ریاضیات گسسته

پایه ی دوازدهم « رشته ی ریاضی و فیزیک »

فصل ۱ : آشنایی با نظریه اعداد

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@amerimath

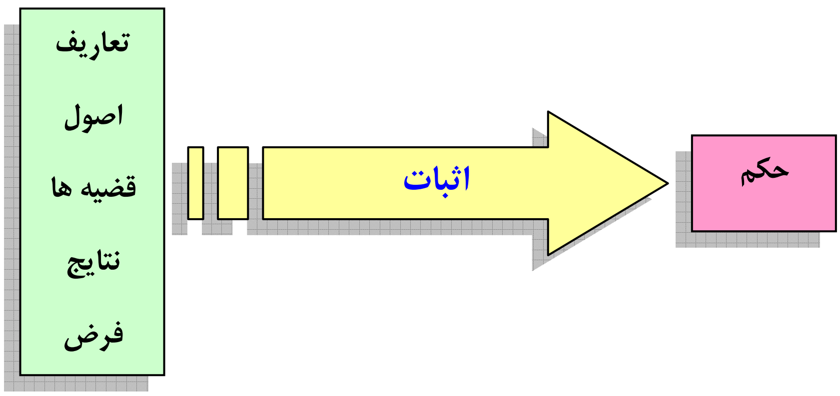
مهر ۱۴۰۰

درس اوّل : استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی برای همه ما ، انکار ناپذیر است. بارها مشاهده کردیم که برای تعامل بین همدیگر به استدلال روی می آوریم. بدیهی است که توسعه‌ی دانش در تمامی زمینه ها ، بدون بکارگیری ابزار استدلال ممکن نیست. استدلال در ریاضیات نیز مانند سایر علوم، جایگاه ویژه ای دارد. واضح است که درک و فهم ریاضی بدون استدلال امکان پذیر نیست و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه ها و الگوریتم ها خواهد کرد. آشنایی با روش های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم بسط و توسعه‌ی آن کمک شایانی می نماید. در این درس با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی می پردازیم.

استدلال و اثبات در ریاضیات :

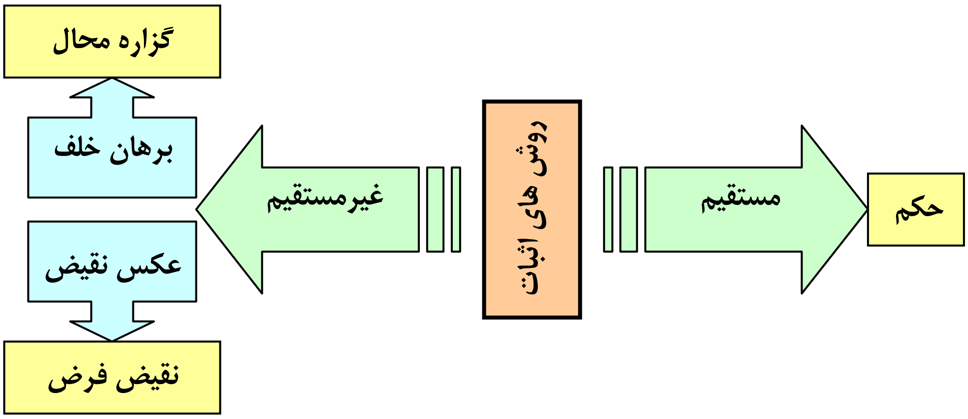
عمل ارائه‌ی دلیل برای اثبات درستی یک گزاره را **استدلال** می نامند. اثبات در ریاضیات ، به دنباله ای منطقی از استدلال هایی گفته می شود که با یک مجموعه از داده های معین و مشخص (مانند اصول موضوعه، تعاریف ، مفروضات و نتایج ثابت شده‌ی قبلی) شروع می شود و با استفاده از مراحل منطقی به یک نتیجه‌ی معتبر می رسد.



برای اثبات گزاره ها در ریاضی معمولاً از دو طریق اثبات **مستقیم** و **غیرمستقیم** استفاده می کنیم. در روش اثبات مستقیم معمولاً گزاره به صورت یک گزاره‌ی شرطی دارای فرض و حکم است که با استفاده از

مفاهیم و قضایایی که قبلاً ثابت یا پذیرفته شده اند و با توجه به شرط مسئله که فرض است، به اثبات درستی حکم می پردازیم.

در روش غیرمستقیم ، کار را با نقیض حکم شروع می کنیم. سپس به انجام روابط منطقی به گزاره محال و یا به نقیض فرض خواهیم رسید. در حالتی که در پایان، گزاره‌ی محال بدست آید، اثبات را **برهان خلف** و در حالتی که در پایان به نقیض فرض رسیده باشیم، اثبات را **عکس نقیض** می نامند.



واضح است که فقط گزاره های درست را می توان اثبات کرد. گاهی اوقات یک گزاره ، نادرست است که برای نشان دادن نادرستی آن، یک **مثال نقض** ارائه می کنیم. مثال نقض، مثالی است که نشان می دهد، یک گزاره‌ی کلی نادرست است.

در ادامه چند مثال برای اثبات های مستقیم و غیر مستقیم و همچنین مثال نقض ارائه می کنیم.

الف : اثبات مستقیم

مثال : درستی گزاره‌ی زیر را ثابت کنید.

مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

اثبات : کافی است ، سه عدد طبیعی را با n و $n+1$ و $n+2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3\underbrace{(n+1)}_{k\in Z}=3k$$

لذا مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است[1].

---

[1] . اگر k یک عدد صحیح باشد. در این صورت $3k$ بر ۳ بخش پذیر است. همچنین اگر n نیز عدد طبیعی باشد، عدد nk بر n بخش پذیر می باشد. در این صورت می توان اضافه کردکه عدد $2k$ همواره زوج و عدد $2k+1$ یا $2k-1$ فرد است.

مثال : ثابت کنید که حاصل ضرب چهار عدد متوالی طبیعی بعلاوه‌ی یک، عددی مربع کامل است.

اثبات : اگر n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت می توان نوشت :

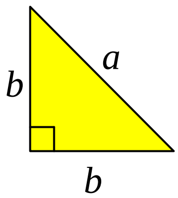
$$n(n+۱)(n+۲)(n+۳)+۱=(\underbrace{n^۲+۳n}_{k\in Z})(\underbrace{n^۲+۳n}_{k\in Z}+۲)+۱$$

$$=k(k+۲)+۱=k^۲+۲k+۱=(k+۱)^۲ \quad \text{مربع کامل}$$

ب: اثبات غیر مستقیم

مثال : ثابت کنید که مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین که اضلاع آن عدد صحیح باشند، وجود ندارد.

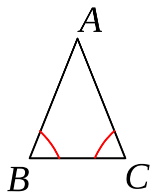
اثبات :. گیریم که چنین مثلثی وجود داشته باشد(فرض خلف). پس :



$$b^۲+b^۲=a^۲\rightarrow ۲b^۲=a^۲\rightarrow \frac{a^۲}{b^۲}=۲\rightarrow \frac{a}{b}=\sqrt{۲}$$

و چون b و a دو عدد صحیح می باشند لذا $\frac{a}{b}$ یک عدد گویا است و نمی تواند با عدد گنگ $\sqrt{۲}$ مساوی باشد. پس فرض خلف باطل است. (برهان خلف)

مثال : ثابت کنید که، اگر در مثلث ABC ، $AB\neq AC$ آنگاه $\angle B\neq\angle C$



اثبات:(به روش برهان خلف) فرض کنیم که $\angle B=\angle C$ باشد. یعنی مثلث ABC دو زاویه‌ی مساوی دارد. بنابراین مثلث متساوی الساقین است. لذا $AB=AC$ و این خلاف فرض می باشد و نمی تواند درست باشد.

ج: مثال نقض

مثال : با ارائه‌ی یک مثال نقض، نشان دهید که گزاره‌ی زیر نادرست است.

عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای همه‌ی عددهای طبیعی n ، عددی اوّل است.

حل : برای رد درستی این گزاره ، کافی است، مقدار n را برابر ۵ قرار دهیم. در این صورت داریم:

$$۲^{۲^n}+۱=۲^{۲^۵}+۱=۲^{۳۲}+۱=۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷$$

و چون حاصل به صورت ۶۴۱×۶۷۰۰۴۱۷ تجزیه می شود، پس عدد اوّل نیست.

توجه داشته باشید که همینطور که گاهی اثبات مستقیم یا غیر مستقیم یک گزاره ممکن است پیچیده باشد، یافتن یک مثال نقض، گاهی دشوار است. طوری که گاهی با گذشت زمان بسیار ، یک مثال نقض برای یک گزاره پیدا می شود.

تمرین ۱ : درستی هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه‌ی مثال نقض رد کنید.

الف : مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

حل : این گزاره صحیح است و به صورت زیر اثبات می شود.

اگر x و y دو عدد فرد باشند، در این صورت وجود دارد دو عدد صحیح مانند m و n طوری که :

$$\left.\begin{matrix} x=2m+1 \\ y=2n+1 \end{matrix}\right\} \rightarrow x+y=(2m+1)+(2n+1)=2m+2n+2=2(\underbrace{m+n+1}_{k\in Z})=2k$$

یعنی $x+y$ زوج است.

ب : برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

حل: طبق مثال نقض زیر، این گزاره نادرست است. اگر قرار دهیم، $y=16$ و $x=9$ در این صورت:

$$\sqrt{x+y}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$$

و این یعنی $\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$

پ : برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ ، عدد 2^n-1 اوّل است.

حل : اگر $n=4$ آنگاه $2^4-1=16-1=15$ که عدد اوّل نیست. بنابراین، این گزاره نادرست است.

ت : مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.

حل : این گزاره درست است. برای اثبات آن فرض می کنیم که d و c و b و a اعداد صحیح بوده و d و b غیر صفر باشند. بنابراین : $x=\frac{a}{b}$ و $y=\frac{c}{d}$ عدد گویا می باشند. پس :

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

حال چون $ad+bc$ عددی صحیح و bd غیر صفر است، پس $x+y$ عددی گویا است.

ث : اگر برای هر سه مجموعه‌ی A و B و C داشته باشیم، $A\bigcup B=A\bigcup C$ آنگاه $B=C$

حل : این گزاره نادرست است. زیرا اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۴\}$ و $C=\{۴\}$،

آنگاه $A\bigcup B=A\bigcup C=\{۱,۲,۳,۴\}$ ولی $B\neq C$

ج : اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

حل : این گزاره صحیح است. برای اثبات آن کافی است $k=n(n+۱)$ (که در آن $n\in N$) در نظر گرفته شود. بنابراین:

$$۴k+۱=۴n(n+۱)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲ \quad \text{مربع کامل}$$

چ : اگر b و a دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ زوج است.

حل : این گزاره درست است. برای اثبات درستی آن بدین شکل استدلال می کنیم.

چون ab فرد است، پس b و a هر دو باید فرد باشند.(اگر چنین نباشد، حاصل ضرب زوج می شود.) بنابر این اگر m و n دو عدد صحیح باشند. می توان نوشت :

$$a=۲n-۱ \quad \text{و} \quad b=۲m-۱$$

اکنون داریم:

$$a^۲+b^۲=(۲n-۱)^۲+(۲m-۱)^۲=۴n^۲-۴n+۱+۴m^۲-۴m+۱$$

$$=۲(۲n^۲-۲n+۲m^۲-۲m+۱)=۲k \quad \text{عددی زوج}$$

***

آشنایی با چند روش مهم اثبات

در مطلب قبل دو طریق اصلی اثبات گزاره های درست را بیان کردیم و آنها را به دو دسته‌ی کلی مستقیم و غیر مستقیم دسته بندی کردیم. در ادامه چند روش مهم از این دو طریق را اشاره می کنیم.

الف : روش اشباع (بررسی تمام حالت ها)

گاهی برای اثبات درستی یک گزاره، لازم است، همه‌ی موارد ممکن در مورد آن را در نظر بگیریم و نشان دهیم که حکم در همه‌ی حالات ممکن برقرار است.

مثال : ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی بخش پذیر بر ۲ است.

حل : اگر x و y دو عدد صحیح متوالی باشند. در این صورت دو حالت زیر وجود دارد.

حالت اوّل : اگر x زوج باشد. لذا xy زوج خواهد شد و لذا حکم درست است.

حالت دوّم : اگر x فرد باشد. پس عدد بعد از آن یعنی y زوج می شود. لذا xy زوج خواهد شد و لذا در این حالت نیز حکم درست است.

مثال : ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، حاصل عبارت $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

اثبات : بنابر اینکه n عددی طبیعی است، لذا می تواند فرد و می تواند زوج باشد. نشان می دهیم که حکم، در این دو حالت برقرار است.

حالت اوّل : اگر n فرد باشد، در این صورت وجود دارد عدد طبیعی k طوری که $n = ۲k - ۱$ پس :

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k - ۱)^۲ - ۵(۲k - ۱) + ۷ = ۴k^۲ - ۴k + ۱ - ۱۰k + ۵ + ۷$$

$$= ۴k^۲ - ۱۴k + ۱۳ = ۴k^۲ - ۱۴k + ۱۲ + ۱ = ۲(۲k^۲ - ۷k + ۶) + ۱ = ۲k' + ۱$$

یعنی حاصل عددی فرد است.

حالت دوّم : اگر n زوج باشد، در این صورت وجود دارد عدد طبیعی k طوری که $n = ۲k$ پس :

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k)^۲ - ۵(۲k) + ۷ = ۴k^۲ - ۱۰k + ۷$$

$$= ۴k^۲ - ۱۰k + ۶ + ۱ = ۲(۲k^۲ - ۵k + ۳) + ۱ = ۲k'' + ۱$$

یعنی حاصل عددی فرد است.

مثال : ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

اثبات : اگر n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت $n+۲$ و $n+۱$ و n متوالی هستند. در اینجا کافی است، نشان دهیم که حاصل ضرب این سه عدد ، هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش پذیر است. اکنون حالت های مختلف را بررسی می کنیم.

حالت اوّل : اگر n زوج باشد، لذا $n(n+۱)(n+۲)$ زوج بوده و پس بر ۲ بخش پذیر است.

حالت دوّم : اگر n فرد باشد، واضح است که در این صورت $n+۱$ زوج است و لذا $n(n+۱)(n+۲)$ زوج بوده و پس بر ۲ بخش پذیر است.

از این دو حالت می توان نتیجه گرفت که در هر حالت $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۲ بخش پذیر است.

حالت اوّل : اگر n بر۳ بخش پذیر باشد، لذا $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۳ بخش پذیر است.

حالت دوّم : اگر n بر۳ بخش پذیر نباشد، واضح است که در این صورت $n+۲$ یا $n+۱$ بر ۳ بخش پذیر خواهند بود. لذا $n(n+۱)(n+۲)$ نیز بر۳ بخش پذیر است.

از این دو حالت نیز می توان نتیجه گرفت که در هر حالت $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۳ بخش پذیر است.

مثال : ثابت کنید که اگر b و a دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$ آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$

اثبات : در این مسئله کافی است نشان دهیم که حداقل یکی از دو عامل b یا a صفر می باشند. بنابر این این دو حالت زیر را می توان در نظر گرفت:

حالت اوّل : اگر a صفر باشد. بنابر ترکیب فصلی دو گزاره، حکم برقرار است. (حتی اگر b صفر نباشد.)

حالت دوّم : اگر a صفر نباشد. نشان می دهیم در این حالت b باید صفر باشد. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

اگر a صفر نباشد، پس معکوس پذیر است و معکوس آن یعنی $\frac{۱}{a}$ نیز غیر صفر است. اکنون دو طرف تساوی $ab=۰$ را در $\frac{۱}{a}$ ضرب می کنیم.

$$\frac{۱}{a}\times(ab)=\frac{۱}{a}\times(۰)\rightarrow(\frac{۱}{a}\times a)b=۰\rightarrow b=۰$$

در این حالت نیز حکم برقرار است.

مثال : نشان دهید که حاصل عبارت زیر فقط به ازای $n=۳$ و $n=۴$ از مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ زوج می شود.

$$P=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}$$

حل : کافی است به ازای تمام اعضای مجموعه‌ی S حاصل عبارت فوق را به دست آوریم. (بررسی تمام حالتها)

$$n=۱\rightarrow P=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}=\frac{(۱)^{۲}(۱+۱)^{۲}}{۴}=\frac{۱\times ۴}{۴}=۱$$ عدد فرد

$$n=۲\rightarrow P=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}=\frac{(۲)^{۲}(۲+۱)^{۲}}{۴}=\frac{۴\times ۹}{۴}=۹$$ عدد فرد

$$n=۳\rightarrow P=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}=\frac{(۳)^{۲}(۳+۱)^{۲}}{۴}=\frac{۹\times ۱۶}{۴}=۳۶$$ عدد زوج

$$n=۴\rightarrow P=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}=\frac{(۴)^{۲}(۴+۱)^{۲}}{۴}=\frac{۱۶\times ۲۵}{۴}=۱۰۰$$ عدد زوج

$$n=۵\rightarrow P=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}=\frac{(۵)^{۲}(۵+۱)^{۲}}{۴}=\frac{۲۵\times ۳۶}{۴}=۲۲۵$$ عدد فرد

$$n=۶\rightarrow P=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}=\frac{(۶)^{۲}(۶+۱)^{۲}}{۴}=\frac{۳۶\times ۴۹}{۴}=۴۴۱$$ عدد فرد

لذا عبارت داده شده فقط به ازای $n=۳$ و $n=۴$ زوج می شود.

ب : برهان خلف

در روش برهان خلف، فرض می کنیم که حکم نادرست باشد و لذا خلاف آن را تحت عنوان فرض خلف می پذیریم. سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره ها و دنباله ای از استدلالهای درست و مبتنی بر این فرض به یک نتیجه‌ی غیر ممکن یا نتیجه‌ی متضاد با فرض می رسیم و از آنجا معلوم می شود که فرض نادرست بودن حکم (فرض خلف) باطل است و درستی حکم ثابت می گردد.[2]

[2] . در اینجا تفاوت های ، اثبات های برهان خلف و عکس نقیض را مورد توجه قرار نمی دهیم.

مثال : اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

اثبات : گیریم که $\frac{۱}{x}$ عددی گویا باشد. چون می دانیم وارون هر عدد گویای ناصفر، عددی گویا است، پس وارون $\frac{۱}{x}$ یعنی x نیز گویا است که با فرض سؤال تناقض دارد، پس $\frac{۱}{x}$ عددی گنگ است.

مثال : اگر f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات : گیریم $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد.از طرفی می دانیم که تفریق دو تابع پیوسته، پیوسته است، حال چون $f+g$ و f پیوسته اند، پس $(f+g)-f=g$ در $x=a$ پیوسته است که با فرض مسئله تناقض دارد، پس $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

مثال : اگر $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ سه عدد صحیح باشند و $b_۱$ و $b_۲$ و $b_۳$ همان اعداد ولی به ترتیب دیگری باشند. ثابت کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است.

اثبات : فرض کنیم که $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ زوج نباشد. پس عددی فرد است. لذا هر سه عامل آن یعنی $a_۱-b_۱$ و $a_۲-b_۲$ و $a_۳-b_۳$ هم باید فرد باشند (چرا؟[3]) و در نتیجه مجموع آنها باید عددی فرد باشد. یعنی $(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳)$ باید عددی فرد باشد. امّا مجموع این سه عدد صفر است و تناقض می باشد. پس فرض خلف باطل است و حکم درست است.

مثال : ثابت کنید که حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

اثبات : فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است. اگر $r+x$ گنگ نباشد. بنابراین عددی گویا است. از طرفی می دانیم که تفاضل دو عدد گویا ، عددی گویا است. پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد، یعنی $(r+x)-r\in Q$ و از آنجا $x\in Q$ که با فرض مسئله تناقض دارد. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

[3] . زیرا حاصل ضرب سه عددی وقتی زوج است که حداقل یکی از آنها زوج باشد. در اینجا چون حاصل ضرب سه عدد فرد شده است، پس باید هر سه فرد باشند.

مثال : ثابت کنید که حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

اثبات : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می دانیم که حاصل ضرب هر دو گویا، عددی گویا است. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر عددی گویاست. بنابراین $Q \ni (rx)(\frac{1}{r})$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

د : گزاره های هم ارز

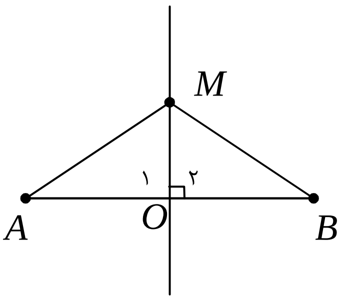
می دانیم که اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آنها را گزاره های هم ارز (هم ارزش) می نامند. حال اگر دو گزاره‌ی P و Q هم ارز (هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه گزاره‌ی $P \Leftrightarrow Q$ درست می باشد. برعکس اگر گزاره‌ی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، نتیجه می شود که دو گزاره‌ی P و Q هم ارز هستند. حال با فرض درست بودن $P \Leftrightarrow Q$ اگر ارزش یکی از این دو گزاره را بدانیم،ارزش گزاره‌ی دیگر نیز معلوم می شود.

نتیجه : دو گزاره‌ی P و Q را هم ارز گویند، هرگاه از P می توان Q و از Q می توان P را نتیجه گرفت.

مثال : نشان دهید که دو گزاره‌ی زیر هم ارز هستند.

۱) نقطه‌ی M روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

۲) فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو سر پاره خط AB یکسان است.



اثبات :

حالت اوّل: گزاره‌ی (الف) گزاره‌ی (ب) را نتیجه می دهد.

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ \angle O_1 = \angle O_2 = 90 \\ AO = BO \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta(AOM) \cong \Delta(BOM) \rightarrow AM = BM$$

حالت دوّم : گزاره‌ی (ب) گزاره‌ی (الف) را نتیجه می دهد.

از نقطه‌ی M خطی رسم می کنیم که از وسط پاره خط AB بگذرد. در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ AO = BO \\ AM = BM \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \Delta(AOM) \cong \Delta(BOM) \rightarrow \angle O_1 = \angle O_2$$

و چون $\angle O_1 + \angle O_2 = 180^\circ$ پس $\angle O_1 = \angle O_2 = 90^\circ$ لذا خط MO هم بر AB عمود است و هم از وسط آن می گذرد، پس عمود منصف AB است.

مثال : اگر n یک عدد طبیعی باشد، نشان دهید که زوج بودن n و زوج بودن $n^۲$ هم ارز هستند.

اثبات : گیریم که n زوج باشد، نشان می دهیم که $n^۲$ زوج است. چون n زوج است. پس وجود دارد عدد طبیعی k طوری که $n=۲k$

$$n=۲k \to n^۲=(۲k)^۲ \to n^۲=۴k^۲ \to n^۲=۲(۲k^۲)=۲k'$$

اکنون فرض می کنیم که $n^۲$ زوج است و نشان می دهیم n نیز زوج است. در اینجا از برهان خلف کمک می گیریم.

گیریم که n زوج نباشد، پس n عددی فرد خواهد بود. یعنی وجود دارد عدد طبیعی k طوری که $n=۲k-۱$. لذا :

$$n=۲k-۱ \to n^۲=(۲k-۱)^۲ \to n^۲=۴k^۲-۴k+۱ \to n^۲=۲(۲k^۲-۲k)+۱$$

$$\to n^۲=۲k'+۱$$

یعنی $n^۲$ فرد است و این با زوج بودن $n^۲$ تناقض دارد. پس باید n زوج باشد.

مثال : چون از تساوی $a=b$ می توان نتیجه گرفت که $a^۳=b^۳$ ، همچنین از تساوی $a^۳=b^۳$ می توان نتیجه گرفت $a=b$. لذا دو گزاره‌ی $a=b$ و $a^۳=b^۳$ هم ارز هستند و گزاره‌ی مرکب زیر درست است.

$$a=b \Leftrightarrow a^۳=b^۳$$

مثال : چون از تساوی $a=b$ می توان نتیجه گرفت که $a^۲=b^۲$ ، ولی از تساوی $a^۲=b^۲$ نمی توان نتیجه گرفت $a=b$. پس دو گزاره‌ی $a=b$ و $a^۲=b^۲$ هم ارز نیستند.

مثال : کدام یک از ترکیب های دوشرطی زیر درست است؟

الف) $a<b \Leftrightarrow a^۲<b^۲$ ب) $a<b \Leftrightarrow a^۳<b^۳$

حل :

الف : گزاره نادرست است. زیرا از $-۳<۲$ نتیجه می شود که $۹<۴$ و این نامساوی نادرست است.

ب : گزاره درست است. زیر هر یک از نامساوی ها را می توان از دیگری نتیجه گرفت.

ج : روش بازگشتی

گاهی برای اثبات درستی گزاره ها بهتر است که حکم را به کمک عملیات درست تغییر داده تا به یک رابطه‌ی بدیهی (همیشه درست) برسیم. سپس برای تکمیل اثبات باید نشان داد که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند،در غیر این صورت درستی اثبات تأیید نمی شود. در واقع اثبات بازگشتی زمانی معتبر است که کلیه‌ی مراحل برای رسیدن از حکم به یک نتیجه‌ی درست از لحاظ منطقی، برگشت پذیر باشند.

در واقع در این روش اثبات که به اثبات بازگشتی موسوم است، نشان می دهیم که ترکیب دو شرطی درست تشکیل می شود و چون یک گزاره ی این ترکیب درست (بدیهی) است. پس دیگری نیز درست است.

مثال : ثابت کنید که میانگین حسابی دو عدد حقیقی و مثبت بیشتر یا مساوی میانگین هندسی آنها است.

یعنی اگر y و x دو عدد حقیقی و مثبت باشند، آنگاه $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$

اثبات : به روش بازگشتی

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy} \leftrightarrow x+y \geq ۲\sqrt{xy}$$
$$\longleftrightarrow (x+y)^۲ \geq (۲\sqrt{xy})^۲ \leftrightarrow x^۲+۲xy+y^۲ \geq ۴xy$$
$$\leftrightarrow x^۲+۲xy+y^۲-۴xy \geq ۰ \leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲ \geq ۰$$

$\leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰$ بدیهی است .

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال : اگر $a > ۰$ ثابت کنید که $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$

اثبات : روش بازگشتی

$a+\frac{۱}{a} \geq ۲ \xleftrightarrow{\times a} a^۲+۱ \geq ۲a \leftrightarrow a^۲-۲a+۱ \geq ۰ \leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$ بدیهی است

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی(همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال : اگر b و a دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^۲+ab+b^۲\geq ۰$$

اثبات : روش بازگشتی

$$a^۲+ab+b^۲\geq ۰\xleftrightarrow{\times ۲}۲a^۲+۲ab+۲b^۲\geq ۰\leftrightarrow a^۲+۲ab+b^۲+a^۲+b^۲\geq ۰$$

$\leftrightarrow (a+b)^۲+a^۲+b^۲\geq ۰$ بدیهی است.

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال : برای هر دو عدد حقیقی y و x، ثابت کنید:

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$$

اثبات : به روش بازگشتی

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y\xleftrightarrow{\times ۲}۲x^۲+۲y^۲+۲\geq ۲xy+۲x+۲y$$

$$\leftrightarrow (x^۲-۲xy+y^۲)+(x^۲-۲x+۱)+(y^۲-۲y+۱)\geq ۰$$

$\leftrightarrow (x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲\geq ۰$ بدیهی است.

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال : اگر z و y و x سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید. $\quad x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+xz$

اثبات : به روش بازگشتی

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+xz$$
$$\xleftrightarrow{\times ۲}۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲xz$$
$$\leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲+x^۲-۲xz+z^۲+y^۲-۲yz+z^۲\geq ۰$$
$$\leftrightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$$

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی(همواره درست) است . چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

مثال : اگر b و a دو عدد حقیقی باشند و $a+b>0$، ثابت کنید. $\frac{a^3+b^3}{a+b}\geq ab$

اثبات: به روش بازگشتی

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}\geq ab \leftrightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)$$
$$\leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\geq ab(a+b) \leftrightarrow a^2-ab+b^2\geq ab$$
$$\leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$$

رابطه‌ی به دست آمده بدیهی (همواره درست) است. چون تمام مراحل قابل بازگشت هستند، لذا حکم درست است.

***

تمرین برای حل :

۲ : گزاره های زیر را اثبات یا با یک مثال نقض رد کنید.

الف : مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

ب : حاصل عبارت $p=x^2+x+41$ به ازاء اعداد طبیعی همواره یک عدد اوّل است.

پ : میانگین، پنج عدد طبیعی متوالی ، برابر عدد وسطی است.

ت : اگر m و n دو عدد صحیح فرد باشند، آنگاه m^2-n^2 بر ۸ بخش پذیر است.

ث : اگر α یک عدد گنگ باشد، آنگاه $\alpha^2+\alpha$ نیز گنگ است.

۳ : با بررسی حالت های مختلف نشان دهید که اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی، نصف کمان روبروی آن است.

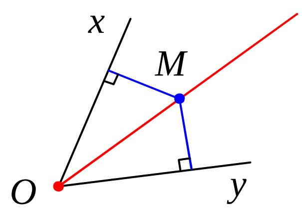
۴ : عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3<x^2$

۵ : آیا اعدادی صحیح مانند y و x وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$ ؟ اگر وجود دارد، یـک نمونـه ذکر کنید.

۶ : ثابت کنید که دو گزاره‌ی زیر هم ارز هستند.

الف : نقطه‌ی M روی نیمساز زاویه‌ی xOy قرار دارد.

ب : نقطه‌ی M از دو ضلع زاویه‌ی xOy به یک فاصله است.



۷ : آیا مقادیر حقیقی و ناصفر b و a وجود دارند که

$$\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b} \qquad (a+b\neq ۰)$$

۸ : ثابت کنید که مجموع هر عدد گویای مثبت و معکوس آن حداقل برابر ۲ است.

یعنی اگر $a,b>۰$ آنگاه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$

۹ : اگر y و x دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید.

$$x^{۲}+y^{۲}\geq ۲(x+y-۱)$$

۱۰ : اگر y و x دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید.

$$y^{۲}+۱\geq ۲x(y-x+۱)$$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی:

@amerimath

سایت :

www.mathtower.ir

درس دوّم : بخش پذیری در اعداد صحیح

در این درس به بررسی مفهوم تقسیم پذیری در اعداد صحیح می پردازیم و به دنبال آن ویژگی های تقسیم پذیری و بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک را بررسی می کنیم. در نهایت نیز قضیه‌ی تقسیم و کاربرد آن و افراز مجموعه ی اعداد صحیح را بیان خواهیم کرد.

تقسیم پذیری

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq 0$ گوییم a بر b بخشپذیر است، هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد که $a = bq$ (یعنی باقی مانده‌ی تقسیم a بر b برابر صفر باشد.)

اگر a بر b بخشپذیر باشد، می نویسند $b \mid a$ و می خوانند b عدد a را عاد می کند[1].(عدد b را a می شمارد.)

همچنین اگر a بر b بخشپذیر نباشد، می نویسند $b \nmid a$

مثال :

۱: عدد صحیح ۲۴ بر ۶ بخش پذیر است، پس: $6 \mid 24$

۲: عدد صحیح ۵۰- بر ۵ بخش پذیر است، پس: $5 \mid -50$

۳: عدد صحیح ۱۲ بر ۳- بخش پذیر است، پس: $-3 \mid 12$

۴: عدد صحیح ۳۰- بر ۱۰- بخش پذیر است، پس: $-10 \mid -30$

۵: عدد صحیح ۲۵ بر ۶ بخش پذیر نیست، پس: $6 \nmid 25$

تمرین ۱ : با توجه به تعریف عادکردن، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$

ب) $91 = 7 \times \ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots \mid 91$

پ) $-6 \mid 54 \Leftrightarrow 54 = \ldots\ldots \times (-6)$

ت) $5 \mid -35 \Leftrightarrow -35 = 5 \times \ldots\ldots$

ج) $a \mid 1 \Leftrightarrow a = \ldots\ldots$ یا $a = \ldots\ldots$

ث) $0 = 18 \times \ldots\ldots \Leftrightarrow 18 \mid \ldots\ldots$

چ) $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid \ldots\ldots$ و $\ldots\ldots \mid 26$

---

[1] . اینکه صفر عدد صفر را می شمارد به عنوان قرار داد پذیرفته می شود.

تمرین ۲ : نشان دهید که $۶^{۵۰۲}$ بر ۹ بخش پذیر است.

حل:

$$۶^{۵۰۲}=۶\times۶\times۶^{۵۰۰}=۳\times۲\times۳\times۲\times۶^{۵۰۰}=(۳\times۳)\times(\underbrace{۲\times۲\times۶^{۵۰۰}}_{q})=۹q\to ۹|۶^{۵۰۲}$$

تمرین ۳ : اگر n و m دو عدد طبیعی دلخواه و $m\le n$ باشند. نشان دهید که $a^m\mid a^n$

حل : چون $m\le n$ پس واضح است که $a^n=a^m\times a^{n-m}$ و این یعنی وجود دارد عدد صحیح q که

$a^n=a^m\times q$. لذا $a^m\mid a^n$

مثال :

$$۳^۹=۳^۵\times۳^۴\to ۳^۹=۳^۵\times۳^۴\xrightarrow{۳^۴=q}۳^۹=۳^۵\times q\to ۳^۵\mid ۳^۹$$

تمرین ۴ : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید که $۳|۲^{۳n}-۵^n$

حل: برای هر عدد طبیعی n ، می دانیم که

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+...+ab^{n-۲}+b^{n-۱})$$

لذا :

$$۲^{۳n}-۵^n=۸^n-۵^n=(۸-۵)(۸^{n-۱}+۸^{n-۲}\times۵+...+۸\times۵^{n-۲}+۵^{n-۲})$$

پس :

$$۲^{۳n}-۵^n=(۸-۵)q\to ۲^{۳n}-۵^n=۳q\to ۳|۲^{۳n}-۵^n$$

تمرین ۵ : ثابت کنید که $۳^{۵۲}-۲^{۳۹}$ بر ۷۳ بخش پذیر است.

حل:

$$۳^{۵۲}-۲^{۳۹}=(۳^۴)^{۱۳}-(۲^۳)^{۱۳}=(۸۱)^{۱۳}-(۸)^{۱۳}=(۸۱-۸)q=۷۳q\to ۷۳\mid ۳^{۵۲}-۲^{۳۹}$$

نتیجه : طبق تعریف عاد کردن در اعداد صحیح، به ازاء هر عدد صحیح a همواره داریم:

الف) $a\mid a$ ب) $-a\mid a$ ج) $\pm۱\mid a$ د) $a\mid ۰$

***

ویژگی های رابطه‌ی عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر a عدد b را بشمارد،آنگاه هر مضرب صحیح b را نیز می شمارد. یعنی اگر $a|b$ آنگاه $a|mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

اثبات:

$$a|b \xrightarrow{\exists k\in Z} b=ak \rightarrow mb=mak \rightarrow mb=a(mk)$$
$$\xrightarrow{mk=q} mb=aq \rightarrow a|mb$$

برای مثال، چون $3|6$ آنگاه $3|5\times 6$

نتیجه: اگر a عدد b را بشمارد، آنگاه ثابت می شود که

الف : عدد a عدد b^2 را می شمارد.

ب : در حالت کلی عدد a عدد b^n را نیز می شمارد. (n عدد طبیعی)

اثبات: چون $a|b$ طبق ویژگی فوق $a|mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

حال اگر قرار دهیم $m=b$ بدست می آید $a|b^2$

همچنین اگر قرار دهیم $m=b^{n-1}$ بدست می آید $a|b^n$

تمرین ۶ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$

اثبات :

$$a|b \rightarrow a|mb \xrightarrow{m=-1} a|-b$$

ویژگی ۲ : هرگاه یک عدد صحیح ، دو عدد صحیح دیگر را بشمارد، مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب آنها را می شمارد. به عبارت دیگر ، اگر $a|b$ و $a|c$ در این صورت ثابت کنید که:

الف: $a|b+c$ ب: $a|b-c$ ج: $a|bc$

اثبات: مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبت به اعمال جمع، تفریق و ضرب بسته است. یعنی مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب هر دو عدد صحیح ، عددی صحیح می باشد. پس می توان نوشت:

الف :

$$\begin{cases} a\,|\,b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ a\,|\,c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = aq_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow b + c = aq_1 + aq_2 \rightarrow b + c = a(q_1 + q_2) \xrightarrow{q = q_1 + q_2} b + c = aq \rightarrow a\,|\,b + c$$

ب:

$$\begin{cases} a\,|\,b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ a\,|\,c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = aq_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow b - c = aq_1 - aq_2 \rightarrow b - c = a(q_1 - q_2) \xrightarrow{q = q_1 - q_2} b - c = aq \rightarrow a\,|\,b - c$$

ج:

$$\begin{cases} a\,|\,b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ a\,|\,c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = aq_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow bc = (aq_1)(aq_2) \rightarrow bc = a(aq_1q_2) \xrightarrow{q = aq_1q_2} bc = aq \rightarrow a\,|\,bc$$

توجه کنید که :

الف : اگر $a\,|\,b + c$ نمی توان نتیجه گرفت که $a\,|\,c$ یا $a\,|\,b$

برای مثال $۲\,|\,۵ + ۳$ ولی $۲ \nmid ۳$ و $۲ \nmid ۵$

ب : اگر $a\,|\,bc$ نمی توان نتیجه گرفت که $a\,|\,c$ یا $a\,|\,b$

برای مثال $۶\,|\,۳ \times ۴$ ولی $۶ \nmid ۳$ و $۶ \nmid ۴$

تمرین۷ : ثابت کنید که اگر $a\,|\,b$ و k یک عدد صحیح غیر صفر باشد، آنگاه $ka\,|\,kb$ و برعکس

اثبات :

حالت اوّل

$$a\,|\,b \xrightarrow{k \in Z\ ,\ k \neq ۰} ka\,|\,kb \quad ?$$

$$a\,|\,b \xrightarrow{q \in Z} b = aq \xrightarrow{\times k} kb = kaq \rightarrow ka\,|\,kb$$

حالت دوّم

$$ka|kb \xrightarrow{k\in Z\ ,\ k\neq ۰} a|b \quad ?$$

$$ka|kb \xrightarrow{\exists q\in Z} kb=kaq \rightarrow k(b-aq)=۰$$

$$\xrightarrow{k\neq ۰} b-aq=۰ \rightarrow b=aq \rightarrow a|b$$

تمرین۸ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $-a|-b$

اثبات :

$$a|b \xrightarrow{\exists k\in Z} ka|kb \xrightarrow{k=-۱} -a|-b$$

تمرین۹ : اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb+nc$ که در آن n و m عدد صحیح می باشند.

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \rightarrow a|mb \\ a|c \rightarrow a|nc \end{cases} \rightarrow a|mb+nc$$

توجه کنید که

الف : این خاصیت برای تفریق نیز برقرار است. یعنی اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb-nc$

ب : این خاصیت را می توان به شکل زیر تعمیم داد.

$$\begin{cases} a|b_۱ \rightarrow a|m_۱b_۱ \\ a|b_۲ \rightarrow a|m_۲b_۲ \\ a|b_۳ \rightarrow a|m_۳b_۳ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a|b_n \rightarrow a|m_nb_n \end{cases} \rightarrow a|m_۱b_۱+m_۲b_۲+m_۳b_۳+\ldots+m_nb_n$$

ویژگی۳ : اگر a عدد b را بشمارد و b عدد c را بشمارد، آنگاه a عدد c را می شمارد. یعنی اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$ (خاصیت تعدی عادکردن)

حل:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ b|c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = bq_2 \end{cases}$$

$$\to c = (aq_1)q_2 \to c = a(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} c = aq \to a|c$$

تمرین ۱۰ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $-a|b$

اثبات :

$$\left.\begin{matrix} -a|a \\ a|b \end{matrix}\right\} \to -a|b$$

تمرین ۱۱ : اگر a عدد b را بشمارد، با استفاده از خاصیت تعدی عاد کردن، ثابت کنید که a عدد b^n را نیز می شمارد. (n عدد طبیعی)

اثبات : چون $a|b$ **و** $b|b^n$ **پس** $a|b^n$

توجه : اگر $a|b^n$ ($n\in N$) آنگاه نمی توان نتیجه گرفت که $a|b$

برای مثال واضح است که ۱۰۰|۴ یعنی $۴|۱۰^۲$ ولی $۴\nmid ۱۰$

ویژگی۴ : اگر a عدد b را بشمارد و c عدد d را نیز بشمارد. آنگاه اگر ac نیز عدد bd را نیز می شمارد.

یعنی اگر $a|b$ و $c|d$ در این صورت ثابت کنید که: $ac|bd$

اثبات :

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ c|d \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} d = cq_2 \end{cases}$$

$$\to bd = (aq_1)(cq_2) \to bd = ac(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} bd = acq \to ac|bd$$

تمرین ۱۲ : برای دو عدد صحیح b و a و عدد طبیعی n ، ثابت کنید که اگر $a|b$ آنگاه $a^n|b^n$

اثبات :

$$a|b \xrightarrow{\exists k \in Z} b = ak \to (b)^n = (ak)^n \to b^n = a^n k^n$$

$$\xrightarrow{k^n = q \in Z} b^n = a^n q \to a^n | b^n$$

توجه : عکس تمرین فوق نیز برقرار است، یعنی اگر b و a دو عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد، از اینکه $a^n | b^n$ نتیجه می شود که $a | b$

اثبات این موضوع خارج از اهداف کتاب است.

تمرین۱۳ : اگر برای عدد صحیح k داشته باشیم $۵ | ۴k+۱$. ثابت کنید $۲۵ | ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$

حل :

$$۵ | ۴k+۱ \to (۵)^۲ | (۴k+۱)^۲ \to ۲۵ | ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \qquad (۱)$$
$$۵ | ۴k+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵ | ۲۰k + ۵ \qquad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۲۵ | (۱۶k^۲ + ۸k + ۱) + (۲۰k + ۵) \to ۲۵ | ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$$

تمرین۱۴ : آیا از اینکه $a | b$ و $c | d$ می توان نتیجه گرفت که $a + c | b + d$

حل : خیر نمی توان نتیجه گرفت. برای مثال $۳ | ۳$ و $۲ | ۴$ ولی $۲+۳ \nmid ۴+۳$

تمرین۱۵: فرض کنید n و m دو عدد طبیعی و $m \le n$ و $a,b \in Z$ ثابت کنید که اگر $a | b$ آنگاه $a^m | b^n$

$$a | b \to a^m | b^m \to a^m | b^{n-m} \times b^m \to a^m | b^n$$

ویژگی ۵ : اگر $a | b$ و $b \neq ۰$، آنگاه $|a| \le |b|$

اثبات : چون $a | b$ پس $b = aq$ ولی چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ لذا باید $|q| \ge ۱$

اکنون دو طرف این نامساوی را در $|a|$ ضرب می کنیم. در این صورت خواهیم داشت.

$$۱ \le |q| \to |a| \le |a| \times |q| \to |a| \le |aq| \to |a| \le |b|$$

نتیجه : اگر $a | b$ و $b | a$ آنگاه $|a| = |b|$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a | b \to |a| \le |b| \\ b | a \to |b| \le |a| \end{array}\right\} \to |a| = |b|$$

تمرین۱۶ : اگر $a | ۱$ ، آنگاه $a = \pm ۱$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} ۱ | a \\ a | ۱ \end{array}\right\} \to |a| = ۱ \to a = \pm ۱$$

تمرین۱۷ : اگر $a \neq ۰$ عدد صحیح و دو عدد $۷m+۶$ و $۶m+۵$ بر a بخش پذیر باشند. ثابت کنید:

$a = \pm ۱$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid ۷m+۶ \xrightarrow{\times ۶} a \mid ۴۲m+۳۶ \\ a \mid ۶m+۵ \xrightarrow{\times ۷} a \mid ۴۲m+۳۵ \end{array}\right\} \to a \mid (۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$

$$\to a \mid ۱ \to a = \pm ۱$$

توجه : در چنین مواردی درست آن است که طرف راست را بطه‌ی عاد کردن را در اعدادی ضرب کنیم که کوچکترین مضرب مشترک ۷ و۶ بدست آید.

تمرین۱۸: اگر $a|۳n-۲$ و $a|-۴n+۳$ نشان دهید که $a = \pm ۱$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۳n-۲ \xrightarrow{\times ۴} a|۴(۳n-۲) \\ a|-۴n+۳ \xrightarrow{\times ۳} a|۳(-۴n+۳) \end{array}\right\}$$

$$\to a \mid ۴(۳n-۲)+۳(-۴n+۳) \to a \mid ۱۲n-۸-۱۲n+۹ \to a \mid ۱ \to a = \pm ۱$$

تمرین۱۹ : اگر $a > ۱$ و $a \mid ۹k+۴$ و $a \mid ۵k+۳$ ، ثابت کنید که a عددی اوّل است.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid ۹k+۴ \xrightarrow{\times ۵} a \mid ۴۵k+۲۰ \\ a \mid ۵k+۳ \xrightarrow{\times ۹} a \mid ۴۵k+۲۷ \end{array}\right\} \to a \mid (۴۵k+۲۷)-(۴۵k+۲۰) \to a \mid ۷$$

و چون $a > ۱$ پس a برابر ۷ (عددی اوّل) است.

توجه : اگر p یک عدد اوّل[2] باشد و a عددی طبیعی و $a \mid p$ در این صورت $a = ۱$ یا $a = p$

تمرین۲۰ : اگر عدد طبیعی a دو عدد $۹k+۷$ و $۷k+۶$ را عاد کند. ثابت کنید $a = ۱$ یا $a = ۵$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a \mid ۷k+۶ \xrightarrow{\times ۹} a \mid ۶۳k+۵۴ \\ a \mid ۹k+۷ \xrightarrow{\times ۷} a \mid ۶۳k+۴۹ \end{array}\right\} \to a \mid (۶۳k+۵۴)-(۶۳k+۴۹)$$

$$\to a \mid ۵ \to a = ۵ \text{ یا } a = ۱$$

❋❋❋

[2] . هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را اوّل گویند، هرگاه فقط بر یک و خودش بخش پذیر باشد. مانند: .... و ۱۱ و ۷ و ۵ و۳ و۲

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب. م. م)

عدد صحیح c را مقسوم علیه (شمارنده‌ی) مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند. یعنی $c|b$ و $c|a$

مثلاً عدد ۴ مقسوم علیه مشترک ۱۶ و ۱۲ است، زیرا ۴|۱۶ و ۴|۱۲

تعریف : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است، گوییم، هرگاه:

الف: d یک مقسوم علیه مشترک a و b باشد.

ب: هر مقسوم علیه مشترک دیگر a و b از d کوچکتر باشد.

به عبارت دیگر ب.م.م دو عدد a و b ، بزرگترین عدد طبیعی است که هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b را به صورت (a,b) یا d یا $a\prod b$ نمایش می دهند.

تمرین ۲۱ : مجموعه‌ی مقسوم علیه های دو عدد ۱۸و۱۲را نوشته و سپس (ب.م.م) این دو عدد را مشخص کنید.

حل:

مجموعه‌ی مقسوم علیه های ۱۸ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶,\pm ۹,\pm ۱۸\}$

مجموعه‌ی مقسوم علیه های ۱۲ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۴,\pm ۶,\pm ۱۲\}$

مجموعه‌ی مقسوم علیه های مشترک $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶\}$

ب.م.م $d=(۱۲,۱۸)=۶$

نتیجه : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b گویند، اگر وتنها اگر

۱: $d|a$ و $d|b$

۲: هرگاه $c|a$ و $c|b$ آنگاه $c\leq d$

برای مثال بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۱۲ و ۱۸ عدد ۶ است و ۳ مقسوم علیه مشترک این دو عدد نیز هست. واضح است که ۳|۶ و ۳ ≤ ۶

تعریف : دو عدد صحیح b و a را نسبت به هم اوّل (متباین) گویند، هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها یک باشد.

$$d=(a,b)=۱$$

برای مثال دو عدد ۷ و ۱۲ نسبت به هم اوّلند.

تمرین۲۲ : ثابت کنید که هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اوّلند.

حل : کافی است که ثابت کنیم، (ب م م) هر دو عدد صحیح متوالی برابر ۱ است. فرض کنیم که m یک عدد صحیح و $(m,m+۱)=d$ لذا

$$\left.\begin{matrix} d\,|\,m \\ d\,|\,m+۱ \end{matrix}\right\} \to d\,|\,m+۱-m \to d\,|\,۱$$

و چون d عددی مثبت است لذا $d=۱$

تمرین۲۳ : ثابت کنید که هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اوّلند.

حل : کافی است که ثابت کنیم (ب م م) هر دو عدد صحیح متوالی برابر ۱ است. فرض کنیم که k یک عدد صحیح و $(۲k+۱,۲k+۳)=d$ لذا

$$\left.\begin{matrix} d\,|\,۲k+۱ \\ d\,|\,۲k+۳ \end{matrix}\right\} \to d\,|\,(۲k+۳)-(۲k+۱) \to d\,|\,۲$$

و چون d عددی مثبت و زوج نیست[۳] لذا $d=۱$

تمرین۲۴: اگر p و q دو عدد اوّل و $p\neq q$ باشد. ثابت کنید $(p,q)=۱$

اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $(p,q)=d$ و $d\neq ۱$ باشد. بنابراین :

$$\left.\begin{matrix} d\,|\,p \\ d\,|\,q \end{matrix}\right\} \xrightarrow{d\neq ۱} d=p\ ,\ d=q \to p=q$$

و با فرض مسئله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و $d=۱$

***

[3] . ب م م اعداد فرد نمی تواند زوج باشد.

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک. م. م)

عدد صحیح c را مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم بر a و هم بر b بخش پذیر باشند. یعنی $a|c$ و $b|c$

مثلاً عدد ۱۸ مضرب مشترک دو ۲ و ۳ است، زیرا ۲|۱۸ و ۳|۱۸

عدد طبیعی c را کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد صحیح غیرصفر a و b می نامیم ، هرگاه

۱: c مضرب مشترک a و b باشد. یعنی $a|c$ و $b|c$

۲: اگر m یک مضرب طبیعی مشترک دیگر a و b باشد،آنگاه $c \le m$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b را با $[a,b]$ یا c یا $a \coprod b$ نشان می دهیم.

تذکر: ک.م.م دو عدد صحیح a و b کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که هم بر a و هم بر b بخشپذیر باشد.

تمرین۲۵ : کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۴ و۶ را بدست آورید.

حل:

$$\text{مضرب های ۴} = \{۰, \pm ۴, \pm ۸, \pm ۱۲, \pm ۱۶, \pm ۲۰, \pm ۲۴, \pm ۲۸, \pm ۳۲, \pm ۳۶, \pm ۴۰, ...\}$$

$$\text{مضربهای ۶} = \{۰, \pm ۶, \pm ۱۲, \pm ۱۸, \pm ۲۴, \pm ۳۰, \pm ۳۶, \pm ۴۲, ...\}$$

$$\text{مضربهای مشترک} = \{۰, \pm ۱۲, \pm ۲۴, \pm ۳۶, ...\}$$

$$\text{ک.م.م } c = [۶,۴] = ۱۲$$

تمرین۲۶ : اگر b و a دو عدد صحیح باشند. با توجه به تعریف (ب م م) و (ک م م) ثابت کنید.

الف: اگر $a|b$ آنگاه $(a,b) = |a|$ ب: اگر $a|b$ آنگاه $[a,b] = |b|$

اثبات : کافی است در هر مورد نشان دهیم که شرایط (ب م م) یا (ک م م) برقرار است.

الف) ابتدا نشان می دهیم که $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک b و a باشد.

$$|a| \,|\, a \xrightarrow{a|b} |a| \,|\, b$$

یعنی $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک b و a است.

اکنون نشان می دهیم که هر مقسوم علیه مشترک دیگر بین دو عدد b و a از $|a|$ کوچکتر است. گیریم که عد مثبت m یک مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a است. لذا

$$\left.\begin{matrix} m|a \\ m|b \end{matrix}\right\} \to |m| \le |a| \xrightarrow{m>0} m \le |a|$$

یعنی هر مقسوم علیه مشترک بین دیگر دو عدد b و a از $|a|$ کوچکتر است.

ب) ابتدا نشان می دهیم که $|b|$ یک مضرب مشترک b و a است.

$$b \,\big|\, |b| \xrightarrow{a|b} a \,\big|\, |b|$$

$|b|$ یک مضرب مشترک b و a است.

اکنون نشان می دهیم که هر مضرب مشترک دیگر بین دو عدد b و a از $|b|$ بزرگتر است. گیریم که عدد مثبت n یک مضرب مشترک دو عدد b و a است. لذا

$$\left.\begin{matrix} a|n \\ b|n \end{matrix}\right\} \to |b| \le |n| \xrightarrow{n>0} |b| \le n$$

یعنی هر مضرب مشترک بین دیگر دو عدد b و a از $|b|$ بزرگتر است.

مثال :

الف) $۶ | ۱۸ \to \begin{cases} (۶,۱۸) = ۶ \\ [۶,۱۸] = ۱۸ \end{cases}$

ب) $-۵ | ۲۰ \to \begin{cases} (-۵,۲۰) = ۵ \\ [-۵,۲۰] = ۲۰ \end{cases}$

ج) $-۳ | -۱۲ \to \begin{cases} (-۳,-۱۲) = ۳ \\ [-۳,-۱۲] = ۱۲ \end{cases}$

تمرین۲۷ : اگر p عددی اوّل باشد و $a \in Z$ و $p \nmid a$ ثابت کنید، $(p,a) = ۱$

اثبات : فرض کنیم که $(p,a) = d$ و $d \neq ۱$ (فرض خلف) . پس طبق تعریف (ب م م) $d | p$ و $d | a$.

اکنون با توجه به اوّل بودن عدد p و فرض $d \neq ۱$ از $d | p$ نتیجه می شود که $d = p$

از طرفی داریم $d | a$ پس $p | a$ که با فرض مسئله تناقض دارد. لذا باید $d = ۱$ باشد.

توجه : در تمرین فوق اگر p عدد اوّل نباشد. مسئله دیگر برقرار نیست. مثلاً: $۶ \nmid ۴$ ولی $(۴,۶) = ۲$ که برابر یک نیست.

***

قضیه‌ی تقسیم

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی و $b \neq ۰$ آنگاه اعداد صحیح و یکتای q و r وجود دارند، بطوری که:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cdots & \\ \hline r & \end{array} \qquad a = bq + r \qquad ۰ \leq r < b$$

عدد a را مقسوم و عدد b را مقسوم علیه، q خارج قسمت و r را باقی مانده (باقی مانده‌ی اصلی) گویند[4].

مثال : عدد ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنید و رابطه‌ی فوق را بررسی نمایید.

حل :

$$\begin{array}{r|l} ۲۵ & ۷ \\ \cline{2-2} & ۳ \\ \cdots & \\ \hline ۴ & \end{array} \qquad \begin{cases} ۲۵ = ۷(۳) + ۴ \\ ۰ \leq ۴ < ۷ \end{cases}$$

مثال : عدد ۲۵- را بر ۷ تقسیم کنید و رابطه‌ی فوق را بررسی نمایید.

حل :

$$\begin{array}{r|l} -۲۵ & ۷ \\ \cline{2-2} & -۴ \\ \cdots & \\ \hline ۳ & \end{array} \qquad \begin{cases} -۲۵ = ۷(-۴) + ۳ \\ ۰ \leq ۳ < ۷ \end{cases}$$

تمرین۲۸: باقی مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۷ برابر۶ است. باقی مانده‌ی تقسیم $۵a$ بر ۷ را بـه دسـت آورید.

حل :

$$a = ۷q + ۶ \xrightarrow{\times ۵} ۵a = ۷(۵q) + ۳۰ \rightarrow ۵a = ۷(۵q) + ۲۸ + ۲$$

$$\rightarrow ۵a = ۷(۵q + ۴) + ۲ \rightarrow ۵a = ۷k + ۲$$

$$\rightarrow r = ۲$$

تمرین۲۹ : اگر باقی مانده‌ی اعداد n و m بر ۱۷ به ترتیب ۳ و۵ باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۲m - ۵n$ بر ۱۷ را به دست آورید.

حل :

$$\begin{cases} m = ۱۷q_۱ + ۵ \\ n = ۱۷q_۲ + ۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲m = ۱۷(۲q_۱) + ۱۰ \\ -۵n = ۱۷(-۵q_۲) - ۱۵ \end{cases}$$

---

[4] . این قضیه را بدون اثبات می پذیریم.

$$\to ۲m-۵n=۱۷(۲q_۱-۵q_۲)-۵$$

$$\to ۲m-۵n=۱۷(۲q_۱-۵q_۲)-۱۷+۱۲$$

$$\to ۲m-۵n=۱۷(\underbrace{۲q_۱-۵q_۲-۱}_{q})+۱۲$$

$$\to ۲m-۵n=۱۷q+۱۲$$

$$\to r=۱۲$$

تمرین ۳۰ : اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و۷ باشد. باقی مانده تقسیم عدد a را بر۵۶ بیابید.

حل :

$$a=۷k_۱+۵ \xrightarrow{\times ۸} ۸a=۵۶k_۱+۴۰ \qquad (۱)$$

$$a=۸k_۲+۷ \xrightarrow{\times ۷} ۷a=۵۶k_۲+۴۹ \qquad (۲)$$

اکنون با تفاضل روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت.

$$a=۵۶k_۱-۵۶k_۲-۹ \to a=۵۶k_۱-۵۶k_۲-۵۶+۴۷$$

$$a=۵۶(\underbrace{k_۱-k_۲-۱}_{k})+۴۷=۵۶k+۴۷$$

یعنی باقی مانده‌ی تقسیم عدد a بر۵۶ برابر ۴۷ است.

تمرین ۳۱ : اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $a^۲+b^۲+۳$ بر ۸ را بیابید.

حل: چون a عددی صحیح و فرد است، لذا وجود دارد یک عدد صحیح مانند n که $a=۲n+۱$. از طرفی چون $b|a+۲$ پس $b|(۲n+۱)+۲$ یا $b|۲n+۳$. از اینجا معلوم می شود که b عددی فرد است. پس وجود دارد یک عدد صحیح مانند m که $b=۲m+۱$. در نهایت خواهیم داشت.

$$a^۲+b^۲+۳=(۲n+۱)^۲+(۲m+۱)^۲+۳=۴n^۲+۴n+۱+۴m^۲+۴m+۱+۳$$

$$=۴\underbrace{n(n+۱)}_{۲k_۱}+۴\underbrace{m(m+۱)}_{۲k_۲}+۵=۸k_۱+۸k_۲+۵=۸(k_۱+k_۲)+۵=۸k+۵$$

یعنی باقی مانده‌ی عدد $a^۲+b^۲+۳$ بر ۸ برابر ۵ است.

***

تمرین۳۲ : با فرض صحیح و غیر صفر بودن عدد m حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $[m^2, m]$

ب) (m^2, m^5)

پ) $([m^2, m], m^5)$

ت) $(2m, 6m^3)$

ث) $(3m+1, 3m+2)$

ج) $(m^7, (m^2, m^3))$

ح) $[m^3, m^2]$

خ) $(18m^4, 12m^3)$

حل :

الف)

$$m \mid m^2 \to [m^2, m] = m^2$$

ب)

$$m^2 \mid m^5 \to (m^2, m^5) = m^2$$

پ)

$$([m^2, m], m^5) = (m^2, m^5) = m^2$$

ت)

$$(2m, 6m^3) = 2|m|$$

ث)

$$(3m+1, 3m+2) = 1$$

دو عدد $3m+1$ و $3m+2$ دو عدد صحیح متوالی هستند.

ج)

$$(m^7, \underbrace{(m^2, m^3)}_{m^2}) = (m^7, m^2) = m^2$$

ح)

$$[m^3, m^2] = |m^3|$$

خ)

$$(18m^4, 12m^3) = 6|m^3|$$

پس برای محاسبه‌ی بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a کافی است، عدد بزرگتر را بر عدد کوچکتر تقسیم نموده و سپس بزرگترین مقسوم علیه مشترک عدد کوچکتر و باقی مانده را بدست آوریم. این عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا یکی از اعداد صفر شود. در این صورت عدد دیگر (ب . م .م) است.

مثال: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۷۲ و ۳۰ را بیابید.

حل: بطور خلاصه این روش را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{array}{r|l} ۷۲ & ۳۰ \\ \cline{2-2} ۶۰ & ۲ \\ \hline ۱۲ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۳۰ & ۱۲ \\ \cline{2-2} ۲۴ & ۲ \\ \hline ۶ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۱۲ & ۶ \\ \cline{2-2} ۱۲ & ۲ \\ \hline ۰ & \end{array} \longleftarrow \text{ب.م.م}$$

این روش را روش تقسیمات متوالی معروف است. تقسیمات را می توان توسط یک جدول بصورت نردبانی نشان داد.

خارج قسمت	----	۲	۲	۲
اعداد (اوّل عدد بزرگتر نوشته می شود.)	۷۲	۳۰	۱۲	۶
	۶۰	۲۴	۱۲	
باقی مانده	۱۲	۶	۰	

$$(۳۰,۷۲)=۶$$

ثابت می شود که خارج قسمت قدرمطلق حاصل ضرب دو عدد صحیح و ناصفر، بر (ب .م .م) آنها برابر (ک . م م) آن دو عدد است. اگر a و b دو عدد صحیح ناصفر باشند، در این صورت $[a,b]=\dfrac{|ab|}{(a,b)}$

نتیجه : اگر $(a,b)=۱$ آنگاه $[a,b]=|ab|$

تمرین ۳۳ : (ب م م) و (ک م م) دو عدد ۳۲ و ۴۸ را تعیین کنید.

تمرین ۳۴ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $[۱۲,۱۸]=$ ب) $[-۹,۱۷]=$ ج) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

تمرین ۳۵ : اگر m یک عدد صحیح غیر صفر باشد،تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $[(m^۲,m^۵),(m^۷,m^۳)]=$ ب) $[۵m^۸,(m^۳,۴m^۴)]=$ ج) $([-۲m,۸m^۳],۱۲m)=$

افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح به کمک قضیه‌ی تقسیم

می دانیم که در تقسیم هر عدد صحیح a بر عدد طبیعی b باقی مانده یک عدد حسابی کمتر از b می باشد. برای مثال در تقسیم هر عدد صحیح a بر ۵ باقی مانده یک عدد حسابی کمتر از ۵ می باشد. لذا یکی از حالت های زیر را خواهیم داشت :

اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر۵ برابر صفر است.(بخش پذیر بر ۵) **مثلاً:** ... و۱۰ و ۵ و ۰ و ۵− و ۱۰− و ...	$a=5k$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۱ است. **مثلاً:** ... و۱۱ و ۶ و ۱ و ۴− و ۹− و ...	$a=5k+1$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۲ است. **مثلاً:** ... و۱۲ و ۷ و ۲ و ۳− و ۸− و ...	$a=5k+2$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۳ است. **مثلاً:** ... و۱۳ و ۸ و ۳ و ۲− و ۷− و ...	$a=5k+3$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۴ است. **مثلاً:** ... و۱۴ و ۹ و ۴ و ۱− و ۶− و ...	$a=5k+4$

بر این اساس می توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی اعداد صحیح در تقسیم بر ۵ به پنج مجموعه افراز شده است. بطور مشابه این موضوع را برای هر عدد طبیعی می توان مطرح نمود و افراز لازم را تشکیل داد.

تمرین ۳۶ : نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $2q$ یا $2q+1$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a\in Z \rightarrow a=2q+r \qquad , \qquad 0\leq r<2$$

و چون $r\in Z$ پس یا $r=0$ یا $r=1$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=0 \\ a=2q+r \end{cases} \rightarrow a=2q \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} r=1 \\ a=2q+r \end{cases} \rightarrow a=2q+1$$

توجه : اگر $k\in Z$ در این صورت همه‌ی اعداد صحیح، به شکل $x=۲k$ را زوج و همه‌ی اعداد صحیح، به شکل $y=۲k+۱$ را فرد می نامند.

تمرین۳۷ : نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $۳q$ یا $۳q+۱$ یا $۳q+۲$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a\in Z \to a=۳q+r \quad , \quad ۰\le r<۳$$

و چون $r\in Z$ پس یا $r=۰$ یا $r=۱$ یا $r=۲$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=۰ \\ a=۳q+r \end{cases} \to a=۳q$$

$$\begin{cases} r=۱ \\ a=۳q+r \end{cases} \to a=۳q+۱$$

$$\begin{cases} r=۲ \\ a=۳q+r \end{cases} \to a=۳q+۲$$

تمرین۳۸ : ثابت کنید که اگر P عددی اوّل و $P>۳$ باشد،آنگاه به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $P=۶k+۵$ نوشته می شود.

حل : بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a\in Z \to a=۶k+r \quad , \quad ۰\le r<۶$$

پس عدد طبیعی p را می توان به یکی از صورت های زیر نوشت.

الف) $p=۶k$ ج) $p=۶k+۲$ هـ) $p=۶k+۴$

ب) $p=۶k+۱$ د) $p=۶k+۳$ و) $p=۶k+۵$

واضح است که در حالت های« الف» و « ج» و« د» و« هـ» عدد مورد نظر به دلیل بخش پذیری بر۲ یا ۳، اوّل نیست. پس تنها حالت های دیگر یعنی « ب» و« و» می مانند که مورد نظر هستند.

تمرین۳۹ : نشان دهید که هر عدد صحیح و فرد را می توان به شکل $۴q+۱$ یا $۴q+۳$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a\in Z \to a=۴q+r \quad , \quad ۰\le r<۴$$

و چون $r\in Z$ پس یا $r=۰$ یا $r=۱$ یا $r=۲$ یا $r=۳$ در هر صورت داریم:

$$۱)\begin{cases} r=۰ \\ a=۴q+r \end{cases} \to a=۴q$$

$$۲)\begin{cases} r=۱ \\ a=۴q+r \end{cases} \to a=۴q+۱$$

$$۳)\begin{cases} r=۲ \\ a=۴q+r \end{cases} \to a=۴q+۲$$

$$۴)\begin{cases} r=۳ \\ a=۴q+r \end{cases} \to a=۴q+۳$$

در حالت۱ و۳ عدد a زوج است که با فرض مسئله مطابقت ندارند. لذا فقط دو حالت۲ و۴ می مانند که مـورد نظر هستند.

تمرین ۴۰ : ثابت کنید که مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است. $(q\in Z)$

حل: چون a عدد فرد است پس $a=۲k+۱$ در نتیجه

$$a^{۲}=(۲k+۱)^{۲}=۴k^{۲}+۴k+۱=۴k(k+۱)+۱$$

$k(k+۱)$ حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است لذا $k(k+۱)=۲q$

و در نهایت داریم:

$$a^{۲}=۴(۲q)+۱=۸q+۱$$

تمرین ۴۱ : اگر n عدد صحیح باشد. ثابت کنید $۳\mid n^{۳}-n$

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$n\in Z \to n=۳q+r \quad , \quad ۰\le r<۳$$

و چون $r\in Z$ پس یا $r=۰$ یا $r=۱$ یا $r=۲$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=۰ \\ n=۳q+r \end{cases} \to n=۳q$$

$$n^{۳}-n=(۳q)^{۳}-(۳q)=۲۷q^{۳}-۳q=۳(\underbrace{۹q^{۳}-q}_{k})=۳k \to ۳\mid n^{۳}-n$$

$$\begin{cases} r=1 \\ n=3q+r \end{cases} \to n=3q+1$$

$$n^3-n=(3q+1)^3-(3q+1)=27q^3+27q^2+9q+1-3q-1$$

$$=3(\underbrace{9q^3+9q^2+2q}_{k})=3k \to 3\mid n^3-n$$

$$\begin{cases} r=2 \\ n=3q+r \end{cases} \to n=3q+2$$

$$n^3-n=(3q+2)^3-(3q+2)=27q^3+54q^2+36q+8-3q-2$$

$$=3(\underbrace{9q^3+18q^2+11q+2}_{k})=3k \to 3\mid n^3-n$$

تمرین۴۲ : اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده‌ی تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

حل : فرض کنیم که $a=bq+r$ پس :

$$n\mid a \qquad (1)$$

$$n\mid b \to n\mid bq \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} n\mid a-bq \xrightarrow{a-bq=r} n\mid r$$

تمرین۴۳ : اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد. ثابت کنید، همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر۳ بخش پذیر است.

حل : برای عدد صحیح a یکی از حالت زیر وجود دارد.

حالت اوّل :

$$a=3k \to 3\mid a$$

حالت دوّم :

$$a=3k+1 \to a+2=3k+3 \to a+2=3(k+1) \to 3\mid a+2$$

حالت سوّم :

$$a=3k+2 \to a+4=3k+6 \to a+4=3(k+2) \to 3\mid a+4$$

تمرین ۴۴ : ثابت کنید، تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

حل : فرض کنیم که

$$a=n \text{ و } b=n+1$$

لذا

$$b^3-a^3=(n+1)^3-(n)^3=(n^3+3n^2+3n+1)-n^3$$

$$=3n^2+3n+1=\underbrace{3n(n+1)}_{2q}+1=2q+1$$

تمرین ۴۵ : ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم که

$$a=n+1 \text{ و } b=n+2 \text{ و } c=n+3$$

لذا

$$abc=(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}{1\times2\times3\times\ldots\times n}$$

$$=\frac{(n+3)!}{n!}=\frac{(n+3)!}{n!}\times\frac{3!}{3!}=\frac{(n+3)!}{n!\times3!}\times3!$$

$$=\frac{(n+3)!}{3!\times[(n+3)-3]!}\times3!=\binom{n+3}{3}\times3!=k\times6=6k$$

توجه : تمرین فوق برای هر سه عدد صحیح متوالی نیز قابل اثبات است. برای مثال اگر هر سه عدد a و b و c منفی باشند در این صورت:

$$abc=-6k=6k'$$

تمرین ۴۶ : ثابت کنید که اگر n عدد صحیح زوج باشد، آنگاه $48\,|\,n^3-4n$

حل: چون n عدد صحیح زوج است پس $n=2k$ از طرفی

$$n^3-4n=(2k)^3-4(2k)=8k^3-8k=8k(k^2-1)=8k(k+1)(k-1)$$

و چون حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است پس:

$$n^3-4n=8(6q)=48q$$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: @mathameri سایت : www.mathtower.ir

درس سوّم : همنهشتی در اعداد صحیح و کاربردآن

در این درس به بررسی مفهوم همنهشتی در اعداد صحیح می پردازیم و به دنبال آن ویژگی های همنهشتی را بررسی می کنیم. در نهایت کاربردهایی از آن را بیان خواهیم کرد.

همنهشتی در اعداد صحیح

فرض کنیم که m یک عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را به پیمانه‌ی m همنهشت گویند و می نویسند $a \overset{m}{\equiv} b$ ، هرگاه $m \mid a-b$

مثال : چون $۷ \mid ۱۸-۴$ پس $۱۸ \overset{۷}{\equiv} ۴$

نتیجه : اگر m یک عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را به پیمانه‌ی m همنهشت گویند، هرگاه در تقسیم بر m هم باقی مانده باشند. در این صورت می نویسند.

$$a \overset{m}{\equiv} b \quad \text{یا} \quad a \equiv b \pmod{m}$$

و می خوانند « a همنهشت با b به پیمانه‌ی m » یا « a همنهشت با b به سنج m »

مثال: دو عدد ۱۶ و ۹ به پیمانه‌ی ۷ هم باقی مانده اند. پس $۱۶ \overset{۷}{\equiv} ۹$

$$\begin{array}{r|l} ۱۶ & ۷ \\ \cline{2-2} ۱۴ & ۲ \\ \hline ۲ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۹ & ۷ \\ \cline{2-2} ۷ & ۱ \\ \hline ۲ & \end{array}$$

تمرین ۱ : نشان دهید که ۱۳و۱۷- به پیمانه‌ی۳ همنهشت هستند.

تمرین ۲ : نشان دهید که ۳۳ و۱۸ به پیمانه‌ی ۵ همنهشت هستند.

مثال :

الف : چون $۵ \mid ۱۸-۳$ پس $۱۸ \overset{۵}{\equiv} ۳$

ب : چون $۶ \mid -۱۱-۱$ پس $-۱۱ \overset{۶}{\equiv} ۱$

ج : چون $۱۰ \mid -۲۹۵+۵$ پس $-۲۹۵ \overset{۱۰}{\equiv} -۵$

د : چون $۳ \mid ۲۳+۷$ پس $۲۳ \overset{۳}{\equiv} -۷$

تمرین ۳ : نشان دهید که ۳۳ و۱۸ به پیمانه‌ی ۵ همنهشت هستند.

تمرین ۴ : ثابت کنید که اگر $a+b\overset{m}{\equiv}c$ آنگاه $a\overset{m}{\equiv}c-b$

حل :

$$a+b\overset{m}{\equiv}c \to m\,|\,(a+b)-c \to m\,|\,a+(b-c) \to m\,|\,a-(c-b) \to a\overset{m}{\equiv}c-b$$

مثلاً :

$$۲۳\overset{۱۰}{\equiv}۳۳ \to ۲۰+۳\overset{۱۰}{\equiv}۳۳ \to ۲۰\overset{۱۰}{\equiv}۳۳-۳ \to ۲۰\overset{۱۰}{\equiv}۳۰$$

نتیجه : از تمرین فوق نتیجه گرفته می شود که می توان یک عدد صحیح را از یک طرف رابطه‌ی همنهشتی به طرف دیگر منتقل کرد، به شرط اینکه قرینه شود.

$$۳۳\overset{۵}{\equiv}۱۸ \to (۳۰+۳)\overset{۵}{\equiv}۱۸ \to ۳۰\overset{۵}{\equiv}(۱۸-۳) \to ۳۰\overset{۵}{\equiv}۱۵$$

تمرین۵ : اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $n\,|\,m$ ثابت کنید که $a\overset{n}{\equiv}b$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b \to m\,|\,a-b \xrightarrow{n|m} n\,|\,a-b \to a\overset{n}{\equiv}b$$

مثلاً : چون $۲۳\overset{۱۰}{\equiv}۳۳$ و $۵\,|\,۱۰$ پس $۲۳\overset{۵}{\equiv}۳۳$

***

ویژگی های همنهشتی اعداد صحیح

اگر m و n اعداد طبیعی و a و b و c و d اعداد صحیح دلخواهی باشند،آنگاه

۱) $a\overset{m}{\equiv}a$

اثبات:

$$m\,|\,۰ \to m\,|\,a-a \to a\overset{m}{\equiv}a$$

....

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow b \overset{m}{\equiv} a$

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \rightarrow m \mid -(a-b) \rightarrow m \mid b-a \rightarrow b \overset{m}{\equiv} a$$

....

۳) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{cases} \rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$ خاصیت تراگذری

اثبات:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \\ b \overset{m}{\equiv} c \rightarrow m \mid b-c \end{cases} \rightarrow m \mid (a-b)+(b-c) \rightarrow m \mid a-c \rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

....

۴) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c \in Z} a+c \overset{m}{\equiv} b+c$

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \rightarrow m \mid a-b+c-c \rightarrow m \mid (a+c)-(b+c) \rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$$

....

۵) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c \in Z} ac \overset{m}{\equiv} bc$

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \rightarrow m \mid c(a-b) \rightarrow m \mid ac-bc \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

....

۶) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d$

اثبات:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \\ c \overset{m}{\equiv} d \rightarrow m \mid c-d \end{cases} \rightarrow m \mid (a-b)+(c-d)$$

$$\to m\,|\,(a+c)-(b+d) \to a+c \overset{m}{\equiv} b+d$$

....

$$\text{۷)}\ \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \to ac \overset{m}{\equiv} bd$$

اثبات:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\times c} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \xrightarrow{\times b} bc \overset{m}{\equiv} bd \end{cases} \to ac \overset{m}{\equiv} bd$$

....

$$\text{۸)}\ a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n\in N} a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \to m\,|\,a-b \xrightarrow{(a-b)|(a^n-b^n)} m\,|\,a^n-b^n \to a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

روش دوّم :

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{m}{\equiv} b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a \overset{m}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \to \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\ \text{بار}} \overset{m}{\equiv} \underbrace{b\times b\times b\times\ldots\times b}_{n\ \text{بار}} \to a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

....

$$\text{۹)}\ a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n\in N} na \overset{m}{\equiv} nb$$

اثبات:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ n \overset{m}{\equiv} n \end{cases} \to na \overset{m}{\equiv} nb$$

....

۱۰) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{k \in Z} a \overset{m}{\equiv} b + mk$

اثبات:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ \circ \overset{m}{\equiv} mk \end{cases} \rightarrow a + \circ \overset{m}{\equiv} b + mk \rightarrow a \overset{m}{\equiv} b + mk$$

توجه : این ویژگی نشان می دهد که می توان به یک طرف رابطه‌ی همنهشتی، مضربی از پیمانه را اضافه کرد. البته با توجه به تمرین بعد مشاهده می شود که این مضرب یا هر مضرب دیگر را می توان به دو طرف نیز اضافه نمود.

تمرین۵ : ثابت کنید که اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه $a + mk_۱ \overset{m}{\equiv} b + mk_۲$

حل :

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ mk_۱ \overset{m}{\equiv} mk_۲ \end{cases} \xrightarrow{+} a + mk_۱ \overset{m}{\equiv} b + mk_۲$$

مثال :

$$۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \rightarrow ۷ + ۳(۵) \overset{۵}{\equiv} ۲ + ۱۱(۵) \rightarrow ۲۲ \overset{۵}{\equiv} ۵۷$$

توجه : علاوه بر ویژگی های فوق ، ویژگی های دیگری برای هم نهشتی می توان نوشت که در اینجا بدون اثبات آنها را بیان می کنیم و فقط به ذکر مثال اکتفا می کنیم.

الف) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

مثال :

$$\begin{cases} ۱۳ \overset{۶}{\equiv} ۲۵ \\ ۱۳ \overset{۴}{\equiv} ۲۵ \end{cases} \rightarrow ۱۳ \overset{۱۲}{\equiv} ۲۵$$

نتیجه :

$$\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \\ a\overset{n}{\equiv}b \\ (m,n)=۱ \end{cases} \to a\overset{[m,n]}{\equiv}b \xrightarrow{[m,n]=mn} a\overset{mn}{\equiv}b$$

مثال :

$$\begin{cases} ۲۲\overset{۴}{\equiv}۴۲ \\ ۲۲\overset{۵}{\equiv}۴۲ \end{cases} \to ۲۲\overset{۲۰}{\equiv}۴۲$$

ب) $a\overset{m}{\equiv}b \to (a,m)=(b,m)$

مثال :

$$۲۲\overset{۲۰}{\equiv}۴۲ \to (۲۲,۲۰)=(۴۲,۲۰)=۲$$

تمرین ۶ : فرض کنیم، $a\overset{m}{\equiv}b$ و $b\overset{n}{\equiv}c$ و $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a\overset{d}{\equiv}c$

اثبات :

$$\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{d|m} a\overset{d}{\equiv}b \\ b\overset{n}{\equiv}c \xrightarrow{d|n} b\overset{d}{\equiv}c \end{cases} \to a\overset{d}{\equiv}c$$

تمرین۷ : باقی مانده‌ی تقسیم $۲^{۱۳۸۰}$ بر ۷ بدست آورید.

حل:

$$۸\overset{۷}{\equiv}۱ \to ۲^{۳}\overset{۷}{\equiv}۱ \to (۲^{۳})^{۴۶۰}\overset{۷}{\equiv}(۱)^{۴۶۰} \to ۲^{۱۳۸۰}\overset{۷}{\equiv}۱$$

تمرین۸ : باقی مانده‌ی تقسیم $۲^{۱۳۸۵}$ بر ۹ بدست آورید.

حل:

$$۸\overset{۹}{\equiv}-۱ \to ۲^{۳}\overset{۹}{\equiv}-۱ \to (۲^{۳})^{۴۶۱}\overset{۹}{\equiv}(-۱)^{۴۶۱} \to ۲^{۱۳۸۳}\overset{۹}{\equiv}-۱ \to ۲^{۱۳۸۳}\times ۲^{۲}\overset{۹}{\equiv}-۱\times ۲^{۲}$$

$$\to ۲^{۱۳۸۵}\overset{۹}{\equiv}-۴ \xrightarrow{a\overset{m}{\equiv}b+mk} ۲^{۱۳۸۵}\overset{۹}{\equiv}-۴+۹(۱) \to ۲^{۱۳۸۵}\overset{۹}{\equiv}۵$$

تمرین ۹ : آخرین رقم سمت راست عدد $۷^{۱۰۳}$ را بدست آورید.

حل: باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد طبیعی بر ۱۰ برابر آخرین رقم سمت راست آن است.

$$۴۹ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \to ۷^{۲} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \to (۷^{۲})^{۵۰} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)^{۵۰} \to ۷^{۱۰۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \to ۷^{۱۰۰} \times ۷^{۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \times ۷^{۳}$$

$$\to ۷^{۱۰۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۷^{۳} \xrightarrow{۷^{۲} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \to ۷^{۲} \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \times ۷ \to ۷^{۳} \overset{۱۰}{\equiv} -۷ \to ۷^{۳} \overset{۱۰}{\equiv} -۷ + ۱۰(۱) \to ۷^{۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۳} ۷^{۱۰۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

تمرین ۱۰ : باقی مانده‌ی تقسیم $۲^{۱۳۸۰} + ۳^{۲۰۰۰}$ بر ۷ بدست آورید.

حل: ابتدا باقی مانده های هر یک از این اعداد را جداگانه تعیین می کنیم.

$$۸ \overset{۷}{\equiv} ۱ \to ۲^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۱ \to (۲^{۳})^{۴۶۰} \overset{۷}{\equiv} (۱)^{۴۶۰} \to ۲^{۱۳۸۰} \overset{۷}{\equiv} ۱$$

$$۲۷ \overset{۷}{\equiv} -۱ \to ۳^{۳} \overset{۷}{\equiv} -۱ \to (۳^{۳})^{۶۶۶} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۶۶۶} \to ۳^{۱۹۹۸} \overset{۷}{\equiv} ۱ \to ۳^{۱۹۹۸} \times ۳^{۲} \overset{۷}{\equiv} ۱ \times ۳^{۲}$$

$$\to ۳^{۲۰۰۰} \overset{۷}{\equiv} ۹ \xrightarrow{۹ \overset{۷}{\equiv} ۲} ۳^{۲۰۰۰} \overset{۷}{\equiv} ۲$$

$$\therefore \begin{cases} ۲^{۱۳۸۰} \overset{۷}{\equiv} ۱ \\ ۳^{۲۰۰۰} \overset{۷}{\equiv} ۲ \end{cases} \to ۲^{۱۳۸۰} + ۳^{۲۰۰۰} \overset{۷}{\equiv} ۱ + ۲ \to ۲^{۱۳۸۰} + ۳^{۲۰۰۰} \overset{۷}{\equiv} ۳$$

تمرین ۱۱ : باقی مانده‌ی تقسیم $۸^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۵^{۱۲}$ بر ۱۳ بدست آورید.

حل: ابتدا باقی مانده های هر یک از این اعداد را جداگانه تعیین می کنیم.

$$۲۵ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \to ۵^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \to (۵^{۲})^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^{۶} \to ۵^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$\begin{cases} ۳۶ \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \to ۶^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \to (۶^{۲})^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} (-۳)^{۶} \to ۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۳^{۶} \\ ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \to ۳^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \to (۳^{۳})^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} (۱)^{۲} \to ۳^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \end{cases} \to ۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$\begin{cases} ۴۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰ \to (۷^{۲})^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} (۱۰)^{۶} \to ۷^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} (۱۰)^{۶} \\ ۱۰ \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \to (۱۰)^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} (-۳)^{۶} \to (۱۰)^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۳^{۶} \\ ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \to ۳^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \to (۳^{۲})^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} (۱^{۲})^{۳} \to ۳^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \end{cases} \to ۷^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$64 \overset{13}{\equiv} -1 \rightarrow 8^{2} \overset{13}{\equiv} -1 \rightarrow (8^{2})^{6} \overset{13}{\equiv} (-1)^{6} \rightarrow 8^{12} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\begin{cases} 5^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \\ 6^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \\ 7^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \\ 8^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \end{cases} \rightarrow (5^{12}+6^{12}+7^{12}+8^{12}) \overset{13}{\equiv} 1+1+1+1 \rightarrow (5^{12}+6^{12}+7^{12}+8^{12}) \overset{13}{\equiv} 4$$

روش دوّم :

$$5^{12}+6^{12}+7^{12}+8^{12} \overset{13}{\equiv} 5^{12}+6^{12}+(-6)^{12}+(-5)^{12}$$

$$\rightarrow 5^{12}+6^{12}+7^{12}+8^{12} \overset{13}{\equiv} 5^{12}+6^{12}+6^{12}+5^{12}$$

$$\rightarrow 5^{12}+6^{12}+7^{12}+8^{12} \overset{13}{\equiv} 2(5^{12}+6^{12})$$

$$\xrightarrow{\rightarrow 5^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \,,\, \rightarrow 6^{12} \overset{13}{\equiv} 1} 5^{12}+6^{12}+7^{12}+8^{12} \overset{13}{\equiv} 2(1+1) \rightarrow 5^{12}+6^{12}+7^{12}+8^{12} \overset{13}{\equiv} 4$$

تمرین ۱۲: باقی مانده‌ی تقسیم $5^{17}+6^{17}+7^{17}+8^{17}$ بر ۱۳ بدست آورید.

حل :

$$5^{17}+6^{17}+7^{17}+8^{17} \overset{13}{\equiv} 5^{17}+6^{17}+(-6)^{17}+(-5)^{17} \rightarrow 5^{17}+6^{17}+7^{17}+8^{17} \overset{13}{\equiv} 0$$

تمرین ۱۳ : دو رقم سمت راست عدد 7^{103} را بدست آورید.

حل: باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد طبیعی بر ۱۰۰ برابر دو رقم سمت راست آن است.

$$49 \overset{100}{\equiv} -51 \rightarrow 7^{2} \overset{100}{\equiv} -51 \rightarrow (7^{2})^{2} \overset{100}{\equiv} (-51)^{2}$$

$$\xrightarrow{(-51)^{2}=2601 \overset{100}{\equiv} 1} 7^{4} \overset{100}{\equiv} 1 \rightarrow (7^{4})^{25} \overset{100}{\equiv} 1^{25}$$

$$\rightarrow 7^{100} \overset{100}{\equiv} 1 \rightarrow 7^{100} \times 7^{3} \overset{100}{\equiv} 1 \times 7^{3} \xrightarrow{7^{3}=343 \overset{100}{\equiv} 43} 7^{103} \overset{100}{\equiv} 43$$

تمرین۱۴ : اگر $۸^{۹}+a$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد، آنگاه کوچکترین مقدار طبیعی برای a کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۷

حل: ابتدا باقی مانده ی تقسیم عدد $۸^{۹}$ بر ۱۱ را تعیین می کنیم.

$$۶۴\overset{۱۱}{\equiv}-۲\rightarrow(۸^{۲})^{۴}\overset{۱۱}{\equiv}(-۲)^{۴}\rightarrow۸^{۸}\overset{۱۱}{\equiv}۱۶\rightarrow۸^{۸}\times۸\overset{۱۱}{\equiv}۱۶\times۸\rightarrow۸^{۹}\overset{۱۱}{\equiv}۱۲۸$$

$$\xrightarrow{۱۲۸\overset{۱۱}{\equiv}۷}۸^{۹}\overset{۱۱}{\equiv}۷$$

$$۸^{۹}\overset{۱۱}{\equiv}۷\rightarrow۸^{۹}+a\overset{۱۱}{\equiv}۷+a\xrightarrow{۸^{۹}+a\overset{۱۱}{\equiv}۰}۷+a\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

$$۷+a\overset{۱۱}{\equiv}۰\rightarrow۷+a=۰+۱۱k\rightarrow a=-۷+۱۱k$$

حال برای تعیین کمترین مقدار طبیعی a لازم است. مقدار k را برابر ۱ قرار دهیم. در این صورت:

$$a=-۷+۱۱k\rightarrow\xrightarrow{k=۱}a=۴$$

تمرین۱۵ : اگر $a\overset{۶}{\equiv}۳$ و $a\overset{۸}{\equiv}۵$. باقی مانده‌ی تقسیم a بر ۲۴ چند است؟

حل :

$$a\overset{۶}{\equiv}۳\rightarrow a-۳=۶k_{۱}\rightarrow a=۳+۶k_{۱}\xrightarrow{\times۴}۴a=۲۴k_{۱}+۱۲$$

$$a\overset{۸}{\equiv}۵\rightarrow a-۵=۸k_{۲}\rightarrow a=۵+۸k_{۲}\xrightarrow{\times۳}۳a=۲۴k_{۲}+۱۵$$

$$\rightarrow۴a-۳a=۲۴(k_{۱}-k_{۲})-۳\rightarrow a=۲۴k-۳\rightarrow a\overset{۲۴}{\equiv}-۳\rightarrow a\overset{۲۴}{\equiv}-۳+۱(۲۴)$$

$$\rightarrow a\overset{۲۴}{\equiv}۲۱$$

تمرین۱۶ : برای هر دو عدد صحیح b و a ثابت کنید که :

الف) $(a\pm b)^{۲}\overset{ab}{\equiv}a^{۲}+b^{۲}$ ب) $(a\pm b)^{۳}\overset{ab}{\equiv}a^{۳}\pm b^{۳}$

حل :

الف :

$$(a\pm b)^{۲}=a^{۲}\pm۲ab+b^{۲}$$

$$\rightarrow (a\pm b)^{۲} \overset{ab}{\equiv} a^{۲} \pm ۲ab + b^{۲}$$

$$\rightarrow (a\pm b)^{۲} \overset{ab}{\equiv} a^{۲} + b^{۲} \pm ۲(ab) \rightarrow (a\pm b)^{۲} \overset{ab}{\equiv} a^{۲} + b^{۲}$$

ب :

$$(a\pm b)^{۳} = a^{۳} \pm ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} \pm b^{۳}$$

$$\rightarrow (a\pm b)^{۳} \overset{ab}{\equiv} a^{۳} \pm ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} \pm b^{۳}$$

$$\rightarrow (a\pm b)^{۳} \overset{ab}{\equiv} a^{۳} \pm b^{۳} + ۳ab(b\pm a) \rightarrow (a\pm b)^{۳} \overset{ab}{\equiv} a^{۳} \pm b^{۳}$$

تمرین ۱۷ : باقی مانده‌ی تقسیم $۳۷^{۲n+۱}$ بر ۸ را به ازای هر عدد طبیعی n به دست آورید.

حل :

$$۳۷ \overset{۸}{\equiv} ۵ \rightarrow (۳۷)^{۲} \overset{۸}{\equiv} (۵)^{۲} \xrightarrow{۲۵ \overset{۸}{\equiv} ۱} (۳۷)^{۲} \overset{۸}{\equiv} ۱ \rightarrow (۳۷)^{۲n} \overset{۸}{\equiv} (۱)^{n}$$

$$\rightarrow (۳۷)^{۲n} \times ۳۷ \overset{۸}{\equiv} ۱ \times ۳۷ \rightarrow (۳۷)^{۲n+۱} \overset{۸}{\equiv} ۳۷ \xrightarrow{۳۷ \overset{۸}{\equiv} ۵} (۳۷)^{۲n+۱} \overset{۸}{\equiv} ۵$$

تمرین۱۸ : نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱}$ بر ۴۳ بخش پذیر است.

حل :

$$۶^{n} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^{n} \xrightarrow{\times ۳۶} ۶^{n} \times ۳۶ \overset{۴۳}{\equiv} ۶^{n} \times ۳۶ \rightarrow ۶^{n+۲} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^{n} \times ۳۶$$

$$۷^{۲} \overset{۴۳}{\equiv} ۶ \rightarrow (۷^{۲})^{n} \overset{۴۳}{\equiv} (۶)^{n} \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^{n} \times ۷$$

حال موارد بالا را نظیر به نظیر جمع می کنیم.

$$۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^{n} \times ۳۶ + ۶^{n} \times ۷$$

$$\rightarrow ۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^{n}(۳۶+۷) \rightarrow ۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^{n}(۴۳) \rightarrow ۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۰$$

تمرین۱۹ : نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $۱۱^{۳n-۱}-۷$ بر ۱۹ بخش پذیر است.

حل :

$$۱۱^{۳n-۱}-۷=۱۱^{۳(n-۱)+۲}-۷=(۱۱^{۳})^{n-۱}\times ۱۱^{۲}-۷$$

امّا :

$$۱۱^{۳}\overset{۱۹}{\equiv}۱\rightarrow (۱۱^{۳})^{n-۱}\overset{۱۹}{\equiv}(۱)^{n-۱}\rightarrow ۱۱^{۳n-۳}\overset{۱۹}{\equiv}۱$$

$$\xrightarrow{۱۱^{۲}\overset{۱۹}{\equiv}۷}۱۱^{۳n-۳}\times ۱۱^{۲}\overset{۱۹}{\equiv}۱\times ۷\rightarrow ۱۱^{۳n-۱}\overset{۱۹}{\equiv}۷\rightarrow ۱۱^{۳n-۱}-۷\overset{۱۹}{\equiv}۰$$

تمرین۲۲: باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۹\times(۷+۲^{۱۱})$ را بر ۲۳ بیابید.

حل :

$$۲^{۵}\overset{۲۳}{\equiv}۹\rightarrow (۲^{۵})^{۲}\overset{۲۳}{\equiv}(۹)^{۲}\rightarrow ۲^{۱۰}\overset{۲۳}{\equiv}۸۱\xrightarrow{۸۱\overset{۲۳}{\equiv}۱۲}۲^{۱۰}\overset{۲۳}{\equiv}۱۲\xrightarrow{\times ۲}۲^{۱۱}\overset{۲۳}{\equiv}۲۴$$

$$\xrightarrow{۲۴\overset{۲۳}{\equiv}۱}۲^{۱۱}\overset{۲۳}{\equiv}۱\xrightarrow{+۷}۲^{۱۱}+۷\overset{۲۳}{\equiv}۸\xrightarrow{\times ۹}(۲^{۱۱}+۷)\times ۹\overset{۲۳}{\equiv}۷۲$$

$$\xrightarrow{۷۲\overset{۲۳}{\equiv}۳}(۲^{۱۱}+۷)\times ۹\overset{۲۳}{\equiv}۳\rightarrow r=۳$$

تمرین۲۲: اگر دو عدد $۳a-۵$ و $۴a-۷$ رقم یکان برابر داشته باشند، $۹a+۶$ رقم یکان عدد را به دست آورید.

حل : چون این دو عدد رقم یکان مساوی دارند، پس به پیمانه‌ی۱۰ همنهشت هستند.

$$۴a-۷\overset{۱۰}{\equiv}۳a-۵\rightarrow ۴a-۳a\overset{۱۰}{\equiv}۷-۵\rightarrow a\overset{۱۰}{\equiv}۲$$

$$\xrightarrow{\times ۹}۹a\overset{۱۰}{\equiv}۱۸\xrightarrow{+۶}۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\xrightarrow{۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴}۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۴$$

تمرین۲۳ : باقی مانده‌ی تقسیم عدد $\sum_{n=۱}^{۵۰۰}n!$ بر ۱۰ را به دست آورید.

حل :

$$\sum_{n=۱}^{۵۰۰}n!=۱!+۲!+۳!+...+۵۰۰!$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱!\overset{۱۰}{\equiv}۱ \\ ۲!\overset{۱۰}{\equiv}۲ \\ ۳!\overset{۱۰}{\equiv}۶ \\ ۴!\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴ \\ ۵!\overset{۱۰}{\equiv}۱۲۰\overset{۱۰}{\equiv}۰ \\ ۶!\overset{۱۰}{\equiv}۰ \\ \vdots \\ ۵۰۰\overset{۱۰}{\equiv}۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} r=۱+۲+۶+۴+۰+۰+\ldots+۰=۱۳ \xrightarrow{۱۳\overset{۱۰}{\equiv}۳} r=۳$$

تمرین۲۴ : اگر اوّل مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

حل : کافی است تعداد روزهای از اوّل مهر تا ۷ اسفند را تعیین و باقی مانده‌ی تقسیم عدد بدست آمده بر ۷ را با توجه به جدول زیر محاسبه کنیم.

یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

تعداد روز های ماه های مهر و آبان و آذر و دی و بهمن و ۷ روز از اسفند برابر

$$(۳۰-۱)+۳۰+۳۰+۳۰+۳۰+۷=۱۵۶$$

و چون $۱۵۶\overset{۷}{\equiv}۲$ پس۷ اسفند، سه شنبه است.

تمرین۲۵ : اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

حل : کافی است تعداد روزهای از ۳۱ مرداد تا ۱۲ بهمن را تعیین و باقی مانده‌ی تقسیم عدد بدست آمده بر ۷ را با توجه به جدول زیر محاسبه کنیم.

شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

تعداد روز های ماه های شهریور و مهر و آبان و آذر و دی و ۱۲ روز از بهمن برابر

$$۳۱+۳۰+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۶۳$$

و چون $۱۶۳\overset{۷}{\equiv}۲$ پس۳۱ مرداد چهارشنبه است.

تمرین برای حل :

۲۶ : باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۱۹ + ۲۷^{۷}$ بر ۱۳ را تعیین کنید.

۲۷ : باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۱۰ + ۱۲ \times ۱۰۰۰^{۱۳}$ بر ۷ را تعیین کنید.

۲۸ : باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۵۸۱۱۲ بر عدد ۹ را به دست آورید.

۲۹ : باقی مانده‌ی تقسیم $\sum_{n=۱}^{۱۰۰} n!$ بر ۸ را تعیین کنید.

۳۰ : یکان عدد $۳^{۴۲۴} + ۷^{۱۰۱}$ را تعیین کنید.

۳۱ : باقی مانده‌ی تقسیم $(۲۵۱)^{۱۶۱} + ... + (۲۴۳)^{۱۶۱} + (۲۴۲)^{۱۶۱} + (۲۴۱)^{۱۶۱}$ بر ۱۲ بدست آورید.

۳۲ : نشان دهید که $۲^{۱۱} - ۱$ بر ۲۳ بخش پذیر است.

۳۳ : باقی مانده‌ی تقسیم $۵ + ۲^{۱۳۸۱}$ بر ۷ را به دست آورید.

۳۴ : اتحاد زیر به بسط دوجمله ای خیّام موسوم است.

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰}a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳}a^{n-۳}b^۳ + ... + \binom{n}{n}b^n$$

به کمک این اتحاد، ثابت کنید که برای هر $n \in N$ و $a,b \in Z$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

۳۵ : با استفاده از تمرین قبل ثابت کنید که عدد $۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱}$ بر ۱۳۲ بخش پذیر است.

حل :

$$۲۳ = ۱۱ + ۱۲ \to (۲۳)^{۵۱} = (۱۱+۱۲)^{۵۱} \to (۱۱+۱۲)^{۵۱} \overset{۱۱\times۱۲}{\equiv} ۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱}$$
$$\to ۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۰$$

۳۶ : ثابت کنید که باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد صحیح بر۳ برابر مجموع ارقام آن عدد است (برای سادگی کار عدد مورد نظر را ۵ رقمی فرض کنید.)

۳۷ : باقی مانده‌ی تقسیم ۴۵۲۷۱ بر ۳ را به دست آورید.

۳۸ : اوّل فروردین سال ۱۳۹۷ چهارشنبه است. روز تولد خودتان چه روزی است؟

دسته‌ی همنهشتی یک عدد صحیح

در درس قبل دیدیم که باقی مانده های تقسیم اعداد صحیح بر ۴ عبارتند از ۰ و ۱ و ۲ و ۳ می باشند. حال اگر هر کدام از این باقی مانده ها را یک نماینده‌ی مجموعه‌ی اعداد صحیح در نظر بگیریم که باقی مانده‌ی تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴ به ترتیب ۰ و ۱ و ۲ و ۳ باشد، داریم:

$$A_۰ = \{x \in Z \mid x = ۴k\} = \{\ldots, -۸, -۴, ۰, ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, \ldots\} = [۰]_۴$$

$$A_۱ = \{x \in Z \mid x = ۴k + ۱\} = \{\ldots, -۷, -۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \ldots\} = [۱]_۴$$

$$A_۲ = \{x \in Z \mid x = ۴k + ۲\} = \{\ldots, -۶, -۲, ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, \ldots\} = [۲]_۴$$

$$A_۳ = \{x \in Z \mid x = ۴k + ۳\} = \{\ldots, -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹, \ldots\} = [۳]_۴$$

یعنی مجموعه‌ی اعداد صحیح با عمل تقسیم بر ۴ به چهار مجموعه افراز می شود. همچنین در هر مجموعه تفاضل هر دو عضو بر ۴ بخش پذیر است.

برای مثال در مجموعه‌ی $A_۳$ می توان نوشت:

$$a, b \in A_۳ \rightarrow a - b = (۴k_۱ + ۳) - (۴k_۲ - ۳) = ۴(k_۱ - k_۲) \rightarrow ۴ \mid a - b$$

این موضوع برای هر عدد طبیعی برقرار است و لذا مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیح که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر r می باشد را کلاس یا دسته‌ی هم نهشتی r به پیمانه‌ی m می نامند و آن را با $[r]_m$ نمایش می دهند. یعنی :

$$A_r = \{x \in Z \mid x = mk + r\} = [r]_m$$

تمرین ۳۹ : در همنهشتی به پیمانه‌ی ۳ کلاس هم ارزی ۲ را بنویسید.

حل:

$$[۲]_۳ = \{x \in Z \mid x = ۳k + ۲\} = \{\ldots, -۷, -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, \ldots\}$$

تمرین ۴۰ : در همنهشتی به پیمانه‌ی۵ تمام کلاسهای هم ارزی را بنویسید.

$$[۰]_۵ = \{x \in Z \mid x = ۵k\} = \{\ldots, -۵, ۰, ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, \ldots\}$$

$$[۱]_۵ = \{x \in Z \mid x = ۵k + ۱\} = \{\ldots, -۴, ۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ۲۱, \ldots\}$$

$$[۲]_۵ = \{x \in Z \mid x = ۵k + ۲\} = \{\ldots, -۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, \ldots\}$$

$$[۳]_۵ = \{x \in Z \mid x = ۵k + ۳\} = \{\dots, -۲, ۳, ۸, ۱۳, ۱۸, ۲۳, \dots\}$$

$$[۴]_۵ = \{x \in Z \mid x = ۵k + ۴\} = \{\dots, -۱, ۴, ۹, ۱۴, ۱۹, ۲۴, \dots\}$$

تمرین ۴۱ : عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته‌ی هم نهشتی به پیمانه‌ی ۹ تعلق دارد؟

حل :

$$۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۱ + ۳ + ۹ + ۸ \rightarrow ۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{۲۱ \overset{۹}{\equiv} ۳} ۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

$$\rightarrow r = ۳ \rightarrow ۱۳۹۸ \in [۳]_۹$$

تمرین ۴۲ : عدد ۲۱۰- به کدام یک از کلاس های هم ارزی در همنهشتی به پیمانه‌ی ۸ تعلق دارد؟

۱) $[۶]$ ۲) $[۲]$ ۳) $[۳]$ ۴) $[۱]$

حل: کافی است باقی مانده‌ی اصلی تقسیم عدد ۲۱۰- بر ۸ را تعیین کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲۱۰ & ۸ \\ \hline \dots & ۲۶ \\ \hline ۲ & \end{array}$$

$$۲۱۰ \overset{۸}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times(-۱)} -۲۱۰ \overset{۸}{\equiv} -۲ \rightarrow -۲۱۰ \overset{۸}{\equiv} -۲ + ۸(۱) \rightarrow -۲۱۰ \overset{۸}{\equiv} ۶$$

$$\rightarrow r = ۶ \rightarrow -۲۱۰ \in [۶]_۸$$

تمرین ۴۳ : دو عدد b و a به صورت های زیر نوشته شده اند.

$$a = ۷k_۱ + ۵ \quad \text{و} \quad b = ۷k_۲ - ۲$$

دسته‌ی همنهشتی $a + ۲b$ را به پیمانه‌ی ۷ مشخص کنید.

حل : کافی است که باقی مانده اصلی تقسیم $a + ۲b$ به ۷ را تعیین کنیم.

$$a \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$b \overset{۷}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲b \overset{۷}{\equiv} -۴$$

$$\xrightarrow{+} a + ۲b \overset{۷}{\equiv} ۵ + (-۴) \rightarrow a + ۲b \overset{۷}{\equiv} ۱$$

$$\rightarrow r = ۱ \rightarrow (a + ۲b) \in [۱]_۷$$

تمرین ۴۴ : اگر k یک عدد صحیح باشد. نشان دهید که به ازای هر k فقط یکی از حالت های زیر برقرار است.

$$k \in [۲]_۳ \ \text{یا} \ k \in [۱]_۳ \ \text{یا} \ k \in [۰]_۳$$

حل : باقی مانده‌ی تقسیم هر عدد صحیح همچون k بر عدد ۳ ، یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می باشد. پس k باید فقط به یکی از دسته‌ی هم ارزی به پیمانه‌ی ۳ تعلق داشته باشد.

تمرین۴۵ : مجموعه‌ی همه‌ی دسته های هم ارزی به پیمانه‌ی ۵ چنین است.

$$\{[۰],[a],[a^۲],[a^۳],[a^۴]\}$$

عدد a کدام است؟

۱(۱   ۲(۲   ۵(۳   ۴(۴

حل: مجموعه‌ی دسته های هم ارزی به پیمانه‌ی ۵ بصورت زیر می باشد.

$$\{[۰],[۱],[۲],[۳],[۴]\}$$

حال به جای a در مجموعه‌ی داده شده عددی قرار دهیم که این دو مجموعه مساوی شوند. قرار می دهیم.

$$a=۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[۰]=[۰]\\ [a]=[۲]\\ [a^۲]=[۲^۲]=[۴]\\ [a^۳]=[۲^۳]=[۸]=[۳]\\ [a^۴]=[۲^۴]=[۱۶]=[۱]\end{cases}$$

تمرین۴۶ : همه‌ی اعداد صحیحی چون a را بیابید که ۵ برابر آنها بعلاوه‌ی ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

حل :

$$۵a+۹\overset{۱۱}{\equiv}۰\rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۹\rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۹+(۴\times ۱۱)\rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}۳۵\xrightarrow{\div ۵}a\overset{۱۱}{\equiv}۷$$

$$\rightarrow a=۱۱k+۷ \quad ; \quad k\in Z$$

تمرین برای حل:

۴۷ : اگر $(۳x+۱)\in[۴]_۷$، آنگاه با محاسبه **تعیین کنید** که $۵x^۲+۳$ به کدام دسته‌ی همنهشتی تعلق دارد؟

***

معادله‌ی همنهشتی

هر رابطه‌ی همنهشتی به شکل $ax \overset{m}{\equiv} b$ (b و a دو عدد صحیح و m طبیعی) را یک معادله‌ی همنهشتی می نامند. منظور از حل معادله‌ی همنهشتی یافتن اعداد صحیحی مانند $x_{\circ}$ است که $ax_{\circ}$ با b به پیمانه‌ی m هم باقی مانده باشند. به عبارتی دیگر

$$ax_{\circ} = mk + b \quad ; \quad k \in Z$$

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x \overset{۷}{\equiv} ۲$$

حل : وجود دارد $k \in Z$ که $x = ۷k + ۲$ لذا x می تواند به ازای مقادیر مختلف k یکی از اعداد زیر باشد.

k	....	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	....
x	....	-۱۹	-۱۲	-۵	۲	۹	۱۶	۲۳	....

توجه داشته باشید که جواب کلّی $x = ۷k + ۲$ را **جواب عمومی معادله** می نامند.

در معادله‌ی مثال فوق، ضریب x عدد یک است ولی گاهی این ضریب یک نمی باشد. برای دست یابی به جواب های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم. این کار به کمک ویژگی های زیر که قبلاً با برخی از آنها آشنا شده اید، انجام می شود.

الف : اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه $a + mk_۱ \overset{m}{\equiv} b + mk_۲$

ب : اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m) = d$ آنگاه $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$ (اثبات این ویژگی جزء اهداف کتاب نمی باشد.)

نتیجه : اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m) = ۱$ آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$

تمرین۴۸ : معادله‌ی همنهشتی $۳x \overset{۵}{\equiv} ۹$ را حل کنید.

حل:

$$۳x \overset{۵}{\equiv} ۹ \rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۳ \times ۳ \xrightarrow{(۳,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \rightarrow x = ۵k + ۳ \quad ; \quad k \in Z$$

تمرین ۴۹ : معادله‌ی همنهشتی $۴x \overset{۹}{\equiv} ۱۲$ را حل کنید.

حل:

$$۴x \overset{۹}{\equiv} ۱۲ \rightarrow ۴x \overset{۹}{\equiv} ۴ \times ۳ \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \overset{۹}{\equiv} ۳ \rightarrow x = ۹k + ۳ \quad ; \quad k \in Z$$

تمرین ۵۰ : معادله‌ی همنهشتی $۴x \overset{۹}{\equiv} ۱۳$ را حل کنید.

حل:

$$۴x \overset{۹}{\equiv} ۱۳ \xrightarrow{۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴} ۴x \overset{۹}{\equiv} ۴ \rightarrow \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \overset{۹}{\equiv} ۱ \rightarrow x = ۹k + ۱ \quad ; \; k \in Z$$

تمرین ۵۱ : معادله‌ی همنهشتی $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را حل کنید.

حل:

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \xrightarrow{۱۷ \overset{۵}{\equiv} ۲} ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲ \rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲ + (۲ \times ۵)$$

$$\rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{(۴,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \rightarrow x = ۵k + ۳ \quad ; \quad k \in Z$$

تمرین ۵۲ : معادله های همنهشتی زیر را حل کنید.

الف) $۱۰x \overset{۱۵}{\equiv} ۴۰$ ب) $۹x \overset{۴}{\equiv} ۱۳$ ج) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

حل :

الف :

$$۱۰x \overset{۱۵}{\equiv} ۴۰ \xrightarrow{(۱۰,۱۵)=۵} x \overset{۳}{\equiv} ۴ \xrightarrow{۴ \overset{۳}{\equiv} ۱} x \overset{۳}{\equiv} ۱ \rightarrow x = ۳k + ۱ \quad ; \; k \in Z$$

ب :

$$۹x \overset{۴}{\equiv} ۱۳ \xrightarrow{۱۳ \overset{۴}{\equiv} ۹} ۹x \overset{۴}{\equiv} ۹ \rightarrow \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \overset{۴}{\equiv} ۱ \rightarrow x = ۴k + ۱ \quad ; \; k \in Z$$

ج :

$$۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹ \xrightarrow{۴۲۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \text{ و } ۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۲} ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ + (۳ \times ۱۱) \rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵$$

$$\xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \rightarrow x = ۱۱k + ۷ \; ; \; k \in Z$$

توجه : معادله‌ی هم نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a,m)=d$ و $d\,|\,b$ (این موضوع را بدون اثبات می پذیریم.)

لذا اگر $(a,m)=۱$ معادله ، همواره دارای جواب است.

مثال : معادله‌ی $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ دارای جواب نیست. زیرا $(۶,۹)=۳$ و $۳ \nmid ۱۱$

مثال : معادله‌ی $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸$ دارای جواب است. زیرا $(۴,۶)=۲$ و $۲\,|\,۱۸$ و جواب آن می شود.

$$۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸ \to ۲\times ۲x \overset{۶}{\equiv} ۲\times ۹ \xrightarrow{(۲,۶)=۲} ۲x \overset{۳}{\equiv} ۹ \to ۲x \overset{۳}{\equiv} ۹+۳ \to ۲x \overset{۳}{\equiv} ۱۲$$

$$\xrightarrow{(۲,۳)=۱} x \overset{۳}{\equiv} ۶ \xrightarrow{۶ \overset{۳}{\equiv} ۰} x \overset{۳}{\equiv} ۰ \to x = ۳k$$

تمرین برای حل :

۵۳ : معادله های همنهشتی زیر را در صورت امکان حل کنید.

الف) $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ ب) $۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

۵۴ : همه‌ی اعداد صحیحی را بیابید که اگر از سه برابر آنها ۱۳ واحد کم کنیم، حاصل بخش پذیر ۷ شود.

❋❋❋

معادله‌ی سیاله

هر معادله‌ی دو یا چند متغیره که دامنه‌ی متغیر های آن مجموعه‌ی اعداد صحیح باشند، را معادله‌ی سیاله (دیوفانتی) می گویند. اگر متغیر های معادله‌ی سیاله از درجه‌ی یک باشند،آنرا **معادله‌ی سیاله‌ی خطی** می نامند.

مثلاً معادله‌ی $ax+by=c$ یک معادله‌ی سیاله‌ی خطی است که در آن $a,b,c\in Z$ و $a^{۲}+b^{۲}\neq ۰$

منظور از حل یک معادله‌ی سیاله، یافتن جواب های صحیح معادله است. یعنی زوج مرتب $(x_{\circ},y_{\circ})$ از اعداد صحیح را یک جواب معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ می نامند، هرگاه $ax_{\circ}+by_{\circ}=c$

مثال: زوج مرتب $(۲,-۳)$ یک جواب معادله‌ی $۳x-۲y=۱۲$ است. زیرا $۳(۲)-۲(-۳)=۱۲$

توجه : معادله‌ی سیاله را می توان به یک معادله ی همنهشتی تبدیل کرد. برای مثال :

$$ax+by=c\rightarrow ax-c=(-b)y\rightarrow -b\,|\,ax-c\rightarrow b\,|\,ax-c\rightarrow ax\overset{|b|}{\equiv}c$$

$$ax+by=c\rightarrow by-c=(-a)x\rightarrow -a\,|\,by-c\rightarrow a\,|\,by-c\rightarrow by\overset{|a|}{\equiv}c$$

بنابراین معادله‌ی سیاله‌ی خطی $ax+by=c$ دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a,b)=d\,|\,c$

نتیجه ۱: اگر $(a,b)=d$ و $d\nmid c$ آنگاه معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب صحیح نیست.

مثلاً: معادله‌ی سیاله‌ی $۴x+۶y=۷$ دارای جواب صحیح نیست.

نتیجه ۲ : اگر $(a,b)=۱$ چون $۱\,|\,c$ آنگاه معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ همواره دارای جواب صحیح است.

تمرین۵۵ : ثابت کنید که معادله $(۷n+۹)x+(۳n+۴)y=۵$ بـه ازاء هـر عـدد صـحیح n دارای جواب است.

حل: گیریم که $(۷n+۹,۳n+۴)=d$

$$(۷n+۹,۳n+۴)=d\rightarrow\begin{cases}d\,|\,۷n+۹\rightarrow d\,|-۳(۷n+۹)\\ d\,|\,۳n+۴\rightarrow d\,|\,۷(۳n+۴)\end{cases}$$

$$\rightarrow d\,|-۳(۷n+۹)+۷(۳n+۴)\rightarrow d\,|\,۱\xrightarrow{d\in N}d=۱$$

روش های حل یک معادله‌ی سیاله

برای حل یک معادله‌ی سیاله روش های مختلفی وجود دارد. از جمله‌ی این روش های می توان موارد زیر را معرفی کرد.

الف : روش تبدیل به معادله‌ی همنهشتی

با تبدیل یک معادله‌ی سیاله به معادله‌ی همنهشتی می توان به جواب های کلی آن دست یافت. بدین شکل که ابتدا معادله‌ی $ax+by=c$ را به صورت $ax \overset{|b|}{\equiv} c$ می نویسیم و با حل این معادله‌ی همنهشتی یک جواب عمومی برای x به دست می آوریم. با جایگزین کردن این جواب در معادله‌ی سیاله‌ی اصلی جواب عمومی برای y بدست می آید.

مثال : معادله‌ی $2x+3y=8$ را حل کنید.

حل : چون $(2,3)=1$ و $1|8$ ، لذا معادله دارای جواب است.

$$2x+3y=8 \rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 8 \xrightarrow{(2,3)=1} x \overset{3}{\equiv} 4 \rightarrow x \overset{3}{\equiv} 1+3 \rightarrow x \overset{3}{\equiv} 1 \rightarrow x=3k+1$$

$$2x+3y=8 \xrightarrow{x=3k+1} 2(3k+1)+3y=8 \rightarrow y=-2k+2$$

مثال : معادله‌ی $4x+5y=9$ را حل کنید.

حل : چون $(4,5)=1$ و $1|9$ ، لذا معادله دارای جواب است.

$$4x+5y=9 \rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 9 \rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 4+5 \rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{(4,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 1 \rightarrow x=5k+1$$

$$4x+5y=9 \xrightarrow{x=5k+1} 4(5k+1)+5y=9 \rightarrow y=-4k+1$$

ب : روش اویلر

در این روش مجهولی را که ضریب آن از لحاظ قدرمطلق کمتر از ضریب دیگری است،برحسب بقیه‌ی عناصر معادله حساب می کنیم که یک عبارت کسری به دست آید. این عبارت را تا حد امکان تفکیک می نماییم و کسر جدیدی که حاصل می شود را برابر عدد صحیحی مانند k قرار داده و از آنجا x و y را بر حسب k بدست می آوریم.

مثال : معادله‌ی $۲x+۳y=۸$ را حل کنید.

حل: چون $(۲,۳)=۱$ و $۱|۸$ ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب x دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب y است پس:

$$x=\frac{۸-۳y}{۲}=\frac{۸-۲y-y}{۲}=\frac{۸-۲y}{۲}+\frac{-y}{۲}=۴-y+\frac{-y}{۲}$$

حال $\frac{-y}{۲}$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{-y}{۲}=k\rightarrow y=-۲k$$

پس:

$$x=۴-y+\frac{-y}{۲}\rightarrow x=۴+۲k+k=۴+۳k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x=۴+۳k \\ y=-۲k \end{cases}$$

مثال : معادله‌ی $۲x+۵y=۱۱$ را حل کنید.

حل: چون $(۲,۵)=۱$ و $۱|۱۱$، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب x دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب y است پس:

$$x=\frac{۱۱-۵y}{۲}=\frac{۱۰+۱-۴y-y}{۲}=۵-۲y+\frac{۱-y}{۲}$$

حال $\frac{۱-y}{۲}$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{۱-y}{۲}=k\rightarrow y=۱-۲k$$

پس:

$$x=۵-۲y+\frac{۱-y}{۲}\rightarrow x=۵-۲(۱-۲k)+k=۳+۵k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x=۳+۵k \\ y=۱-۲k \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی $۵x-۳y=۱۱$ را حل کنید.

حل: چون $(۵,-۳)=۱$ و $۱|۱۱$، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب y دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب x است پس:

$$y=\frac{۱۱-۵x}{-۳}=\frac{۹+۲-۶x+x}{-۳}=-۳+۲x+\frac{۲+x}{-۳}$$

حال $\frac{۲+x}{-۳}$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{۲+x}{-۳}=k \rightarrow x=-۲-۳k$$

پس:

$$y=-۳+۲x+\frac{۲+x}{-۳}=-۳+۲(-۲-۳k)+k=-۷-۵k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x=-۲-۳k \\ y=-۷-۵k \end{cases}$$

ج : روش کلاسیک

روش کلاسیک برای حل معادلات سیاله بر اساس قضیه‌ی زیر است.

قضیه : اگر $(x_{\circ},y_{\circ})$ یک جواب معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ باشد،آنگاه ثابت می شود که کلیه‌ی جوابهای معادله عبارتند از :

$$\begin{cases} x=x_{\circ}+\frac{b}{d}k \\ y=y_{\circ}-\frac{a}{d}k \end{cases}$$

که در آن $(a,b)=d$ و $k\in Z$ می باشند.

نتیجه : طبق این قضیه بدیهی است که اگر معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جوابی به صورت $(x_{\circ},y_{\circ})$ باشد، در حقیقت بی شمار جواب دارد که از رابطه‌ی فوق بدست می آیند.

مثال : معادله‌ی $۲x+۳y=۸$ را حل کنید.

حل: چون $(۲,۳) = ۱$ و $۱|۸$ ، لذا معادله دارای جواب است. با جستجو به جواب $(۱,۲)$ می رسیم. پس کلیه ی جواب های این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = x_{\circ} + \dfrac{b}{d}k = ۱ + \dfrac{۳}{۱}k = ۱ + ۳k \\ y = y_{\circ} - \dfrac{a}{d}k = ۲ - \dfrac{۲}{۱}k = ۲ - ۲k \end{cases}$$

مثال : معادله‌ی $۴x + ۶y = ۱۰$ را حل کنید.

حل: چون $(۴,۶) = ۲$ و $۲|۱۰$ ، لذا معادله دارای جواب است. با جستجو به جواب $(۱,۱)$ می رسیم. پس کلیـه ی جواب های این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = x_{\circ} + \dfrac{b}{d}k = ۱ + \dfrac{۶}{۲}k = ۱ + ۳k \\ y = y_{\circ} - \dfrac{a}{d}k = ۱ - \dfrac{۴}{۲}k = ۱ - ۲k \end{cases}$$

مثال : معادله ی $۴x + ۶y = ۷$ را حل کنید.

حل: چون $(۴,۶) = ۲$ و $۲\nmid ۷$ ، لذا معادله دارای جواب نیست.

تمرین برای حل :

۵۶ : معادله‌ی زیر را به سه روش بیان شده حل کنید.

$۷x + ۵y = ۱۱$

***

حل چند مسئله‌ی کاربردی

در انتهای بحث چند مسئله ریاضی که به کمک معادله ی سیاله حل می شوند. معرفی می کنیم.

مثال : جوابهای طبیعی[1] معادله‌ی $۲x+۵y=۱۱$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله را حل می کنیم. با توجه به تمرین های قبل داریم.

$$\begin{cases} x=۳+۵k \\ y=۱-۲k \end{cases}$$

حال جدولی مانند جدول زیر تشکیل می دهیم و جوابهای طبیعی معادله را به کمک آن تعیین می کنیم.

k	....	۴-	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	....
x	....	۱۷-	۱۲-	۷-	۲-	۳	۸	۱۳	....
y	....	۹	۷	۵	۳	۱	۱-	۳-	....

با توجه به این جدول بدیهی است که معادله دارای یک جواب طبیعی (۳,۱) است.

توجه : برای تعیین جواب های طبیعی معادله ، می توان به شکل زیر نیز عمل کرد.

$$x>۰ \to ۳+۵k>۰ \to k>\frac{-۳}{۵}$$

$$y>۰ \to ۱-۲k>۰ \to -۲k>-۱ \to k<\frac{۱}{۲}$$

اکنون تعداد اعداد صحیح (تعداد k صحیح) بین $\frac{-۳}{۵}$ و $\frac{۱}{۲}$ را تعیین می کنیم. در این مسئله فقط یک عدد صحیح و آن هم در حالت $k=۰$ بین $\frac{-۳}{۵}$ و $\frac{۱}{۲}$ وجود دارد. لذا معادله فقط یک جواب طبیعی دارد که به ازای $k=۰$ بدست می آید.

$$\begin{cases} x=۳+۵k \\ y=۱-۲k \end{cases} \xrightarrow{k=۰} \begin{cases} x=۳ \\ y=۱ \end{cases}$$

***

[1] . منظور از جواب طبیعی، جوابی است مانند $(x_۰ , y_۰)$ که در آن $x_۰$ و $y_۰$ هر دو عدد طبیعی باشند.

مثال : در یک دفتر پستی فقط تمبر های۹۰ و۵۰ ریالی موجود است. برای چسباندن تمبر روی یک بسته‌ی پستی که نیاز به۸۵۰ ریال تمبر دارد، از هر کدام از تمبر های فوق به چه مقدار لازم است؟

حل: تعداد تمبرهای۹۰ و۵۰ ریالی را به ترتیب x و y در نظر بگیریم. معادله‌ی سیاله‌ی $۹۰x+۵۰y=۸۵۰$ حاصل می شود.

$$۹۰x+۵۰y=۸۵۰ \xrightarrow{\div ۱۰} ۹x+۵y=۸۵$$

هدف تعیین جواب های صحیح غیر منفی y و x است که در معادله‌ی $۹x+۵y=۸۵$ صدق کند.

چون $(۹,۵)=۱$ و $۱|۸۵$، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب y دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب x است پس:

$$y=\frac{۸۵-۹x}{۵}=\frac{۸۵-۱۰x+x}{۵}=۱۷-۲x+\frac{۱}{۵}x$$

حال $\frac{۱}{۵}x$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{۱}{۵}x=k \rightarrow x=۵k$$

پس:

$$y=۱۷-۲x+\frac{۱}{۵}x=۱۷-۱۰k+k=۱۷-۹k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x=۵k \\ y=۱۷-۹k \end{cases}$$

حال برای تعیین جوابهای صحیح غیر منفی می توان نوشت:

$$\begin{cases} x=۵k \\ y=۱۷-۹k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ \rightarrow ۵k\geq ۰ \rightarrow k\geq ۰ \\ y\geq ۰ \rightarrow ۱۷-۹k\geq ۰ \rightarrow k\leq \frac{۱۷}{۹} \rightarrow k\leq ۱/۸۸ \end{cases} \rightarrow ۰\leq k\leq ۱/۸۸$$

که در این بازه ، فقط دو عدد صحیح برای k وجود دارد. این دو عدد عبارتند از : $k=۰$ و $k=۱$ لذا

$$k=۰ \xrightarrow{\begin{cases} x=۵k \\ y=۱۷-۹k \end{cases}} \begin{cases} x=۰ \\ y=۱۷ \end{cases} \quad \text{و} \quad k=۱ \xrightarrow{\begin{cases} x=۵k \\ y=۱۷-۹k \end{cases}} \begin{cases} x=۵ \\ y=۸ \end{cases}$$

با تشکیل جدول نیز می توان جوابهای صحیحی غیر منفی را نیز تعیین کرد.

k	....	-۱	۰	۱	۲	....
x	....	-۵	۰	۵	۱۰	....
y	....	۲۶	۱۷	۸	-۱	....

پس دو جواب زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} x=۰ \\ y=۱۷ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x=۵ \\ y=۸ \end{cases}$$

***

مثال : به چند طریق می توان از بین دو نوع گل، یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

حل : تعداد گل های نوع اوّل را x و تعداد گل های نوع دوّم را y فرض می کنیم. با توجه به صورت مسئله داریم: $x+y=۹$

پس اگر $x=k$ آنگاه $y=۹-k$ و می توان جدول زیر را تشکیل داد.

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$x=k$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$y=۹-k$	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

یعنی به ده طریق می توان یک دسته گل شامل ۹ شاخه تهیه کرد.

نکته : اگر ($k\in N$) تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی سیاله‌ی $x+y=k$ برابر $k-۱$ است.

اثبات : با تشکیل جدول به راحتی می توان این موضوع را مشاهده کرد.

x	....	۰	۱	۲	۳	....	$k-۲$	$k-۱$	k	....
y	....	k	$k-۱$	$k-۲$	$k-۳$	....	۲	۱	۰	....

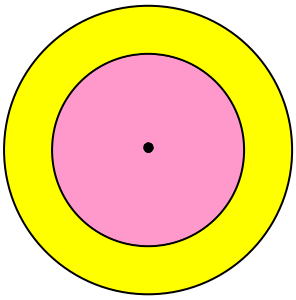
که فقط جواب های هاشور خورده در جدول قابل قبول هستند و تعداد آنها $k-۱$ می باشد.

***

تمرین برای حل :

۵۷ : به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد.

۵۸ : در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می توانند سفارش غذا بدهند. (هر نفر فقط یک پرس غذا می کند.)



۵۹ : تیر اندازی به سمت یک هدف ، شامل دو دایره‌ی هم مرکز ، تیر اندازی می کند. اگر او تیر را به دایره ی با شعاع کوچکتر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره‌ی با شعاع بزرگتر و خارج دایره‌ی کوچکتر بزند، ۳ امتیاز می گیرد. اگر او کمتـر از ۱۵ تیر انداخته و همه‌ی تیر ها به داخل دایره‌ی بزرگتر اصابت کرده باشند و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد، چند حالت برای او در این تیراندازی می تواند ثبت کند.

۶۰ : ثابت کنید که تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی $x + y = ۱۱$ برابر ۱۰ جواب است.

۶۱ : به چند طریق می توان یک کیسه‌ی ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۶۲ : شخصی در یک مسابقه‌ی علمی شرکت کرده است. او به سئوالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد. (پاسخ به هر سئوال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: @mathameri   سایت : www.mathtower.ir