

فصل سوم

تابع

❖ درس اول:

آشنایی با برخی از انواع تابع

❖ درس دوم:

وارون یک تابع و تابع یک به یک

❖ درس سوم:

اعمال جبری روی توابع

بازم فصل ۳:

شهریوردی	نوبت دوم	نوبت اول
۳	۲/۵	۶

فصل ۳ درس ۱: آشنایی با برخی از انواع تابع

پیش نیازهای درس ۱:

- تشخیص جمله عمومی یک الگو
- شناخت مفهوم تابع و بازنمایی های آن
- ارتباط بین بازنمایی های مختلف تابع و تبدیل آنها به یکدیگر
- شناخت مفهوم دامنه و برد یک تابع از روی نمودار
- حل نامعادلات درجه اول
- شناخت توابع چندجمله ای
- شناخت عملگر رادیکال

اهداف درس ۱:

- آشنایی با توابع گویا و تعیین دامنه آن
- رسم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$
- درک تساوی دو تابع از روی نمودار و همچنین از روی ضابطه و دامنه
- آشنایی با توابع رادیکالی
- رسم تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$
- رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$
- آشنایی با توابع پله ای
- آشنایی با عملگر جزء صحیح
- شناخت و رسم تابع جزء صحیح

تابع:

یک رابطه هنگامی تابع است که بتوانیم به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهیم.

ضابطه و دامنه تابع:

به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه آن تابع می‌گوییم.

$$y = f(x)$$

یک تابع با ضابطه و دامنه آن مشخص می‌شود، اگر دامنه تابع ذکر نشود، بزرگترین دامنه ممکن را برای آن تابع در نظر می‌گیریم.

دامنه تابع چند جمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی (R) است

انواع توابع:

(۲) ثابت

(۱) چند جمله‌ای

(۴) همانی

(۳) چند ضابطه‌ای

(۶) گویا

(۵) قدر مطلق

(۸) پله‌ای

(۷) رادیکالی

(۱۰) یک به یک

(۹) جزء صحیح

(۱۲) لگاریتمی

(۱۱) مثلثاتی

(۱۳) نمایی

با توابع ۱ تا ۵ در سال دهم آشنا شده‌اید.

توابع گویا:

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم

که صورت و مخرج، چند جمله‌ای هستند و مخرج صفر نیست.

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ مثل:}$$

(فعالیت ص ۴۹)

توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند:

$$f(x) = \frac{x}{x+5}, \quad f(x) = \frac{x+3}{x-10}$$

$$f(x) = \sqrt{5x}, \quad f(x) = 2$$

دامنه توابع گویا:

توابع گویا به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کند تعریف نمی‌شود چون کسری که مخرجش صفر است وجود ندارد. بنابراین دامنه آن به صورت:

$$D_f = R - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

تذکر: همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می‌کنیم.

مثل:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow x = 0 \rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{5}{x-2} \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow D_f = R - \{2\}$$

(گاردور گلاسی ص ۵۰)

دامنه هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x+5} \rightarrow x+5=0 \rightarrow x=-5 \rightarrow D_f = R - \{-5\}$$

$$g(x) = \frac{3}{x-4} \rightarrow x-4=0 \rightarrow x=4 \rightarrow D_g = R - \{4\}$$

تمرین ۲ و ۳ ص ۵۶: Homework

② دامنه تابع گویای $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ را به دست آورید.

④ تابعی گویا بنویسید که دامنه $D_g = R - \{-1\}$ شود.

تساوی دو تابع:

شرط تساوی دو تابع:

(۱) تساوی دامنه ها

(۲) تساوی ضابطه ها

✓ نکته: اگر دو تابع برابر باشند، نمودار آنها کاملاً بر هم

منطبقند

✓ در تشخیص تساوی دو تابع ابتدا تساوی دامنه را

چک می کنیم

(مثال ص ۵۱)

آیا دو تابع با ضابطه $g(x) = 2$ ، $f(x) = \frac{2x}{x}$ مساویند؟

چرا؟ خیر زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R \end{array} \right\} \rightarrow D_f \neq D_g$$

(گارد رگلاسی ۱ ص ۵۱)

① آیا دو تابع با ضابطه $g(x) = x$ ، $f(x) = \frac{x^2}{x}$ مساویند؟ چرا؟ خیر زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R \end{array} \right\} \rightarrow D_f \neq D_g$$

تمرین ۳ ص ۵۶: Homework

③ در هر مورد آیا دو تابع مساویند؟

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{|x|}{x}$$

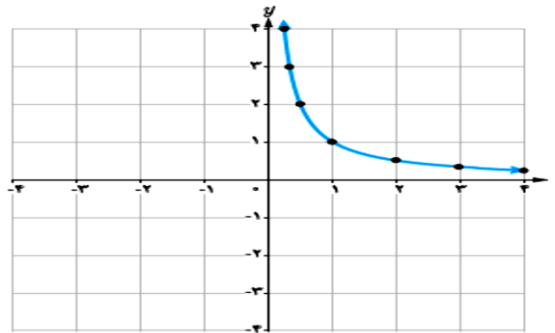
$$\text{ب) } f(x) = x - 2, \quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ رسم تابع با ضابطه}$$

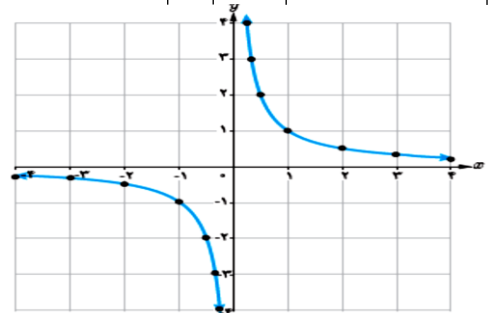
(فعالیت ص ۴۹)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را با هر یک از دامنه های $D_f = R - \{0\}$ و $D_f = (0, +\infty)$ رسم کنید. حل:

$$D_f = (0, +\infty) \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{x} & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$



$$D_f = R - \{0\} \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & \dots & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & \dots \\ \hline y & \dots & -\frac{1}{2} & -1 & -2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \dots \end{array}$$

**تمرین ۴ ص ۵۶: Homework**① نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ رسم کنید.

توابع رادیکالی:

هر تابع به شکل $f(x) = \sqrt{g(x)}$ را یک تابع رادیکالی می نامیم که در آن $g(x)$ منفی نیست (یعنی صفر یا مثبت است). مثل: $f(x) = \sqrt{x}$.

دامنه توابع رادیکالی:

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می دهیم و نامعادله را حل می کنیم.

$$D_f = g(x) \geq 0$$

مثل:

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

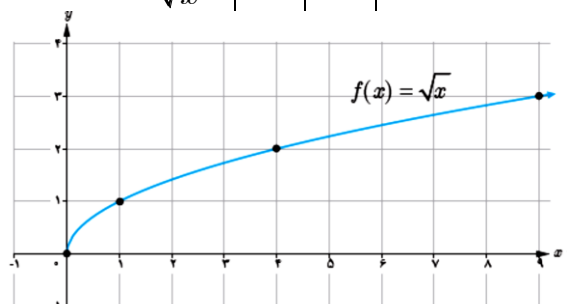
رسم تابع باضابطه $f(x) = \sqrt{x}$

ابتدا دامنه را مشخص و سپس از طریق نقطه یابی نمودار را رسم می کنیم.

(مثال ص ۵۲)

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

x	۰	۱	۴
\sqrt{x}	۰	۱	۲

یادآوری:مراحل رسم توابع به کمک انتقال:

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = af(bx + c) + d$$

- a, d روی عرض نقاط (y) تاثیر مستقیم دارند و انتقال به صورت آسانسوری است
- b, c روی طول نقاط (x) تاثیر معکوس دارند و انتقال قطاری است.

اولویت ها:

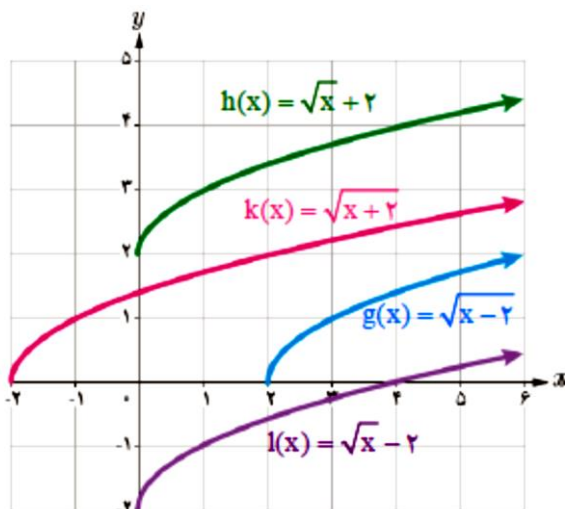
اول (x) یا (y) فرقی ندارد ولی:

- در (x) ها اول c سپس b
- در (y) ها اول a سپس d

رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع باضابطه $f(x) = \sqrt{x}$:

(فعالیت او آ و آ ص ۵۳)

- ① مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است . سپس دامنه آنها را تعیین کنید. حل:



$$g(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

توابع پله ای:

هر تابع چند ضابطه ای که همه ضابطه هایش عدد ثابت باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{را تابع پله ای می نامیم. مثل:}$$

(فعالیت ص ۵۴)

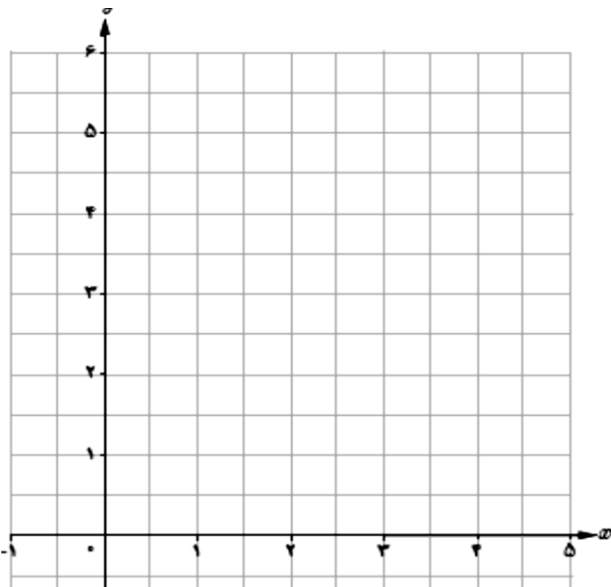
در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می شود:

هزینه (هزار تومان)	زمان	
۳	تا کمتر از ۲ ساعت	از هنگام ورود
۴	تا ۲/۵ ساعت	از ۲ ساعت
۵	تا کمتر از ۳ ساعت	از بیشتر از ۲/۵ ساعت
۶	تا ۵ ساعت	از ۳ ساعت

الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست؟ حل:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2/5 \\ 5 & 2/5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



$$h(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_h = [0, +\infty)$$

$$k(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_k = [-2, +\infty)$$

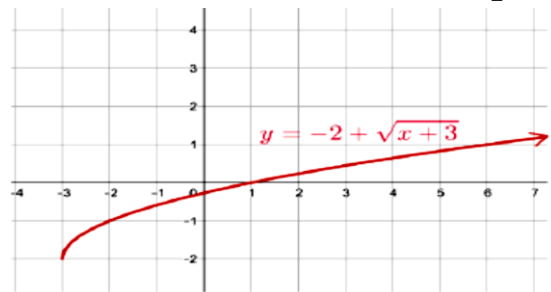
$$l(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_l = [0, +\infty)$$

② نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.

حل: برای رسم $y = \sqrt{x+3} - 2$ نمودار $y = \sqrt{x}$ را

را ۳ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل می کنیم

$$y = -2 + \sqrt{x+3} \rightarrow x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow D = [-3, +\infty)$$



③ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم

کنید. سپس دامنه آن را بیابید.

تمرین ۵ (ص ۵۶): Homework

⑤ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم

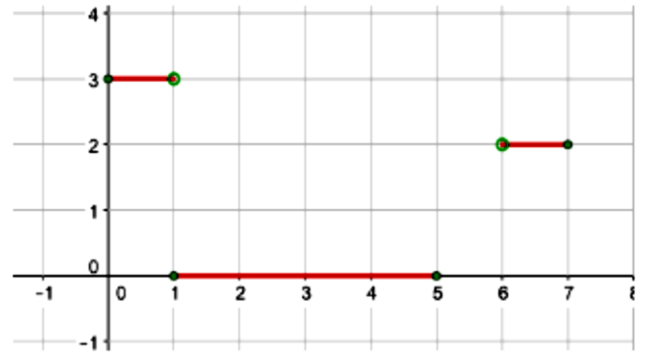
کنید.

(تمرین ۷ ص ۵۶)

⑦ تابع پله ای روبه رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

حل:



توابع جزء صحیح:

توابع جزء صحیح یا براکت از نوع توابع پله ای است که به

صورت $f(x) = [x]$ می باشد که می خوانیم جزء صحیح x

یا براکت x . مثل $f(x) = [2]$

دامنه توابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح کارش صحیح سازیه و هر عددی که وارد تابع شود جزء صحیح آن عدد را بیرون می دهد. بنابراین:

$$D_f = R$$

✓ نکته: جزء صحیح (براکت) هر عدد صحیح، برابر

است با خود آن عدد

$$\begin{cases} x \\ \downarrow \\ x \in Z \end{cases} = x \rightarrow [2] = 2, \quad [-2] = -2$$

✓ جزء صحیح (براکت) هر عدد غیر صحیح، برابر است

با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

$$\begin{cases} x \\ \downarrow \\ x \notin Z \end{cases} \xrightarrow{n < x < n+1} n$$

$$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$$

مثل:

$$[2/4] = 2$$

$$[-0/7] = -1$$

✓ راه کوتاه: براکت در اعداد مثبت، اعشار را از بین می برد و در اعداد منفی علاوه بر از بین بردن اعشار، یک واحد هم کم می کند. مثل:

$$[2/7] = 2 \quad [-2/7] = -2 - 1 = -3$$

(مثال ص ۵۴ و کاربرد کلاسی او ۲ ص ۵۵ و تمرین ۶ ص ۵۶)

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$[4] = 4 \quad [6/1] = 6 \quad [0] = 0$$

$$[-4/3] = -5 \quad [-3] = -3 \quad [-3/4] = -4$$

$$[-2] = \quad [-1/9] = \quad [0/4] =$$

$$[-0/4] = \quad [4/25] = \quad [3] =$$

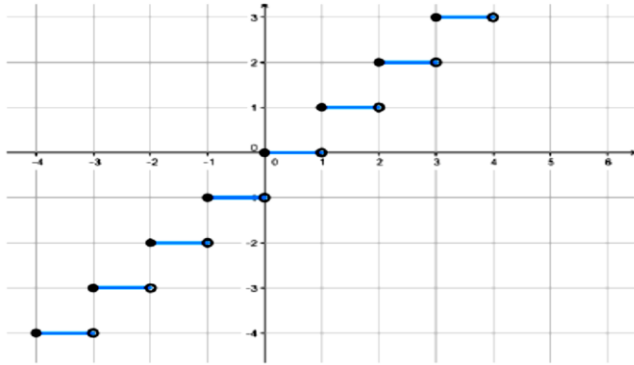
$$[2/3] = \quad [1/7] = \quad [1/2] =$$

$$\left[\frac{41}{37} \right] = \quad \left[-\frac{13}{51} \right] =$$

$$[300/4002] =$$

$$[-103/003] =$$

$$[-2309/54] =$$



تمرین ۸ ص ۵۶: Homework

⑧ تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $D_f = [-3, 3)$ را رسم کنید.

✓ نکته: اگر x عدد حقیقی و n عددی صحیح باشد:

$$[x \pm k] = [x] \pm k$$

$$[x + 2] = [x] + 2$$

$$[x - 5] = [x] - 5$$

(فعالیت ۱ ص ۵۵)

① اگر $[x] = 2$ آن گاه x برابر چه اعدادی می تواند باشد؟

حل:

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow [2, 3)$$

مراتل رسم تابع جزء صحیح:

۱) بازه داده شده را به چند زیر بازه تقسیم می کنیم.

۲) براکت هر بازه را به دست می آوریم

۳) نقاط را روی محور پیدا کرده و نمودار را رسم می کنیم

(فعالیت ۲ ص ۵۵)

② تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ و دامنه $D_f = [-4, 4)$

را رسم کنید. حل:

x	$y = [x]$
$[-4, -3)$	-4
$[-3, -2)$	-3
$[-2, -1)$	-2
$[-1, 0)$	-1
$[0, 1)$	0
$[1, 2)$	1
$[2, 3)$	2
$[3, 4)$	3