با توجه به اینکه، نقطه در خارج یا روی خط، واقع است به صورت های زیر تعریف می کنند.



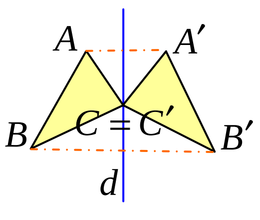
اگر نقطه‌ی A در خارج از خط d باشد، در این صورت نقطه‌ی A' را بازتاب نقطه‌ی A، نسبت به d گویند، هرگاه خط d عمود منصف پاره خط AA' باشد.اگر A روی خط d باشد، بازتاب این نقطه را خود آن نقطه تعریف می کنند.

در این صورت نقطه‌ی A' را بازتاب یا قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d می نامند و می نویسند.

$$S(A)=A'$$

در چنین حالتی، همانطور که در تعریف اشاره شد، خط d عمود منصف AA' خواهد بود و آن را محور بازتاب (خط بازتاب) یا محور تقارن می نامند.

با توجه به این تعریف واضح است که برای رسم بازتاب نقطه‌ای مانند A نسبت به خط d واقع در خارج از این خط، از نقطه‌ی A بر خط d عمود می کنیم و پای عمود را H می نامیم. حال AH را از سمت نقطه-ی H به اندازه‌ی خودش امتداد می دهیم تا A' به دست آید.

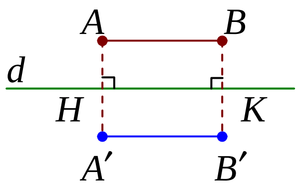


برای رسم بازتاب یک چندضلعی یا هر شکل نسبت به یک خط، کافی است ، بازتاب هر یک از نقاط آن شکل را تعیین کنیم، تا بازتاب چندضلعی حاصل شود.

قضیه : بازتاب محوری طول پا است.

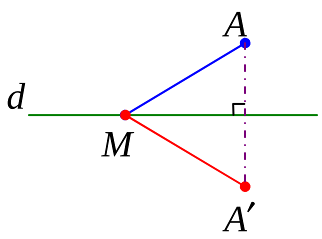
اثبات : باید ثابت کنیم که بازتاب، طول پاره خط ها را ثابت نگه می دارد. برای اثبات این قضیه، حالت های مختلف یک پاره خط را نسبت به خط بازتاب یعنی d را در نظر می گیریم و در هر حالت نشان دهیم که اندازه‌ی پاره خط با اندازه‌ی تصویر آن برابر است.

حالت اوّل : پاره خط AB با خط d موازی است.



در این حالت چون دو خط عمود بر یک خط، با هم موازیند، لذا چهارضلعی $ABB'A'$ مستطیل می باشد و از آنجا واضح است که $AB = A'B'$

حالت دوّم : یکی از دو نقطه‌ی انتهایی پاره خط AB، روی خط بازتاب باشد.

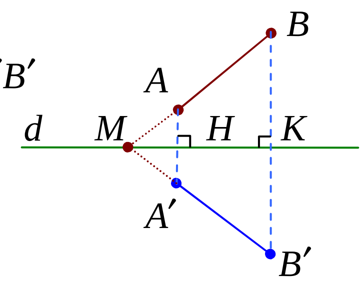


در این صورت چون خط d عمود منصف پاره خط AA' و نقطه‌ی M روی عمود منصف واقع است، پس $MA = MA'$

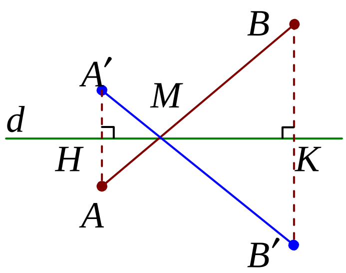
حالت سوّم : پاره خط AB با خط بازتاب نه موازی و نه متقاطع باشد.

در این حالت پاره خط AB را امتداد می دهیم، تا خط بازتاب را در نقطه‌ی M قطع کند. نقطه‌ی B' بازتاب نقطه‌ی B را نسبت به خط بازتاب پیدا و پاره خط MB' را رسم می کنیم. ادعا می کنیم که تصویر نقطه‌ی A نیز روی خط MB' واقع می شود؟ چرا؟ . حال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MB = MB' \\ MA = MA' \end{array}\right\} \to MB - MA = MB' - MA' \to AB = A'B'$$

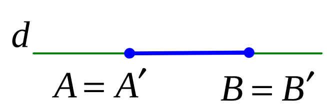


حالت چهارم: پاره خط AB محور بازتاب را قطع می کند.



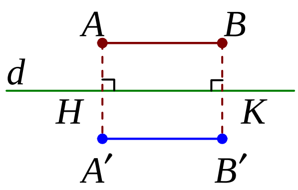
در این حالت ابتدا بازتاب A را نسبت به خط d پیدا می کنیم و آن را A' می نامیم. حال پاره خط MA' را رسم می کنیم و امتداد می دهیم و ادعا می کنیم که بازتاب نقطه‌ی B یعنی B' هم بر امتداد MA' واقع است. چرا؟ . حال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MB = MB' \\ MA = MA' \end{array}\right\} \to MB + MA = MB' + MA' \to AB = A'B'$$

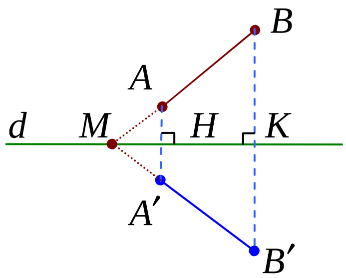


حالت پنجم: پاره خط AB بر خط d منطبق است. در این صورت نقطه‌ی A' بر A و نقطه‌ی B' بر B منطبق است. لذا بدیهی است که $AB = A'B'$

تمرین۲ : آیا بازتاب محوری، شیب خط را حفظ می کند؟ چرا؟



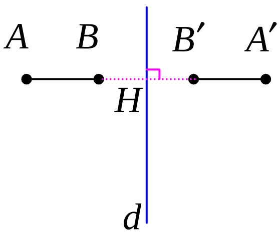
حل : اگر پاره خط AB موازی با محور بازتاب باشد، بازتاب آن $A'B'$ با AB موازی است، و دو خط شیب مساوی دارند. امّا اگر پاره خط AB موازی با محور بازتاب نباشد، $A'B'$ با AB موازی نیست و شیب های نامساوی دارند. لذا بطور کلی بازتاب، شیب خط را حفظ نمی کند.



توجه : در حالتی که پاره خط بر محور بازتاب عمود باشد، نیز شیب خط حفظ می شود.

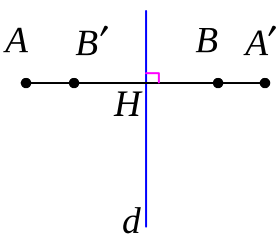
تمرین۳ : در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که AB و بازتاب آن هم اندازه هستند.

حل : این مسئله دو حالت دارد.



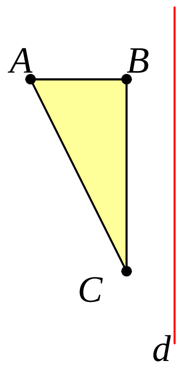
حالت اوّل : پاره خط AB محور بازتاب را قطع نمی کند.

$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ BH = B'H \end{array}\right\} \rightarrow AH - BH = A'H - B'H \rightarrow AB = A'B'$$



حالت دوّم : پاره خط AB محور بازتاب را قطع می کند.

$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ BH = B'H \end{array}\right\} \rightarrow AH + BH = A'H + B'H \rightarrow AB = A'B'$$



تمرین ۴ : شکل روبرو را در نظر بگیرید.

الف : بازتاب شکل را نسبت به خط d رسم کنید.

ب : آیا این تبدیل، موقعیت شکل اوّلیه را تغییر می دهد؟

ج : آیا این تبدیل اندازه‌ی پاره خط ها را تغییر می دهد؟

د : آیا در این تبدیل، شیب هر پاره خط، با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

تمرین ۵ : حالتی بنویسید که بازتاب محوری ، شیب خط را حفظ می کند.

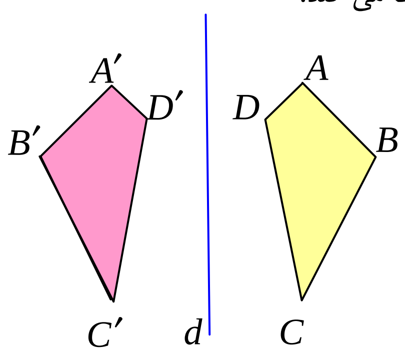
تمرین۶ : جاهای خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.

الف : چون بازتاب محوری طول پا است ، لذا هر چند ضلعی و بازتاب آن با هم .... هستند.

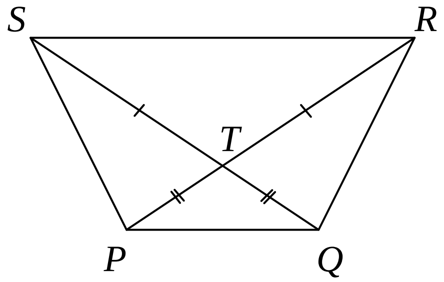
ب : اگر نقطه‌ی A' بازتاب نقطه‌ی A نسبت به خط d باشد. در این صورت بازتاب نقطه‌ی A' نسبت به همین خط ، نقطه‌ی .... خواهد بود. یعنی $S(S(A)) = S(....) = ...$

ج : در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب .... یا .... باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می کند.

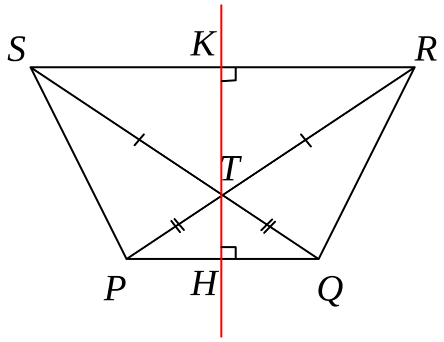
تمرین ۷ : در شکل زیر چهارضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی محدب $ABCD$ تحت بازتاب نسبت به خط d می باشد، در شکل اوّلیه وقتی به ترتیب از A به B و C و D می رویم، جهت حرکت ، موافق جهت حرکت عقربه های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می توان گفت بازتاب محوری ، جهت شکل را حفظ می کند؟



تمرین۸ : در شکل روبرو PR و QS قطر ها و $PT=QT$ و $RT=ST$. ثابت کنید $\overset{\Delta}{PQS} \cong \overset{\Delta}{QPR}$.



حل : چون $PT=QT$ و $RT=ST$ پس مثلث های PTQ و STR متساوی الساقین به رأس T هستند، در نتیجه نیمساز زاویه‌ی رأس عمود منصف قاعده است .یعنی خط KH عمود منصف PQ و SR است. لذا تحت این محور



$$Q \to P \quad و \quad P \to Q \quad و \quad S \to R$$

در نتیجه $SQ \to RP$ و $SP \to RQ$ و $PQ \to QP$ و چون تحت بازتاب طول پاره خط ها ثابت می ماند، پس دو مثلث QPR و PQS به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند.

❄❄❄

ویژگی های بازتاب محوری

الف : بازتاب محوری طول پاره خط ها را حفظ می کند، پس طولپا است.

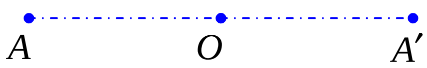
ب : بازتاب محوری شیب خط را الزاماً حفظ نمی کند.

ج : بازتاب محوری جهت شکل را حفظ نمی کند.

❄❄❄

ب : بازتاب مرکزی

بازتاب یک نقطه نسبت به یک نقطه ای دیگر، با توجه به اینکه، این دو نقطه متمایز باشند، یا نباشند به صورت های زیر تعریف می کنند.

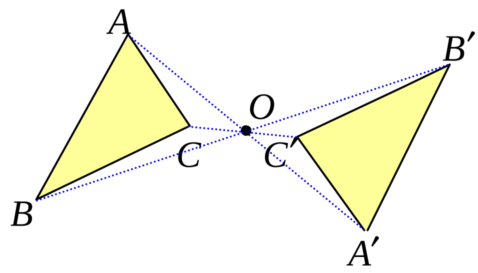


نقطه‌ی A' را بازتاب نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی O گویند، هرگاه نقطه‌ی O نقطه ی وسط پاره خط AA' باشد.

اگر نقطه‌ی A بر نقطه‌ی O منطبق باشد، بازتاب آن نیز A' بر O منطبق می باشد.

در چنین حالتی، همانطور که در تعریف اشاره شد، نقطه‌ی O وسط پاره خط AA' خواهد بود و آن را مرکز بازتاب (نقطه‌ی بازتاب) یا مرکز تقارن می نامند.

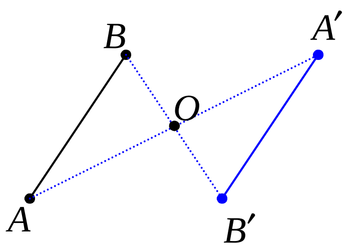
با توجه به این تعریف واضح است که برای رسم بازتاب نقطه‌ای مانند A نسبت به نقطه‌ی O و غیر منطبق بر آن ، از نقطه‌ی A بر نقطه‌ی O وصل می کنیم و پاره خط بدست آمده را از سمت نقطه‌ی O به اندازه‌ی خودش امتداد می دهیم تا A' به دست آید.



برای رسم بازتاب یک چندضلعی یا هر شکل نسبت به یک نقطه، کافی است ، بازتاب هر یک از نقاط آن شکل را تعیین کنیم، تا بازتاب چندضلعی حاصل شود.

قضیه : بازتاب مرکزی طولپا است.

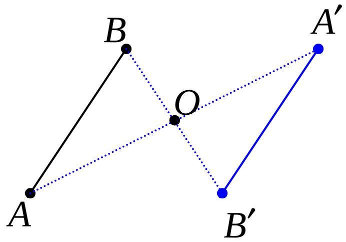
اثبات : باید ثابت کنیم که بازتاب، طول پاره خط ها را ثابت نگه می دارد. برای این کار ، حالت مقابل را در نظر می گیریم.



در این حالت، $OA=OA'$ و $OB=OB'$، همچنین زاویه های AOB و $A'OB'$ به دلیل متقابل به رأس بودن مساویند. لذا دو مثلث AOB و $A'OB'$ به دلیل تساوی دوضلع و زاویه‌ی بین آنها همنهشت هستند. لذا $AB=A'B'$

***

قضیه : بازتاب مرکزی ، شیب خط را حفظ می کند.

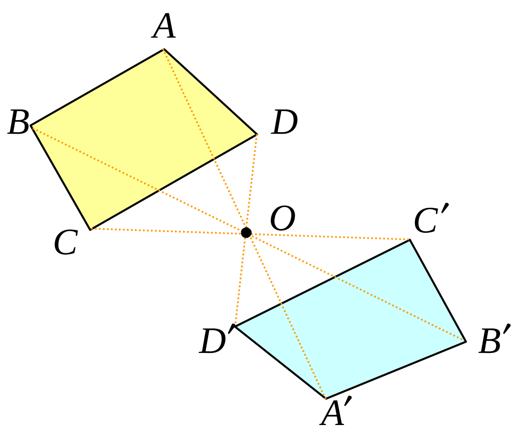


اثبات : با توجه به شکل مقابل، به دلیل همنهشت بودن مثلث های AOB و $A'OB'$ می توان نتیجه گرفت که:

$\angle ABO = \angle A'B'O$ و $\angle OAB = \angle OA'B'$ لذا طبق عکس قضیه‌ی خطوط موازی نتیجه می شود که $AB \parallel A'B'$

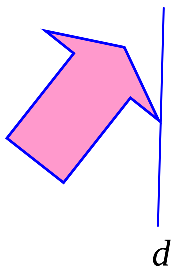
و لذا این دو خط شیب مساوی دارند.

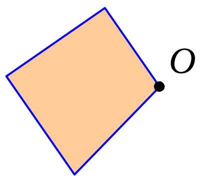
تمرین : یک چهارضلعی و بازتاب آن را نسبت به یک نقطه‌ی دلخواه رسم کنید. آیا بازتاب مرکزی جهت شکل را حفظ می کند؟ چرا؟



حل: با توجه به شکل مقابل، معلوم است که بازتاب مرکزی جهت شکل را حفظ می کند.

تمرین : در هر مورد، بازتاب شکل داده شده را نسبت به نقطه یا خط مشخ شده، رسم کنید.





ویژگی های بازتاب مرکزی

الف : بازتاب مرکزی طول پاره خط ها را حفظ می کند، پس طولپا است.

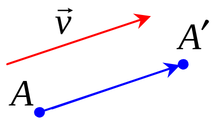
ب : بازتاب مرکزی شیب خط را حفظ می کند.

ج : بازتاب مرکزی جهت شکل را حفظ می کند.

***

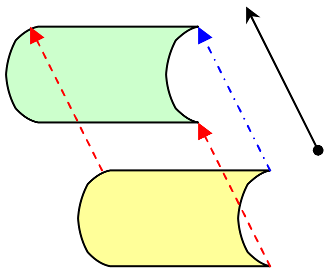
پ : انتقال

نقطه‌ی A' را انتقال یافته‌ی نقطه‌ی A تحت بردار $\vec{v}$ گویند، هرگاه دو بردار $\overrightarrow{AA'}$ و $\vec{v}$ هم اندازه، هم جهت و موازی باشند.



$$\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$$

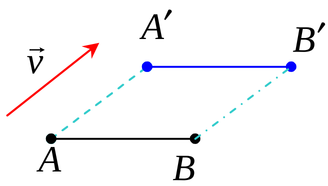
برای رسم انتقال یافته‌ی یک چندضلعی (و به طور کلی هر شکل) کافی است، انتقال یافته‌ی هر یک از نقاط آن شکل را تحت یک بردار تعیین کنیم.



قضیه : انتقال طولپا است.

اثبات : باید ثابت کنیم که انتقال، طول پاره خط ها را ثابت نگه می دارد. برای اثبات این قضیه، حالت های مختلف یک پاره خط را نسبت به بردار انتقال یعنی $\vec{v}$ را در نظر می گیریم و در هر حالت نشان دهیم که اندازه‌ی پاره خط با اندازه‌ی تصویر آن برابر است.

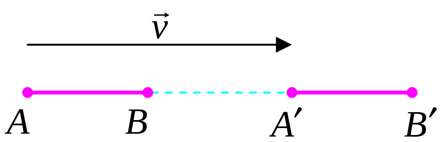
حالت اوّل : پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد.



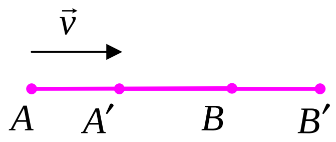
در این حالت دو ضلع مقابل چهارضلعی $AA'B'B$ یعنی AA' و BB' موازی و مساویند، لذا چهارضلعی متوازی الاضلاع است، پس $A'B' = AB$

حالت دوّم : پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد.

در این صورت دو حالت $\vec{v} < AB$ یا $\vec{v} > AB$ را در نظر می گیریم. به کمک مجموع یا تفاضل پاره خط ها در هر دو حالت به دست می آوریم $A'B' = AB$



$$AA' = BB' \to AB + BA' = A'B' + BA' \to AB = A'B'$$



$$AA' = BB' \to AB - A'B = B'A' - A'B \to AB = A'B'$$

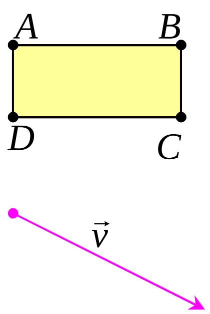
قضیه : انتقال شیب پاره خط را ثابت نگه می دارد.

اثبات : حالت های مربوط به قضیه‌ی قبل را در نظر می گیریم.

در حالت اوّل : چون چهارضلعی حاصل متوازی الاضلاع است. پس $A'B' \parallel AB$ پس شیب های دو خط AB و $A'B'$ برابر است.

در حالت دوّم : چون خطوط AB و $A'B'$ در یک راستا هستند، پس شیب مساوی دارند.

تمرین ۱۱ : شکل روبرو را در نظر بگیرید.



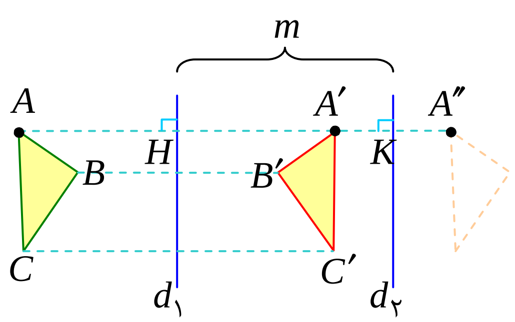
الف : انتقال یافته‌ی تصویر داده شده ، تحت انتقال $\vec{v}$ را رسم کنید.

ب : توضیح دهید که در این تصویر ، پاره خطهایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

ج : آیا این تبدیل ، موقعیت شکل اوّلیه را حفظ می کند؟

د : آیا این تبدیل اندازه‌ی پاره خط ها و شیب آنها را حفظ می کند؟ زاویه‌ی بین خطوط چطور؟

تمرین۱۲ : در شکل زیر، d_1 به موازات d_2 و به فاصله‌ی m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.



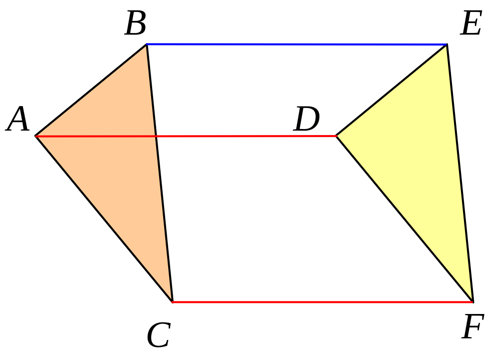
الف: نشان دهید، $AA'' = 2m$

ب : اندازه‌ی BB'' و CC'' چقدر است؟

ج : با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

تمـرین۱۳ : در شـکل مقابـل، پـاره خـط هـای AD و BE و CF مـساوی و موازینـد، ثابـت کنیـد

$$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$$



حل : تحت یک بردار انتقال مانند بردار $\overrightarrow{AD}$ می توان :

$$A \to D \quad و \quad B \to E \quad و \quad C \to F$$

منطبـق کـرد و لـذا $AB \to DE$ و $AC \to DF$ و $BC \to EF$ و چون تحت انتقال طول پاره خـط هـا ثابت مـی مانـد، پـس دو مثلـث ABC و DEF بـه حالت تساوی سه ضلع همنهشت می باشند.

***

ویژگی های انتقال

۱ . انتقال طول پاره خط را حفظ می کند، پس طولپا است.

۲ . انتقال شیب خط را حفظ می کند.

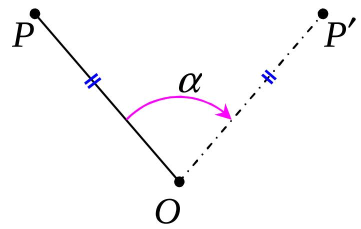
۳ . انتقال جهت شکل را حفظ می کند.

۴ . بردار هایی که هر نقطه را به نقطه‌ی تصویرش تحت یک انتقال نظیر می سازند، دارای طول های مساوی و جهت یکسان هستند. (این بردار ها موازی، هم اندازه و هم جهت هستند.)

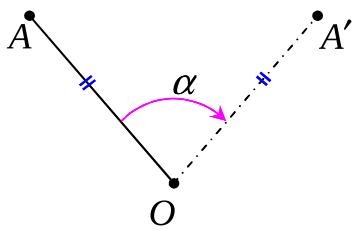
***

ت : دوران

در سال های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازه‌ی زاویه‌ی α،کافی است، هر نقطه از شکل، مثل نقطه‌ی P را به مرکز دوران یعنی O وصل می کنیم. سپس در جهت خواسته شده به کمک OP زاویه ای برابر α رسم و روی ضلع دیگر این زاویه پاره خطی به اندازه‌ی OP جدا می کنیم، تا نقطه‌ی P' به دست آید.



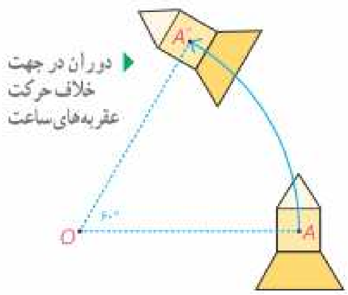
بر این اساس، می توان تعریف زیر را برای دوران بیان کرد.

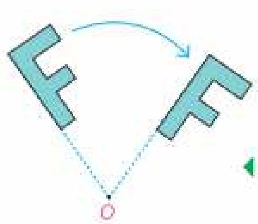


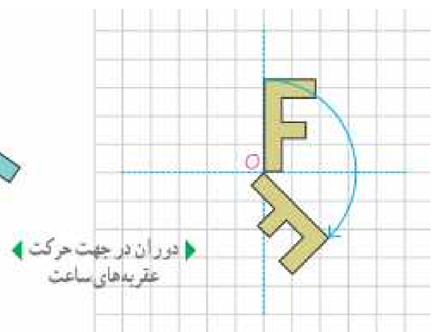
دوران R به مرکز نقطه‌ی ثابت O و زاویه‌ی α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه‌ی A باشد، داریم.

$$OA = OA' \quad \text{و} \quad \angle AOA' = \alpha$$

با توجه به جهت چرخش زاویه ، می توان دوران در جهت حرکت عقربه های ساعت یا خلاف آن در نظر گرفت.



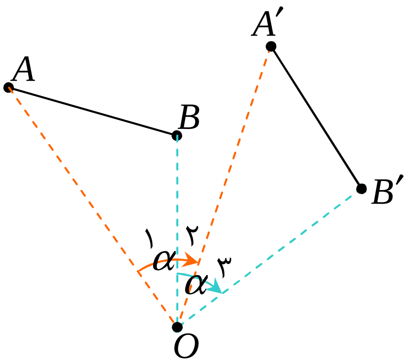




قضیه: دوران، تبدیل طولپا است.

برای اثبات این قضیه، حالت های مختلف را در نظر می گیریم.

حالت اوّل: مرکز دوران یعنی O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه‌ی دوران از زاویه‌ی AOB بیشتر باشد.



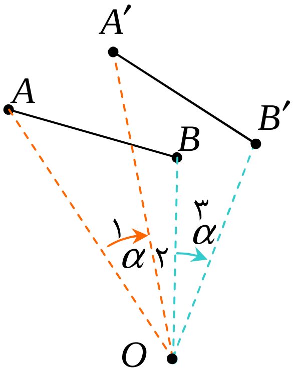
در این حالت با توجه به شکل می توان نوشت:

$$O_۱ + O_۲ = O_۲ + O_۳ = \alpha$$

پس می توان مدعی شد که $O_۱ = O_۳$

لذا دو مثلث OAB و $OA'B'$ به حالت تساوی دوضلع و زاویه‌ی بین آنها، همنهشت هستند. پس خواهیم داشت:

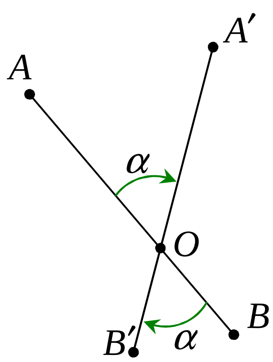
$$A'B' = AB$$



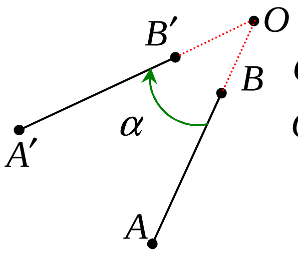
حالت دوّم : مرکز دوران یعنی O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد ولی و زاویه‌ی دوران از زاویه‌ی AOB کمتر باشد. به طور مشابه حالت قبل می توان نتیجه گرفت $A'B' = AB$

حالت سوّم : مرکز دوران یعنی O بر پاره خط AB واقع باشد.

$$\left.\begin{matrix} OA = OA' \\ OB = OB' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} OA + OB = OA' + OB' \rightarrow AB = A'B'$$

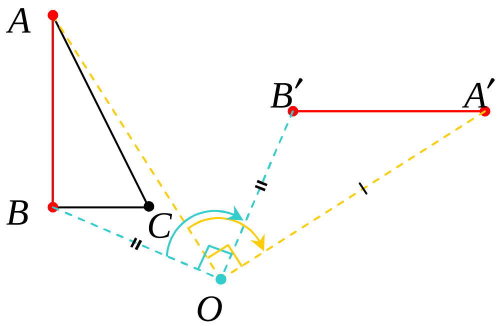


حالت چهارم : مرکز دوران یعنی O بر امتداد پاره خط AB واقع باشد. در حالت به راحتی معلوم است که حکم برقرار است.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{-} OA - OB = OA' - OB' \to AB = A'B'$$

تمرین۱۴ : می خواهیم، مثلث ABC را حول مرکز O و به اندازه‌ی۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه های ساعت دوران دهیم، به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده ایم.



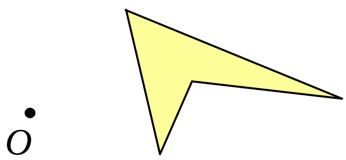
الف : به همین ترتیب تصویر نقطه‌ی C را پیدا و شکل را کامل کنید.

ب : آیا این تبدیل، موقعیت شکل اوّلیه را حفظ می کند؟ اندازه‌ی پاره خط ها چطور؟

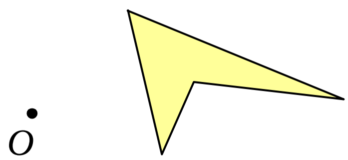
پ : آیا در این تبدیل، شیب پاره خط اوّلیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر است؟

ت : آیا می توانید، زاویه‌ی دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را حفظ می کند؟

تمرین۱۵ : دوران یافته‌ی شکل مقابل را با زاویه‌ی۱۲۰ درجه، در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت را رسم کنید.



حل :

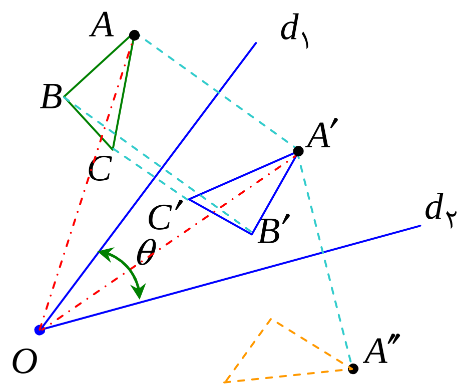


تمرین۱۶: در شکل زیر، d_1 و d_2 با زاویه‌ی θ یکدیگر را قطع کرده اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

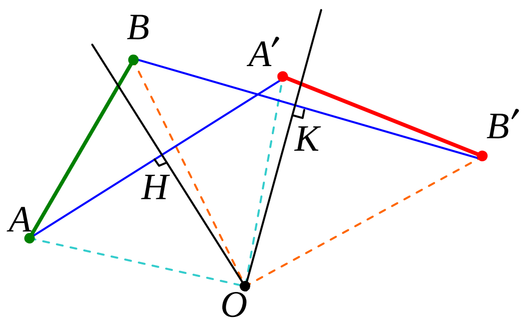
الف: نشان دهید، $\angle AOA''=2\theta$

ب : اندازه‌ی زاویه های BOB'' و COC'' چقدر است؟

ج : با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه ای می گیرید؟



تمرین۱۷: اگر A' و B' به ترتیب دوران یافته‌ی نقاط A و B به مرکز O و زاویه‌ی θ باشند، ثابت کنید، عمود منصف های دو پاره خط غیر موازی AA' و BB' همدیگر را در مرکز دوران قطع می کنند.



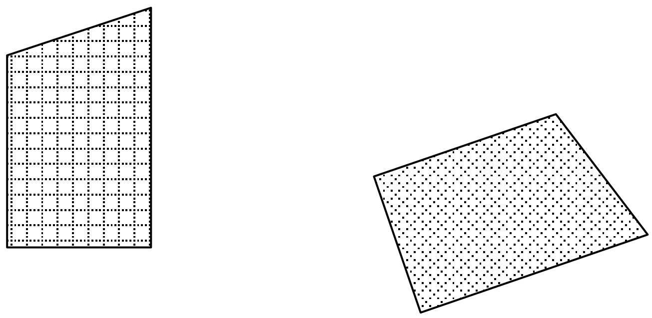
حل : مثلث های AOA' و BOB' متساوی الساقین می باشند. لذا عمود منصف های قاعده های آنها از رأس مقابل می گذرد. چون این دو مثلث رأس مشترک دارند، پس عمود منصف ها از O که مرکز دوران است می گذرند.

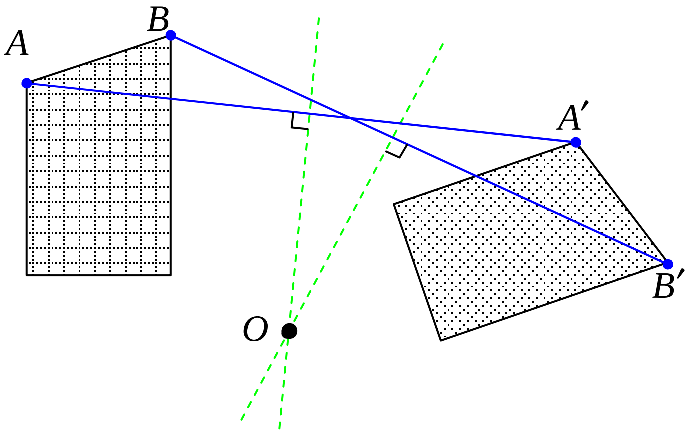
چون دوران طول اندازه‌ی زاویه را ثابت نگه می دارد و طول پا است. پس دوران یافته‌ی نقطه‌ی H به همان مرکز و زاویه‌ی دوران، نقطه‌ی K می شود. لذا زاویه‌ی بین عمود منصف های مذکور برابر زاویه‌ی دوران است.

تمرین۱۸: اگر یک پاره خط و دوران یافته‌ی آن معلوم باشند، توضیح دهید، چگونه می توان مرکز دوران و زاویه‌ی دوران را تعیین کرد؟

حل : مطابق تمرین قبل کافی است دو نقطه از یک شکل را به دو نقطه‌ی متناظر آنها از شکل دیگر به هم وصل کرده و محل تقاطع عمود منصف های پاره خط های بدست آمده را تعیین کنیم. محل تلاقی عمود منصف ها مرکز دوران و زاویه‌ی بین آنها برابر اندازه‌ی زاویه‌ی دوران است.

تمرین۱۹ : با توجه به شکل های زیر مرکز دوران را تعیین کنید.

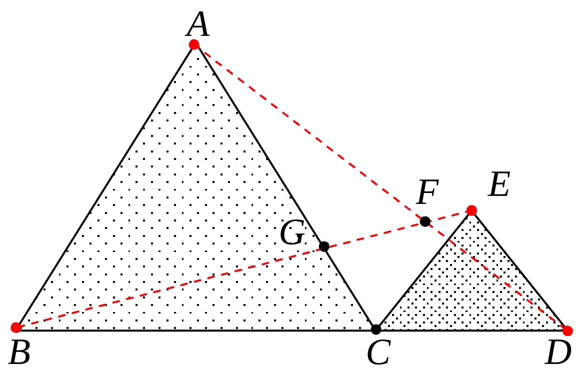




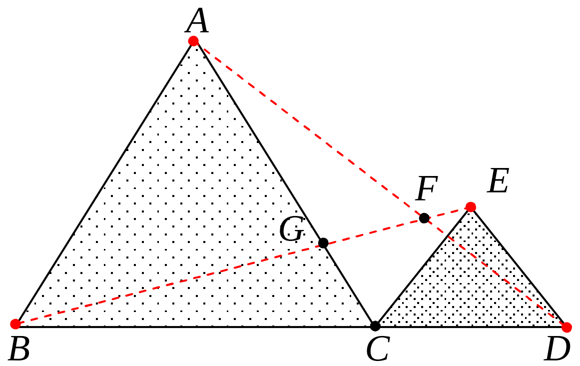
حل : کافی است دو نقطه از یک شکل را به دو نقطه ی متناظر آنها از شکل دیگر به هم وصل کرده و محل تقاطع عمود منصف های پاره خط ها را تعیین کنیم. بدینوسیله نقطه‌ی مرکز دوران بدست می آید.

تمرین۲۰ : مثلث های ABC و ECD در شکل زیر متساوی الاضلاع هستند. ثابت کنید که

$AD = BE$ و $\angle AFB = ۶۰^\circ$



حل: چون $CA=CB$ و $\angle BCA=60^\circ$ همچنین چون $CE=CD$ و $\angle ECD=60^\circ$. پس می توان نقطه‌ی C را مرکز دوران و زاویه‌ی $\angle\alpha=60^\circ$ را زاویه‌ی دوران در نظر گرفت. در این صورت مثلث ACD دوران یافته ی مثلث BCE تحت دوران ۶۰ درجه حول نقطه‌ی C می باشد. بنابراین $BE\to AD$



. با توجه به اینکه در دوران طول پاره خط حفظ می شود و زاویه‌ی بین خط و تصویرش با زاویه‌ی دوران (قدرمطلق دوران) برابر است. بنابراین : $AD=BE$ و $\angle AFB=60^\circ$

***

ویژگی های دوران

الف : دوران طول پاره خط ها را حفظ می کند، پس یک طولپا است.

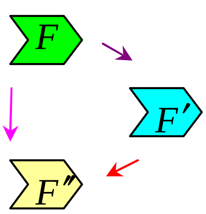
ب : دوران شیب خط را الزاماً حفظ نمی کند.

ج : دوران جهت شکل را حفظ می کند.

د : دوران مرکز دوران را تغییر نمی دهد.

***

ترکیب تبدیل ها



اگر توسط یک تبدیل، شکل F را به F' و سپس توسط تبدیل دیگری شکل F' را به F'' تصویر نماییم.گاهی می توان تبدیلی تعریف کرد که مستقیماً F را F'' تصویر می کند. این تبدیل را **تبدیل مرکب**، می نامند و این عمل را **ترکیب تبدیل ها** می گویند. بر اساس تمرین هایی که قبلاً داشتیم، می توان گفت که :

۱ : ترکیب دو بازتاب محوری ، با محور های موازی، یک انتقال است.

۲ : ترکیب دو بازتاب محوری ، با محور های غیر موازی، یک دوران است.

۳ : ترکیب دو بازتاب محوری ، با محور های عمود بر هم، یک بازتاب مرکزی است.

تمرین ۲۱ : جای خالی را طوری کامل کنید که گزاره‌ی صحیح به دست آید.

الف : دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۱۸۰ درجه، یک .... به مرکز O است.

ب : دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۳۶۰ درجه، یک تبدیل .... است.

پ : در بازتاب محوری ، تبدیل یافته‌ی یک خط راست، یک .... است.

ت : نتیجه‌ی ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی ، یک .... است.

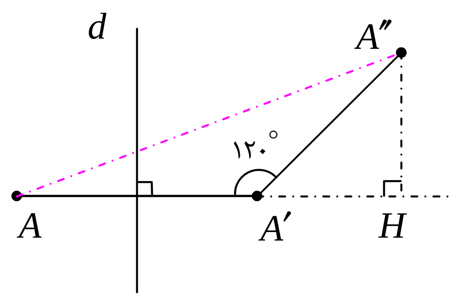
ث : بازتاب .... جهت شکل را حفظ نمی کند.

تمرین ۲۲ : ثابت کنید که ترکیب دو انتقال یک انتقال است.

***

تمرین ۲۳ : نقطه‌ی A به فاصله‌ی $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه‌ی A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه‌ی A' می نامیم. نقطه‌ی A را حول نقطه‌ی A' به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه دوران می دهیم تا نقطه‌ی A'' حاصل شود. طول AA'' را محاسبه کنید.

حل :



طبق ویژگی های دوران واضح است

که $A'A'' = AA' = ۴\sqrt{۶}$

از طرفی در مثلث قائم الزاویه‌ی $A''A'H$ می توان

نوشت $\angle A''A'H = ۱۸۰ - ۱۲۰ = ۶۰$ درجه و در

نتیجه $\angle A'A''H = ۳۰$ می باشد. لذا $A'H = \frac{۱}{۲}A'A'' = \frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۶}) = ۲\sqrt{۶}$

همچنین در مثلث $A'A''H$ داریم :

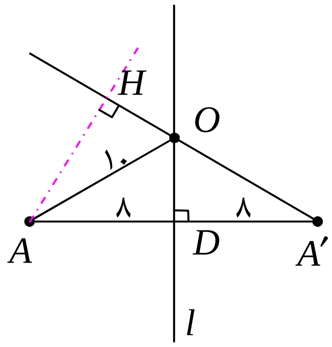
$$\sin ۶۰ = \frac{A''H}{A'A''} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{A''H}{۴\sqrt{۶}} \to A''H = ۲\sqrt{۱۸}$$

اکنون رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث قائم الزاویه‌ی $AA''H$ را بکار می گیریم.

$$AA''^{۲} = AH^{۲} + A''H^{۲} \xrightarrow{AH = ۴\sqrt{۶}+۲\sqrt{۶}=۶\sqrt{۶}} AA''^{۲} = (۶\sqrt{۶})^{۲} + (۲\sqrt{۱۸})^{۲}$$

$$\to AA''^{۲} = ۲۱۶ + ۷۲ = ۲۸۸ \to A'A'' = \sqrt{۲۸۸} = \sqrt{۱۴۴ \times ۲} = ۱۲\sqrt{۲}$$

تمرین۲۴ : نقطه‌ی A' تصویر نقطه‌ی A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه‌ی O روی خط l و $OA = ۱۰$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط OA' چقدر است؟



حل : طبق ویژگی بازتاب محوری واضح است که $OA' = ۱۰$

از طرفی طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OAD می توان نوشت:

$$AD^۲ + OD^۲ = OA^۲ \to ۶۴ + OD^۲ = ۱۰۰ \to OD = ۶$$

اکنون مساحت مثلث OAA' را به دوشکل زیر محاسبه می کنیم.

$$S_{OAA'} = \frac{۱}{۲} OD \times AA' = \frac{۱}{۲}(۶)(۱۶) = ۴۸$$

$$S_{OAA'} = \frac{۱}{۲} AH \times OA' = \frac{۱}{۲} AH \times (۱۰) = ۵AH$$

لذا $۵AH = ۴۸$ یعنی $AH = \frac{۴۸}{۵}$

***

ث : تجانس

در شکل های متشابه دیدید که طول پاره خط ها الزاماً با هم یکسان نیستند، امّا با یک نسبت اندازه‌ی همه ی پاره خط ها بزرگتر یا کوچکتر شده اند. ساده ترین تبدیل از این نوع را تجانس می نامند. در تجانس ابعاد شکل به یک نسبت ثابت بزرگ یا کوچک می شوند، این نسبت را نسبت تجانس (مقیاس) می نامند.

تعریف : اگر نقطه‌ی O نقطه ای ثابت در صفحه و $k \neq ۰$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه‌ی M' را مجانس نقطه‌ی M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم، هر گاه سه شرط زیر برقرار باشد.

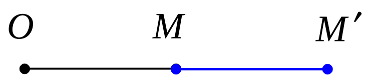
الف : سه نقطه‌ی O و M و M' روی یک خط راست باشند.

ب : $OM' = |k| \times OM$

ج : اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه‌ی O قرار دارند.

و اگر k منفی باشد، نقطه‌ی O بین نقاط M و M' قرار می گیرد.

مثال : فرض کنیم که $k = ۲$ باشد.

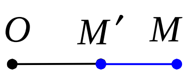


$$OM' = ۲OM$$

مثال : فرض کنیم که $k = -۲$ باشد.

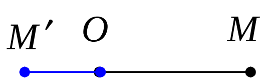
$$OM' = ۲OM$$

مثال : فرض کنیم که $k = \frac{۱}{۲}$ باشد.



$$OM' = \frac{۱}{۲}OM$$

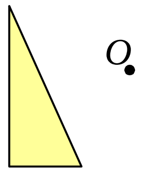
مثال : فرض کنیم که $k = -\frac{۱}{۲}$ باشد.



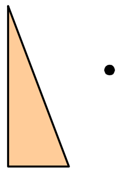
$$OM' = \frac{۱}{۲}OM$$

بر این اساس ، برای تعیین تصویر نقطه ای مانند M به مرکز O و نسبت k ، ابتدا از نقطه‌ی M به O وصل می کنیم. سپس با توجه به مقدار k و مثبت یا منفی بودن آن ، نقطه‌ی M' را چنان تعیین می کنیم که در راستای نقاط O و M بوده و $OM' = |k|OM$ باشد.

تمرین۲۵ : در هر مورد تصویر شکل داده شده، را تحت تجانس به مرکز O و نسبت داده شده رسم کنید.



شکل $A : (k = ۲)$



شکل $B : (k = -\frac{۱}{۲})$

سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : آیا تجانس طول پا است؟ چرا؟

ب : نسبت تجانس، چقدر باشد که تجانس طول پا شود؟

ج : ثابت کنید، در هر تجانس، اندازه‌ی اضلاع به نسبت k تغییر می کنند؟

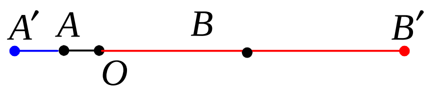
د : ثابت کنید، در هر تجانس، مساحت هر شکل به نسبت $k^۲$ تغییر می کنند؟

قضیه : تجانس شیب خط را حفظ می کند.

اثبات : فرض کنیم نقطه‌ی O مرکز و $k > ۰$ نسبت تجانس باشد. حال دو حالت اتفاق می افتد.

الف : نقطه‌ی O روی خط AB باشد.

در این حالت، بدیهی است که نقاط A' و B' به ترتیب مجانس های نقاط A و B روی خط AB واقع می شوند. بنابر این $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی کند.

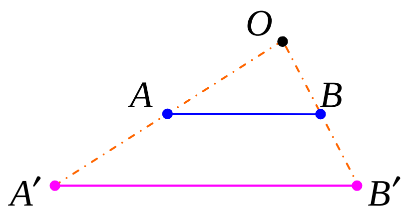


ب : نقطه‌ی O روی خط AB نباشد.

در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب مجانس های نقاط A و B باشند. طبق تعریف داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA' = k \times OA \\ OB' = k \times OB \end{array}\right\} \rightarrow \frac{OA'}{OB'} = \frac{k \times OA}{k \times OB} \rightarrow \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB} \rightarrow \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'}$$

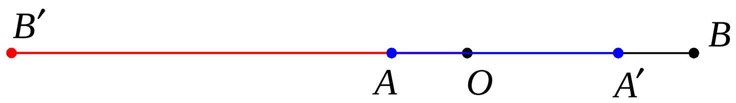
پس طبق قضیه‌ی عکس تالس می توان نتیجه گرفت که $AB \parallel A'B'$



اکنون این موضوع را برای وقتی که $k < ۰$ ثابت می کنیم. در اینجا نیز دو حالت داریم.

الف : نقطه‌ی O روی خط AB باشد.

در این حالت، بدیهی است که نقاط A' و B' به ترتیب مجانس های نقاط A و B روی خط AB واقع می شوند. بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی کند.

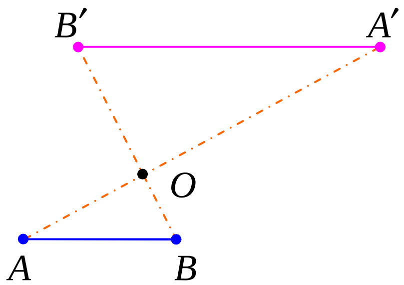


ب : نقطه‌ی O روی خط AB نباشد.

در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب مجانس های نقاط A و B باشند. طبق تعریف داریم:

$$\left.\begin{aligned} OA' &= -k \times OA \\ OB' &= -k \times OB \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{OA'}{OB'} = \frac{-k \times OA}{-k \times OB} \rightarrow \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB} \rightarrow \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'}$$

پس طبق قضیه‌ی عکس تالس می توان نتیجه گرفت که $AB \parallel A'B'$



***

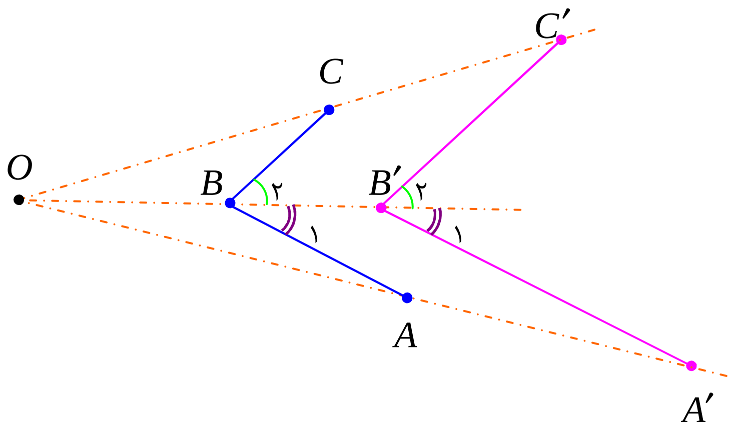
قضیه : تجانس اندازه‌ی زاویه ها را حفظ می کند.

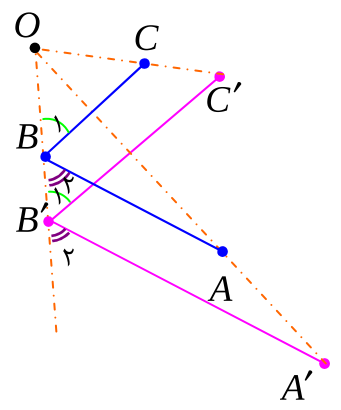
اثبات : فرض کنیم که نقطه‌ی O مرکز و k نسبت تجانس باشد. چون تجانس شیب خط را حفظ می کند،

لذا با توجه به زیر می توان نوشت: $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی خطوط موازی در هر یک از حالت های زیر داریم:

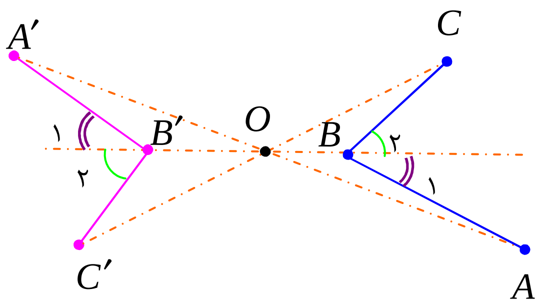
الف : اگر $k > ۰$ دو حالت زیر وجود دارد.

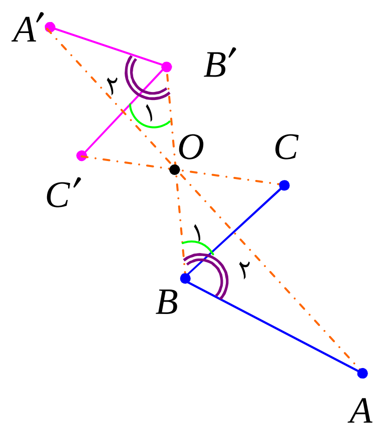




$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A'B' \rightarrow \angle B_{۱} = \angle B'_{۱} \\ BC \parallel B'C' \rightarrow \angle B_{۲} = \angle B'_{۲} \end{array}\right\} \rightarrow \angle B_{۱} + \angle B_{۲} = \angle B'_{۱} + \angle B'_{۲} \rightarrow \angle ABC = \angle A'B'C'$$

ب : اگر $k < ۰$ دو حالت زیر وجود دارد.



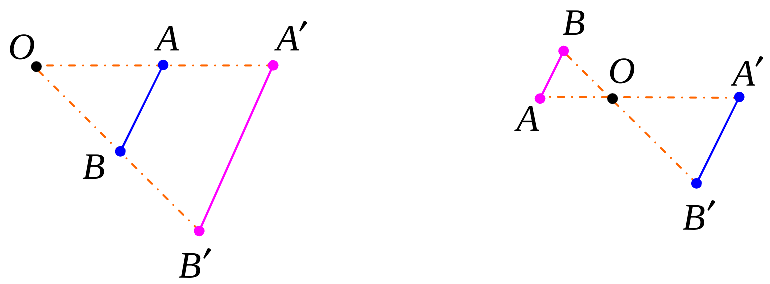


$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A'B' \rightarrow \angle B_{۱} = \angle B'_{۱} \\ BC \parallel B'C' \rightarrow \angle B_{۲} = \angle B'_{۲} \end{array}\right\} \rightarrow \angle B_{۱} + \angle B_{۲} = \angle B'_{۱} + \angle B'_{۲} \rightarrow \angle ABC = \angle A'B'C'$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A'B' \rightarrow \angle B_{۱} = \angle B'_{۱} \\ BC \parallel B'C' \rightarrow \angle B_{۲} = \angle B'_{۲} \end{array}\right\} \rightarrow \angle B_{۲} - \angle B_{۱} = \angle B'_{۲} - \angle B'_{۱} \rightarrow \angle ABC = \angle A'B'C'$$

تمرین۲۶ : نشان دهید که برای هر تجانس به نسبت k، اندازه‌ی تصویر هر پاره خط، $|k|$ برابر، اندازه‌ی آن پاره خط است. به عبارتی دیگر $A'B'=|k|\times AB$

حل :



$$\left.\begin{aligned}OA'&=|k|OA\\OB'&=|k|OB\end{aligned}\right\}\to \left.\begin{aligned}\frac{OA'}{OA}&=|k|\\ \frac{OB'}{OB}&=|k|\end{aligned}\right\}\to \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}\to\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}\to AB\parallel A'B'$$

لذا طبق قضیه‌ی کلی تالس داریم:

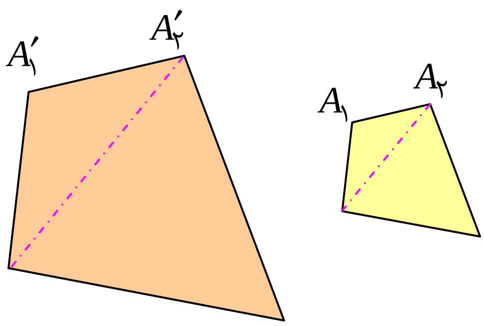
$$\to \frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}\xrightarrow{\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=|k|}\frac{AB}{A'B'}=|k|\to A'B'=|k|\times AB$$

تمرین۲۷: نشان دهید که هر چندضلعی و مجانس آن متشابهند. به عبارتی دیگر،

اگر A'_1 و A'_2 و A'_3 و ... و A'_n رئوس یک n ضلعی، به ترتیب مجانس نقاط A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n از n ضلعی دیگر باشند.در این صورت این دو n ضلعی، متشابهند.

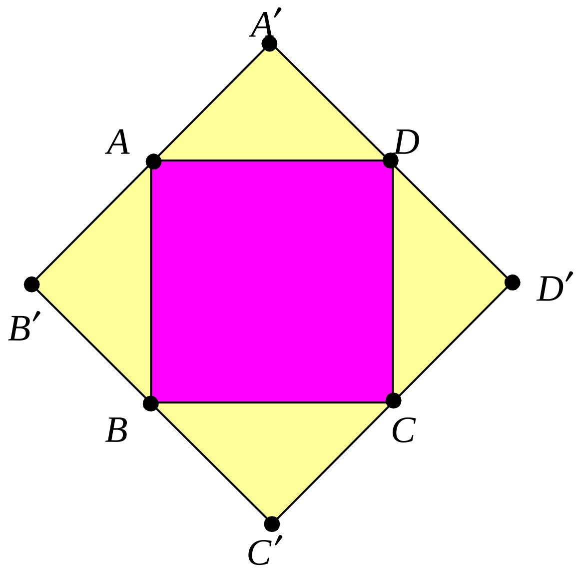
حل :

$$\left.\begin{aligned}A'_1A'_2&\parallel A_1A_2\\A'_2A'_3&\parallel A_2A_3\\&\ldots\ldots\\A'_{n-1}A'_n&\parallel A_{n-1}A_n\end{aligned}\right\}\to A'_1A'_2A'_3\ldots A'_n\approx A_1A_2A_3\ldots A_n$$



تمرین۲۸ : با ارائه‌ی یک مثال، نشان دهید که دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

حل : با توجه به شکل زیر ، دو مربع $ABCD$ و $A'B'C'D'$ متشابهند، ولی متجانس نیستند.

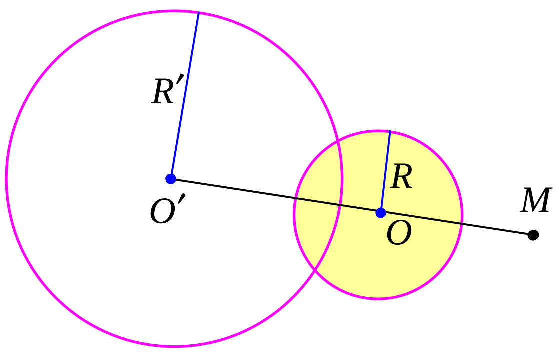


توجه : هر دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند، مگر اینکه اضلاع آنها، نظیر به نظیر موازی باشند.

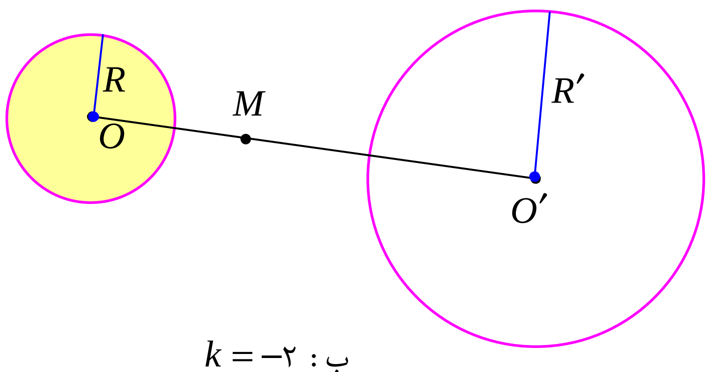
تمرین۲۹: دایره‌ی $C(O,R)$ و نقطه‌ی M خارج این دایره را در نظر بگیرید. مجانس این دایره، نسبت به M در هر یک از حالت های زیر را رسم کنید.

الف) $k=۲$ ب) $k=-۲$ ج) $k=\frac{۱}{۲}$

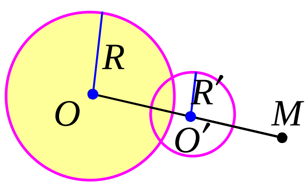
حل :



الف : $k=۲$



ب : $k=-۲$



ج : $k=\frac{۱}{۲}$

***

ویژگی های تجانس

الف : تجانس جهت شکل را حفظ می کند.

ب : تجانس شیب خط را حفظ می کند.

ج : تحت تجانس مرکز تجانس ثابت می ماند.

د : خط هایی که نقطه های نظیر تحت یک تجانس (یعنی خطوط AA' و BB' و ...) را به هم وصل می کنند، در مرکز تجانس همرسند.

هـ : هر دو شکل مجانس متشابهند، ولی عکس آن ممکن است درست نباشد.

و : تجانس به جز در حالت $k=1$ و $k=-1$ طول پاره خط را به نسبت k تغییر می دهد. پس در حالت کلی طولپا نیست.

ز : تجانس به جز در حالت $k=1$ و $k=-1$ مساحت را به نسبت k^2 تغییر می دهد.

توجه ۱: در تجانس به مرکز O و نسبت k

اگر $k>0$ تجانس را ، **تجانس مستقیم** می نامند.

اگر $k<0$ تجانس را ، **تجانس معکوس** می نامند.

اگر $|k|<1$ تصویر شکل .... می شود و آن را **انقباض** می نامند.

اگر $|k|>1$ تصویر شکل ، .... می شود و آن را **انبساط** می نامند.

توجه۲ : تجانس به نسبت -1 ، همان بازتاب مرکزی است.

تمرین ۳۱ : درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

تبدیل	طول پاره خط را حفظ می کند.	اندازه‌ی زاویه را حفظ می کند.	شیب خط را حفظ می کند.	جهت شکل را حفظ می کند.	مساحت شکل را حفظ می کند.
بازتاب محوری	درست	درست	نادرست	نادرست	درست
بازتاب مرکزی	درست	درست	درست	درست	درست
انتقال	درست	درست	درست	درست	درست
دوران	درست	درست	نادرست	درست	درست
تجانس	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

تمرین۳۲ : ثابت کنید که تبدیل یافته‌ی هر خط راست، یک خط راست است. **(برای مطالعه)**

در ابتدا ، این مطلب را مطرح کرده ایم، در اینجا می خواهیم، موضوع را برای هر یک از تبدیلات ، به صورت جداگانه ثابت کنیم.

الف : بازتاب محوری

اثبات : اگر دو خط ناموازی d و L_1 در صفحه و نقاط A' و B' قرینه های دو نقطه‌ی A و B از خط L_1 نسبت به خط d باشند، خط های AB و $A'B'$ خط d را در نقطه ای مانند O قطع می کنند. زیرا که :

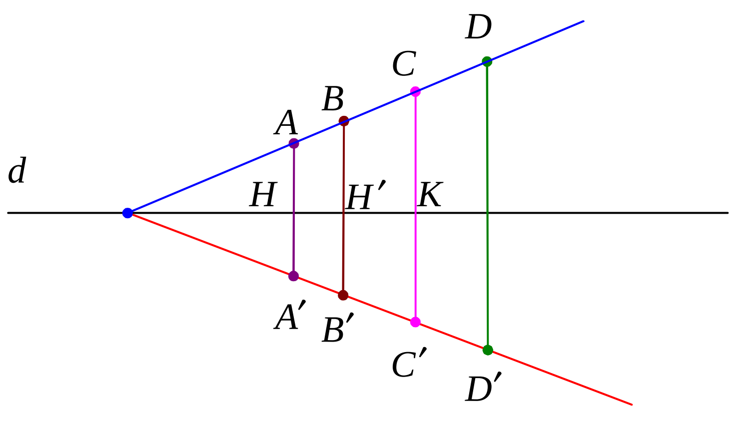
$$\frac{AH}{HA'}=\frac{BH'}{BH}=1 \quad \text{و} \quad AA' \parallel BB'$$

اکنون از نقطه‌ی دلخواه C روی L_1 عمود CK را بر خط d فرود آورده و امتداد می دهیم، تا خط L_2 یعنی امتداد $A'B'$ را در نقطه‌ی C' قطع کند:

$$\frac{CK}{KC'}=\frac{AH}{HA'}=1 \rightarrow KC'=CK$$

یعنی قرینه‌ی هر نقطه از خط L_1 نسبت به محور d بر خط L_2 واقع است. برعکس می توان دید که هر نقطه مانند D' از L_2 قرینه‌ی نقطه ای مانند D از L_1 است. پس L_2 بازتاب L_1 نسبت به خط d است.

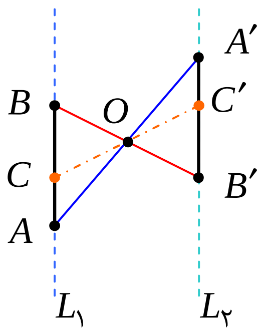
در حالتی که خط L_1 موازی محور تقارن باشد، L_2 نیز موازی آن است؟ (چرا؟)



***

ب : بازتاب مرکزی

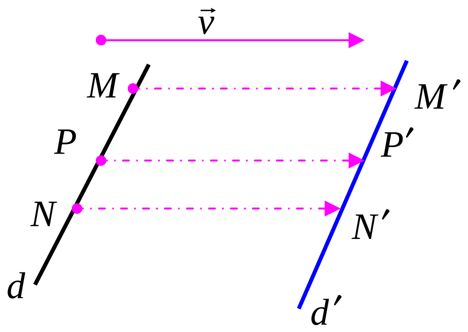
اثبات : نقطه‌ی O به عنوان مرکز تجانس و خط $L_۱$ را در نظر می گیریم. اگر نقاط A' و B'قرینه های دو نقطه‌ی A و B از خط $L_۱$ نسبت به نقطه‌ی O باشند، در این صورت دو مثلث AOB و $A'OB'$ به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین همنهشت هستند. در این صورت زاویه های BAO و زاویه های $B'A'O$ مساویند.



اکنون خط دیگری رسم می کنیم که دو خط AB و $A'B'$ را قطع مـی کنـد. چـــون دو مثلـــث AOC و $A'OC'$ همنهـــشت هـــستند،(چـــرا؟). پس $OC = OC'$ یعنی قرینه‌ی نقطه‌ی دلخواه C روی $L_۱$ نسبت به نقطـه-ی O نقطه‌ی C' است.

پ : انتقال

اثبات : خط راست d و بردار انتقال $\vec{v}$را در نظر می گیریم. اگر دو نقطه‌ی M' و N' به ترتیب انتقال یافته های M و N از خط d در انتقال به بردار $\vec{v}$ باشند. پس $NN' \| MM' \| \vec{v}$ در نتیجه چهارضلعی $MNN'M''$ متوازی الاضلاع است. از این رو $M'N'$ مساوی و موازی با MN خواهد بود و خط d' که بوسیله‌ی M' و N' مشخص می شود، خطی راست موازی با خط d می باشد

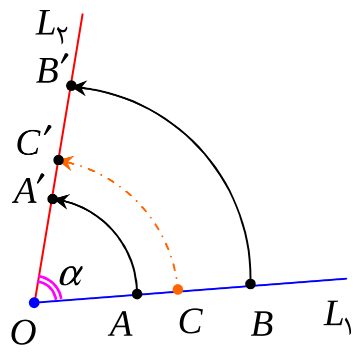


که انتقال یافته‌ی خط d در انتقال به بردار $\vec{v}$ است. زیرا اگر از هر نقطه مانند P' که روی خط d' اختیار کنیم، پاره خطی موازی و مساوی $\vec{v}$ رسم کنیم، مانند $P'P$، نقطه‌ی P روی خط d واقع می شود. در غیر این صورت از متوازی الاضلاع $MM'P'P$ نتیجه می شود که از نقطه‌ی M دو خط به موازات d' رسم شده است که این هم خلاف اصل اقلیدس است. در نتیجه P روی خط d واقع شده و P' متناظر با نقطه-ی P در این انتقال است.

***

ت : دوران

اثبات : نقطه‌ی O به عنوان مرکز و زاویه‌ی α را به عنوان زاویه‌ی دوران در نظر می گیریم. نقاط A' و B' دوران یافته‌ی های دو نقطه‌ی A و B به مرکز و زاویه‌ی دوران باشند،در این صورت زاویه های AOA' و BOB' بر هم منطبقند. حال اگر نقطه‌ی دلخواه C روی خط L_1 در نظر بگیریم و به همین زاویه و مرکز دوران دهیم، تا نقطه‌ی C' به دست آید.



در این صورت $COC'=\alpha$ و منطبق بر زاویه های AOA' و BOB' می باشند لذا دوران هر نقطه از خط L_1 نقطه‌ی از خط L_2 خواهد بود.

***

ث : تجانس

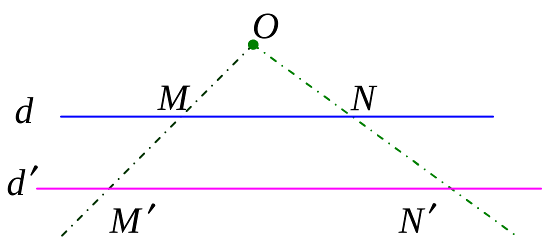
تجانس به مرکز O و نسبت k و خط d را در نظر می گیریم. نقطه‌ی M' مجانس یک نقطه مانند M از خط d را در این تجانس تعیین می کنیم. از نقطه‌ی M' خط d' را موازی d رسم می کنیم. نقطه‌ی N از d را در نظر گرفته و نیم خط ON را رسم می کنیم، تا خط d' را در نقطه‌ی N' قطع کند. با توجه به اینکه M' مجانس M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k است و با توجه به اینکه $M'N' \parallel MN$ داریم.

$$\frac{ON'}{ON}=\frac{OM'}{OM}=k$$

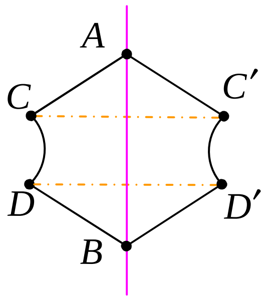
لذا

$$ON'=k\times ON$$

یعنی N' مجانس نقطه‌ی N می باشد. این موضوع به معنی آن است مجانس هر نقطه از خط d بر خط d' واقع است. به سادگی می توان گفت که، مجانس هر نقطه از خط d' بر خط d واقع است. لذا خط d' مجانس d است.



نقطه‌ی ثابت تبدیل :

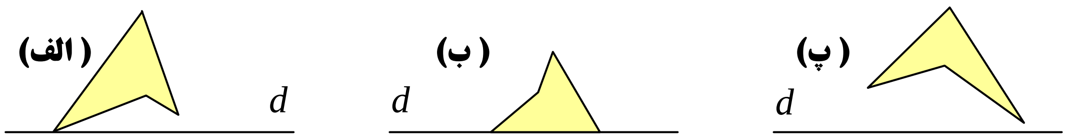


در هر تبدیل، نقطه ای که تبدیل یافته‌ی آن بر خود آن نقطه منطبق می شود، را نقطه‌ی ثابت تبدیل می نامند. برای مثال بازتاب هر نقطه روی خط، همان نقطه است. در شکل مقابل نقاط A و B نقاط ثابت هستند.

در بازتاب مرکزی ، مرکز بازتاب بر خودش منطبق است. لذا بازتاب مرکزی فقط یک نقطه‌ی ثابت دارد.

***

تمرین۳۳ : در هر مورد بازتاب شکل داده شده را نسبت به خط d را رسم نمایید. سپس تعیین کنید که هر تبدیل چند نقطه‌ی ثابت دارد. آنها را مشخص کنید.



توجه : بازتاب هر نقطه روی خط، همان نقطه است، بنابراین، بازتاب پاره خط منطبق بر یک خط، نسبت به همان خط بی شمار نقطه‌ی ثابت دارد.

تمرین ۳۴ : جای خالی را کامل کنید.

الف : در هر بازتاب نسبت به یک خط، تبدیل یافته‌ی تمام نقاط روی خط، نقطه ای روی آن خط است. بنابراین در چنین بازتابی بی شمار نقطه‌ی .... وجود دارد.

ب : در حالتی که مرکز تجانس روی یک رأس یک چند ضلعی باشد، آن رأس نقطه‌ی .... تبدیل است.

تمرین۳۵ : توضیح دهید که در هر یک از تبدیل های زیر، آیا می توان نقاط ثابت داشت؟ چرا؟

الف : انتقال غیر همانی　　　ب : دوران غیر همانی　　　ج : تجانس غیر همانی

حل :

الف : در انتقال غیر همانی، هیچ نقطه‌ی ثابتی وجود ندارد.

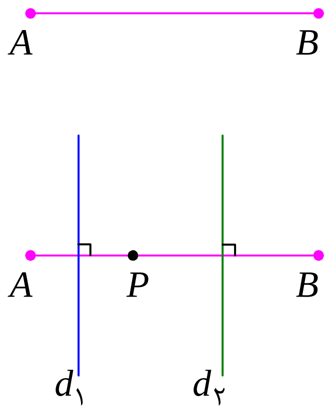
ب : در دوران غیر همانی، اگر یکی از نقاط شکل اصلی به عنوان مرکز دوران تعریف شده باشد، آن نقطه‌ی ثابت تبدیل است.

ج : در تجانس غیر همانی، اگر یکی از نقاط شکل اصلی به عنوان مرکز تجانس تعریف شود، همان نقطه یک نقطه‌ی ثابت تبدیل است.

تمرین۳۶ : پاره خط AB داده شده است. نقطه‌ی P بین B و A چنان بیابید که شرایط زیر را داشته باشد.

الف : بازتاب نقطه‌ی A نسبت به خط d_1 نقطه‌ی P باشد.

ب : بازتاب نقطه‌ی P نسبت به خط d_2 نقطه‌ی B باشد.



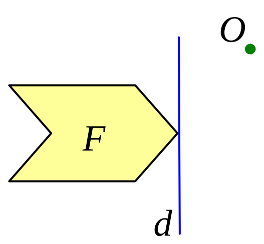
حل: ابتدا نقطه‌ی P را به دلخواه روی پاره خط AB انتخاب می کنیم. سپس عمود منصف های دو پاره خط AP و PB را رسمی می کنیم و آنها را به ترتیب d_1 و d_2 نامگذاری می کنیم. بدین شکل شرایط داده شده در مسئله فراهم می شوند یعنی نقطه‌ی P شرایط مسئله را دارد.

توجه : چون نقطه‌ی P نقطه ی دلخواهای از پاره خط AB است. لذا مسئله بیشمار جواب دارد.

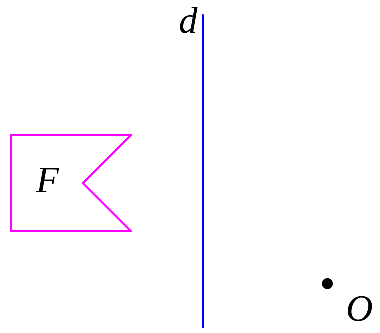
***

تمرین برای حل :

۳۷ : شکل زیر را در نظر بگیرید. ابتدا بازتاب شکل F را نسبت به خط d رسم نموده و آن را F' سپس بازتاب مرکزی شکل F' را نسبت به نقطه‌ی O رسم کنید.



۳۸ : با توجه به شکل زیر ابتدا بازتاب شکل F را نسبت به خط d و سپس تجانس شکل جدید را نسبت به نقطه‌ی O و به نسبت -2 رسم کنید.



۳۹ : مجانس های یک شکل نسبت به یک مرکز و با دو نسبت مختلف k_1 و k_2 ، خود مجانس یکدیگرند. نسبت تجانس این دو شکل کدام است؟

الف) $\frac{k_1}{k_2}$ ب) k_1k_2 ج) k_1+k_2 د) $2k_1k_2$

جواب : گزینه‌ی الف ، چرا؟

۴۰ : به هر یک از سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : نام تبدیلی را بنویسید که شیب خط را حفظ نمی کند.

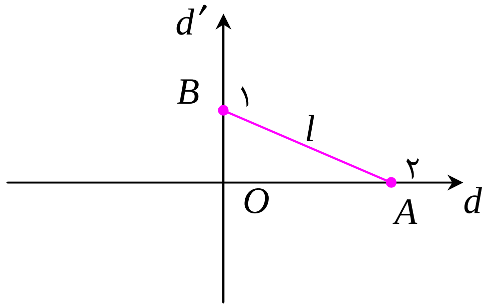
ب : نام تبدیلی را بنویسید که طول پاره خط را حفظ نمی کند.

ج : نام تبدیلی را بنویسید که جهت شکل را تغییر می دهد.

۴۱ : ثابت کنید که مجانس یک متوازی الاضلاع، یک متوازی الاضلاع است.

۴۲ : یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اوّلیه را محاسبه کنید.

۴۳ : در شکل روبرو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت ناحیه‌ی بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟



***

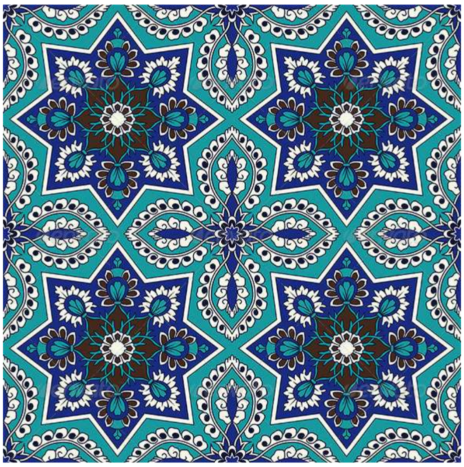
تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

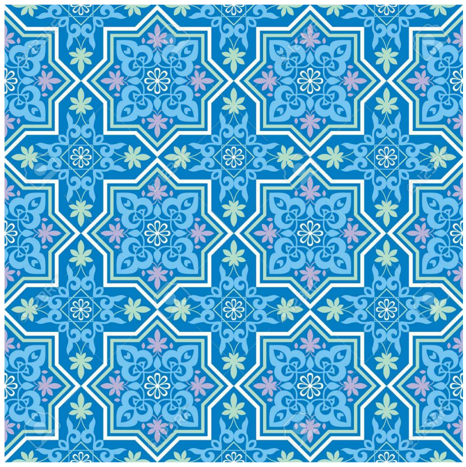
سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس دوّم : کاربردهایی برای تبدیل های هندسی

تبدیل های هندسی در زندگی واقعی کاربرد بسیار دارند. برخی از تبدیل ها در کاشـی کـاری کـاربرد فـراوان دارند.در این درس ، با برخی از کاربرد های تبدیل های هندسی که در درس قبل بررسی کردیم، آشنا شویم.



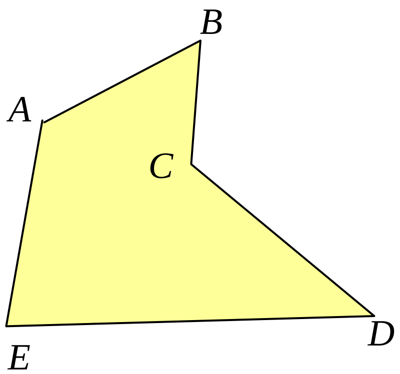


***

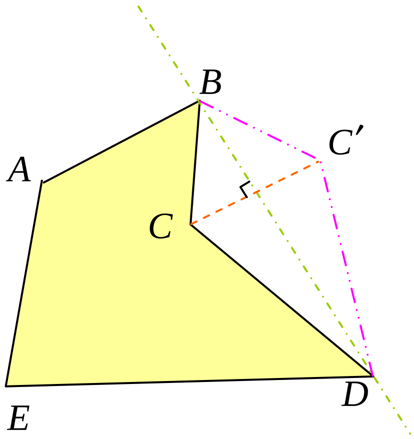
کاربرد ۱ : مسائل هم پیرامونی

یکی از کاربردهای تبدیلات از جمله بازتاب محوری، حل مسائل هم پیرامونی یا هم محیطی می باشد. در این گونه مسائل هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم. به تمرین های زیر توجه کنید.

تمرین۱ : فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی $ABCDE$ مطابق شکل روبرو، داریم که دور آن را حصار کشیده ایم. با ثابت نگه داشتن محیط و ثابت نگه داشتن تعداد اضلاع چند ضلعی، بدون اینکه اندازه‌ی حصار تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهید.



حل : خط گذرا از نقاط B و D را رسم می کنیم. اکنون قرینه‌ی نقطه‌ی C را نسبت به این خط ترسیم می نماییم. چهارضلعی $ABC'DE$ جواب مسئله است. چرا؟

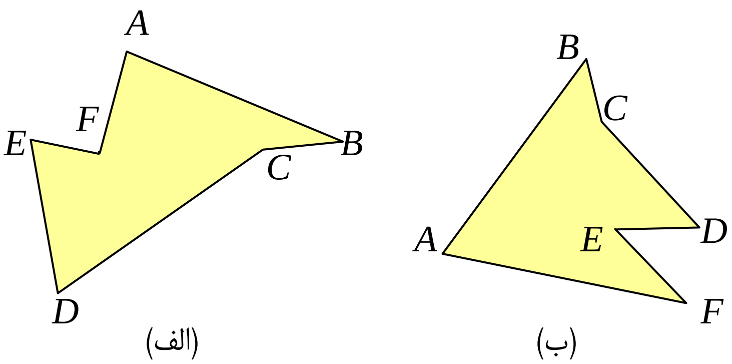


زیرا :

$$P(ABCDE) = AB + BC + CD + DE + EA \xrightarrow{BC=BC',CD=C'D}$$

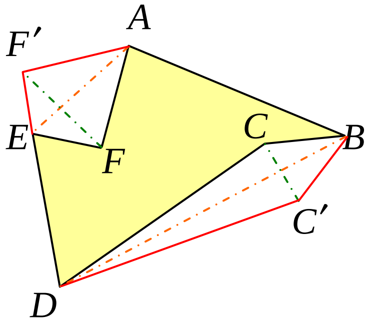
$$P(ABCDE) = AB + BC' + C'D + DE + EA = P(ABC'DE)$$

تمرین۲ : در شکل های زیر ، دور زمین هایی مطابق شکل حصار کشی شده است. چطور می توان بدون کم کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد.



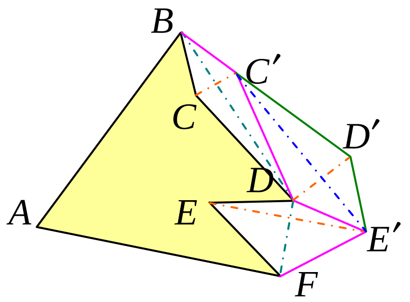
حل : مطابق روش تمرین قبل و با توجه به شکل های زیر می توان، بدون کم کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد.

الف:



$$P(ABCDEF) = P(ABC'DEF')$$

ب :



$$P(ABCDEF) = P(ABC'D'E'F)$$

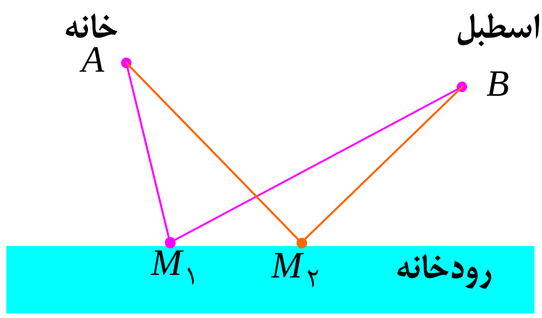
توجه : مراحل حل مسئله‌ی هم پیرامونی برای چندضلعی های مقعر وقتی که افزایش مساحت مورد نظر باشد را تا آنجا ادامه می دهیم که تمام زاویه های داخلی کمتر از ۱۸۰ درجه شوند، به عبارتی دیگر چندضلعی محدب بدست آید.

***

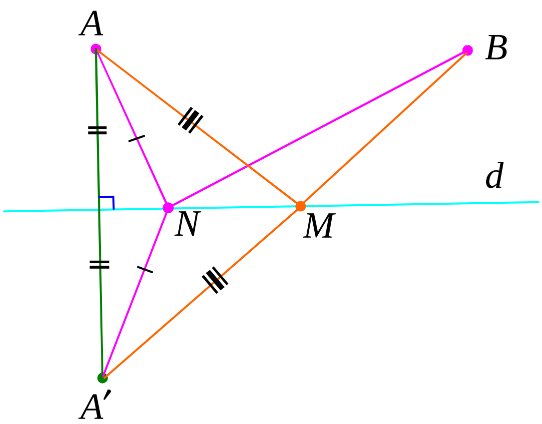
کاربرد ۲ : مسائل یافتن کوتاه ترین مسیر

هرون ، ریاضی دانی است که به او دایره المعارف ریاضی و فیزیک لقب داده اند، وی در فاصله‌ی زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می کرد. او برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیداکردن کوتاه ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد. تمامی این تمرین ها متکی به این اصل می باشند که **کوتاه ترین مسیر بین دو نقطه، اندازه‌ی پاره خط واصل آن دو نقطه است.** به تمرین های زیر توجه کنید.

تمرین۳ : مردی می خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه ای که لبه‌ی مستقیمی دارد، برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که کمترین مسافت از خانه به روخانه و اسطبل داشته باشد.



حل : هدف مسئله، برای پیدا کردن نقطه‌ای مانند M روی خط d طوری که $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. هرون برای حل این مسئله، بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به خط d را پیدا کرد و آن را نقطه‌ی A' نامید. خطی فرضی $A'B$ خط بازتاب را در نقطه‌ی مانند M قطع می کند. نقطه‌ی M جواب مسئله است.(چرا؟)



زیرا با توجه به اینکه :

$\Delta(A'NB): A'B < A'N + NB$ و $A'N = AN$ و $A'M = AM$

پس می توان نتیجه گرفت که :

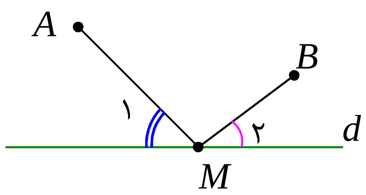
$$A'M + MB < A'N + NB \to AM + MB < AN + NB$$

یعنی :

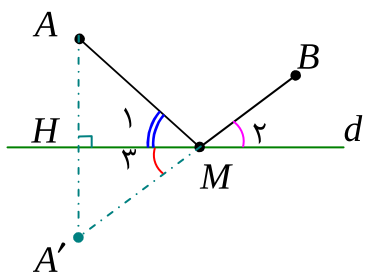
$$AM + MB < AN + NB$$

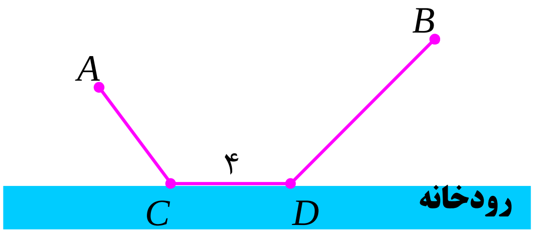
و این به معنی آن است که نقطه‌ی M محلی است که می توان آب را از رودخانه برداشت.

تمرین۴ : با توجه به شکل مقابل فرض کنید که d یک آینه‌ی تخت و A یک نقطه‌ی نورانی است. نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطه‌ی B می گذرد. (به عبارتی نشان دهید که $\angle M_۱ = \angle M_۲$)



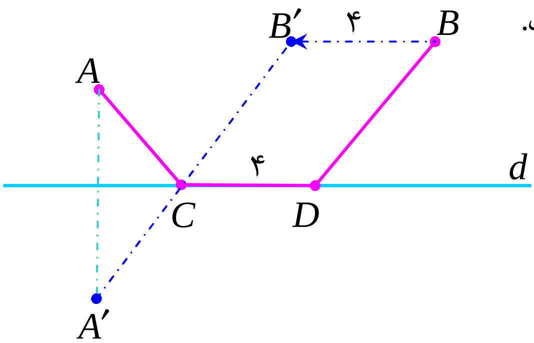
حل : بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به خط d را رسم می کنیم و آن را نقطه‌ی A' می نامیم. دو مثلث قائم الزاویـه‌ی AMH و $A'MH$ بـه حالـت تـساوی وتـر و یـک ضـلع همنهـشت هـستند.(چـون $AM = A'M$ و MH مـشترک). پـس $\angle M_۱ = \angle M_۳$ و چون دو زاویه‌ی $M_۲$ و $M_۳$ متقابل به رأس می باشند، لذا $\angle M_۲ = \angle M_۳$ و در نتیجه $\angle M_۱ = \angle M_۲$





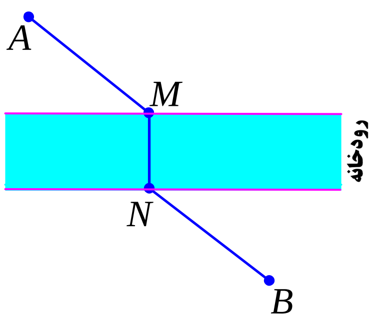
تمرین ۵ : مطابق شکل روبرو، دو شهر B و A در یک طرف رودخانه واقعاند می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم، به طوری که۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد.

حل : ابتدا از نقطه‌ی B و به موازات رودخانه پاره خط BB' که برابر ۴ کیلومتر رسم می کنیم. اکنون بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به خط d (رودخانه) را پیدا کرده و آن را نقطه‌ی A' می نامیم. بعد نقطه‌ی A' را به B' وصل می کنیم تا نقطه‌ی C بدست آید.چون $A'B'$ کوتاه ترین مسیر بین A' و B' می باشد، پس مطابق مسائل قبل مسیر ACB' کوتاه ترین (برای رفتن از A تا رودخانه و سپس تا B') مسیر را دارند. لذا جواب مسئله بدین شکل است که از نقطه‌ی C چهار کیلومتر در کنار رودخانه جاده می کشیم، تا نقطه‌ی D بدست آید. حال از D خطی موازی CB' رسم می کنیم. مسیر $ACDB$ جواب مسئله است. توجه داشته باشیم که چهارضلعی $CB'BD$ متوازی الاضلاع است.



$$A'B' = A'C + CB' = AC + BD$$

$$\rightarrow A'B' + CD = AC + CD + BD$$

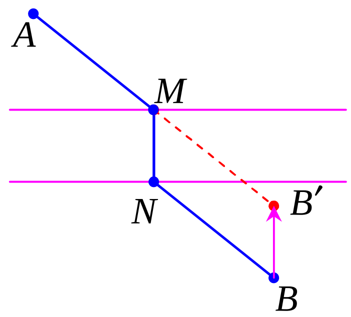


تمرین ۶ : مطابق شکل روبرو، دو شهر B و A در دو طرف رودخانه می باشند. اگر بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم، به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، تعیین کنید که محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

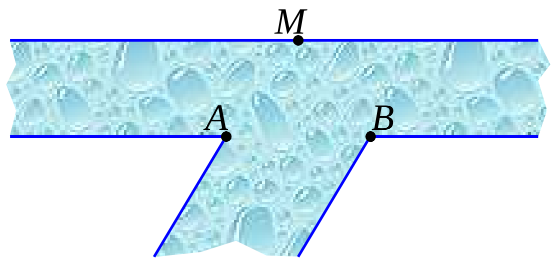
حل : از نقطه‌ی B خطی به اندازه‌ی MN (عرض روخانه) و عمود بر روخانه رسم می کنیم، تا نقطه‌ی B' به دست آید. از B' به A وصل می کنیم. از نقطه‌ی M (محل تقاطع لبه‌ی روخانه با پاره خط AB') می توان پل MN را احداث کرد. مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است. زیرا AB' کوتاه ترین مسیر بین A و B' می باشد. توجه داشته باشیم که چهارضلعی $MNBB'$ متوازی الاضلاع است.

$$AB' = AM + MB' = AM + NB$$

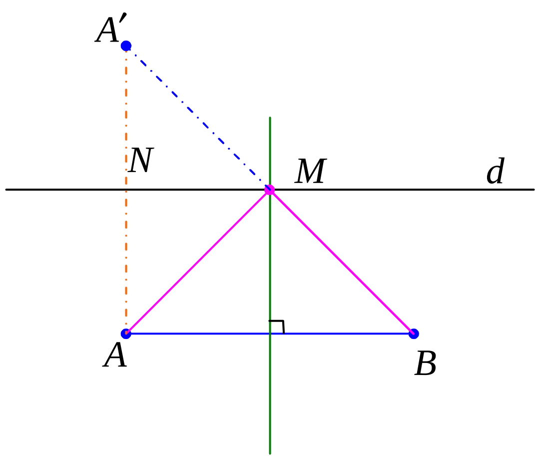
$$\rightarrow AB' + MN = AM + MN + NB$$



تمرین۷ : می خواهیم کنار رودخانه ها، ۳ اسکله بسازیم. جای۲ اسکله‌ی A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله‌ی M را در چه فاصله ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق ها هنگام طی مسیر $MABM$ کوتاه ترین مسیر را طی کنند؟



حل : محل دو اسکله‌ی A و B معلوم است. به روش هرون بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به ساحل رودخانه در سمت مقابل (خط d) را رسم می کنیم و آن را A' می نامیم. از A' به B وصل می کنیم. چون $A'B$ کمترین فاصله‌ی بین A' و B پس AMB کوتاه ترین مسیر می باشد.



$$A'B = A'M + MB = AM + MB$$

پس محل احداث اسکله نقطه‌ی M است.

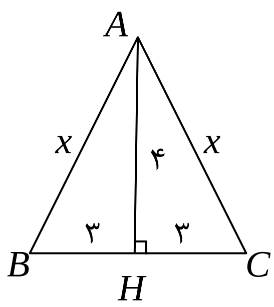
توجه : برای تعیین محل احداث اسکله‌ی M، کافی است عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم. محل برخورد این عمود منصف با ساحل رودخانه در سمت مقابل (خط d) جواب مسئله است. (چرا؟)

زیرا هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است. لذا طبق مفاهیم بازتاب مسیر $MABM$ دارای کمترین فاصله است. توجه داشته باشید که روش عمود منصف زمانی درست است که دو لبه‌ی رودخانه موازی باشند.

تمرین۸ : ضلع $a=۶$ از مثلث ABC به ارتفاع $h_a=۴$ داده شده است. کمترین محیط این مثلث کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۴

حل : مثلث وقتی که متساوی الاضلاع یا متساوی الساقین باشد، می تواند کمترین محیط را داشته باشد. لذا با توجه به شکل مقابل خواهیم داشت.

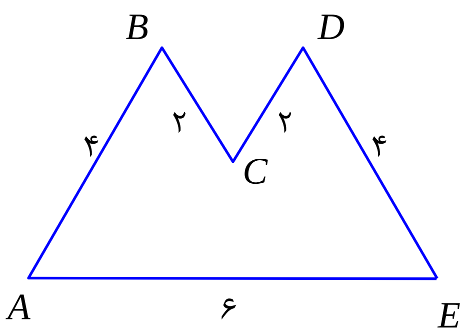


$$\Delta(ABH): x^۲=۴^۲+۳^۲ \rightarrow x=۵$$

پس محیط مثلث می شود.

$$۶+۵+۵=۱۶$$

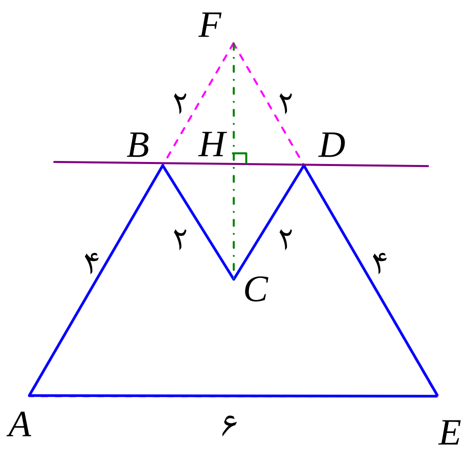
تمرین۹ : در شکل مقابل، بدون تغییر دادن محیط، بیشترین مساحت ممکن چندضلعی کدام است؟



۱) $۱۸\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $۹\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

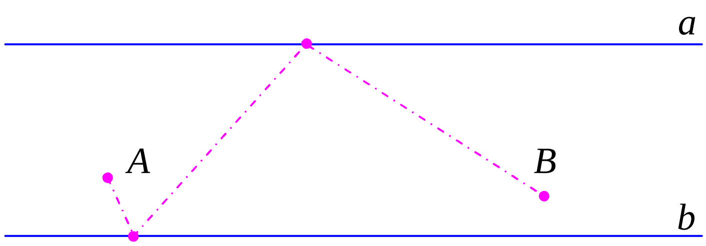
حل : بازتاب رأس C را نسبت به خط گذرا از نقاط B و D را رسم می کنیم. واضح است که مثلث بدست آمده همان محیط چندضلعی $ABCDE$ را دارد. از طرفی این مثلث متساوی الاضلاع است. لذا مساحت آن می شود.



$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۶)^۲=۹\sqrt{۳}$$

تمرین برای حل :

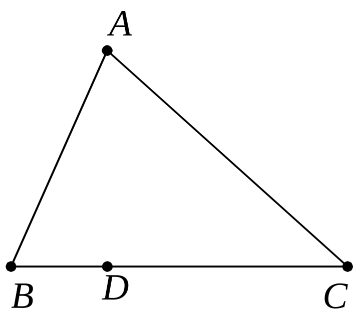
۱۰ : در شکل مقابل دو پاره خط b و a موازیند. می خواهیم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B مسیری داشته باشد که از A شروع و به B ختم شود ولی در این فاصله مشابه شکل زیر با هر یک از دو خط به b و a یک نقطه‌ی مشترک داشته باشد. کوتاه ترین مسیر با این شرایط را رسم کنید.



۱۱ : مطابق شکل زیر، نقطه‌ی D روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد. مثلث DEF را طوری رسم کنید که شرایط زیر برقرار باشند.

الف : یک رأس مثلث DEF روی ضلع AB و رأس دیگر روی ضلع AC باشند.

ب : مثلث DEF کمترین محیط را داشته باشد.



۱۲ : فرض کنید G مرکز ثقل[1] مثلث ABC باشد و همچنین مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ باشد.

الف : جایگاه رأس های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب : مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

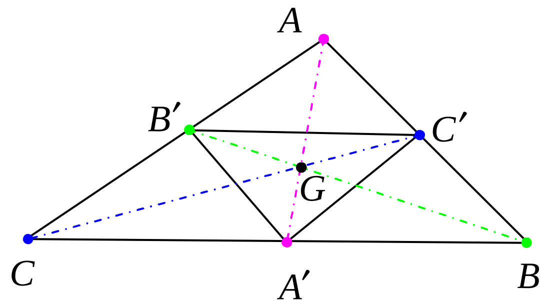
1. محل برخورد میانه ها

حل : الف : نقطه‌ی A' وسط BC و همچنین نقطه‌ی B' وسط AC و نقطه‌ی C' وسط AB قرار دارند.

با توجه به خاصیت مرکز ثقل می دانیم که $GA' = \frac{۱}{۲} GA$ ، پس نقطه‌ی A' مجانس نقطه‌ی A به مرکز

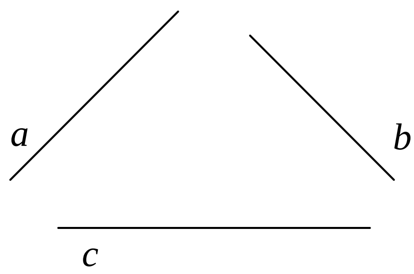
نقطه‌ی G و نسبت تجانس $k = -\frac{۱}{۲}$ است. این موضوع را می توان به همین ترتیب برای نقاط B' و C'

اثبات کرد.

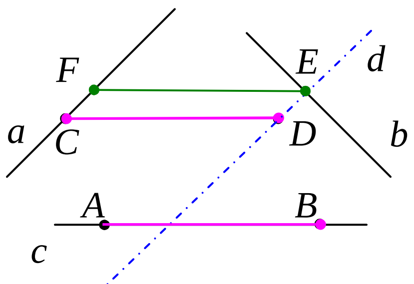


ب : با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC است.

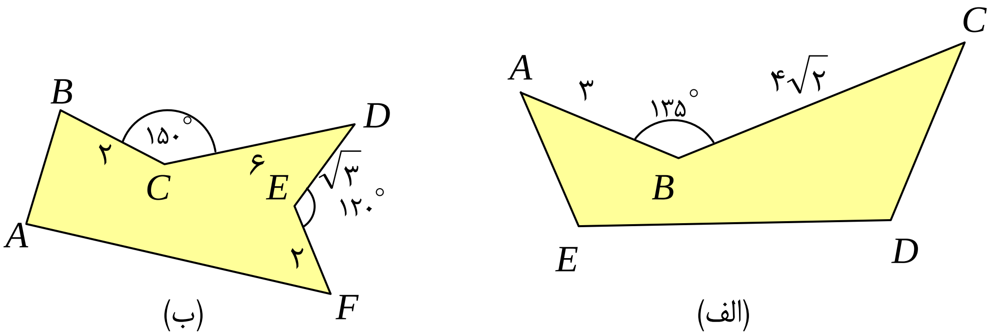
۱۳ : سه خط دو به دو ناموازی a و b و c در صفحه مفروض اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی a و b قرار گرفته و موازی c باشد.



حل : روی خط c پاره خطی به اندازه‌ی۵ سانتی متر (پاره خط AB) را رسم می کنیم. حال از یک نقطه‌ی دلخواه روی خط a (مانند نقطه‌ی C) پاره خطی هم اندازه و موازی پاره خط AB رسم کرده و از نقطه‌ی انتهای آن خط d را موازی a رسم می کنیم. تا خط b را در نقطه ای مانند E قطع کند. در آخر از نقطه‌ی E خطی موازی c رسم می کنیم طوری که a را در نقطه ای مانند F قطع کند. پاره خط EF جواب مسئله است.



۱۴ : زمینی به شکل زیر داریم، می خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند، مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت زمین را حساب کنید.



(ب) (الف)

۱۵ : آیا می توان بدون تغییر محیط یک چندضلعی، می توان مساحت آن را کاهش داد؟ این چند ضلعی باید چه شرایطی داشته باشد؟ با رسم شکل توضیح دهید

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath